Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Fizyki
Instytut Matematyki

Zbigniew Błocki

# Zespolony operator Monge'a-Ampère'a w obszarach hiperwypukłych

Praca doktorska

Promotor:
Prof. dr hab. Józef Siciak

Kraków 1995

**Spis treści**

# Wstęp

Jeśli $u$ jest gładką funkcją plurisubharmoniczną (w skrócie psh) określoną na otwartym podzbiorze przestrzeni $\mathbb{C}^n$, to zespolony operator Monge'a-Ampère'a definiujemy następująco:

$$Mu := \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right).$$

$M$ jest nieliniowym eliptycznym operatorem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu. Jak pokazali Bedford i Taylor ([BT1]), korzystając z nierówności udowodnionej wcześniej przez Cherna, Levine'a i Nirenberga ([CLN]), $Mu$ można dobrze zdefiniować również dla funkcji psh ciągłych jako dodatnią miarę borelowską. Definicję tę można rozszerzyć na funkcje psh lokalnie ograniczone, ale nie da się tego zrobić dla wszystkich funkcji psh (zob. [BT2]).

Niech $\Omega$ będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^n$, $\mu$ dodatnią miarą borelowską na $\Omega$ zaś $f$ funkcją ciągłą na $\partial\Omega$. Z punktu widzenia teorii równań eliptycznych drugiego rzędu naturalnym jest rozpatrywanie następującego problemu Dirichleta: czy istnieje funkcja $u$ spełniająca warunki

$$\begin{cases} u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega}) \\ Mu = \mu \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases} \tag{0.1}$$

W swojej pracy [BT1] Bedford i Taylor udowodnili, że problem (0.1) jest jednoznaczny dla dowolnych $\Omega$, $\mu$ i $f$ oraz że jest on rozwiązalny, jeżeli $\Omega$ jest obszarem ściśle pseudowypukłym zaś $\mu$ funkcją ciągłą na $\overline{\Omega}$ (utożsamiamy funkcje lokalnie całkowalne z miarami zespolonymi, te zaś z dystrybucjami). Rezultat ten, szczególnie w przypadku $\mu \equiv 0$ (wtedy problem (0.1) nazywamy jednorodnym), okazał się fundamentalny w teorii pluripotencjału, gdzie zespolony operator Monge'a-Ampère'a spełnia analogiczną rolę do operatora Laplace'a w klasycznej teorii potencjału (zob. [BT2] oraz [Bed] i [Kli]).

Rozwiązanie problemu Dirichleta dane przez Bedforda i Taylora można starać się uogólnić w kilku kierunkach. Jednym jest badanie dla jakich miar $\mu$ problem ma rozwiązanie. Jest on interesujący nawet, gdy rozpatrujemy go lokalnie, bez nakładania żadnych warunków na wartości brzegowe funkcji $u$. W celu zapoznania się z aktualnym stanem wiedzy na ten temat odsyłamy do pracy [Koł] oraz do podanej tam bibliografii. Innym kierunkiem może być szukanie klasy obszarów $\Omega$, w których problem (0.1) jest rozwiązalny. Jeśli dla danych $\Omega$ i $\mu$ rozwiązanie ma istnieć dla dowolnego $f \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$, to w szczególności każda funkcja ciągła na $\partial\Omega$ musi być przedłużalna do funkcji psh na $\Omega$, ciągłej na $\overline{\Omega}$. Obszary o tej własności noszą nazwę B-regularnych. Autor tego pojęcia Sibony ([Sib]) udowodnił, że dla takich obszarów istnieje funkcja definiująca $\psi$ (tj. $\psi \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, $\psi < 0$, $\lim_{z\to\partial\Omega}\psi(z) = 0$), gładka i taka, że

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\alpha_j\overline{\alpha}_k \geq |\alpha|^2, \quad \alpha \in \mathbb{C}^n$$

(tzn. wszystkie wartości własne macierzy $(\partial^2\psi/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$ są nie mniejsze niż 1). Dzięki temu można powtórzyć rozumowanie Bedforda i Taylora i pokazać, że problem (0.1) jest rozwiązalny w obszarach B-regularnych (gdy $\mu \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$).

W tej pracy rozpatrujemy szerszą klasę obszarów hiperwypukłych, czyli tych które dopuszczają funkcje definiujące. Jak pokazali Kerzman i Rosay ([KR]) dla obszaru hiperwypukłego istnieje gładka, ściśle psh funkcja definiująca. W rozdziale 6. wzmacniamy powyższy rezultat pokazując, że dla obszaru hiperwypukłego istnieje gładka funkcja definiująca $\psi$ taka, że

$$M\psi = \det\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right) \geq 1$$

(tzn. iloczyn wszystkich wartości własnych macierzy $(\partial^2\psi/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$ jest nie mniejszy niż 1). Podstawowe dwa składniki dowodu tego faktu to globalna aproksymacja funkcji psh metodą Richberga ([Rich]) oraz rozwiązanie problemu (0.1) w obszarach hiperwypukłych, przy koniecznym założeniu, że $f \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$ przedłuża się do funkcji psh na $\Omega$, ciągłej na $\overline{\Omega}$. Przedstawienie powyższych wyników jest głównym celem pracy i temu służy jej organizacja. Prawie wszystkie rezultaty prezentowane są z myślą o wykorzystaniu w rozdziale 6. Cały potrzebny materiał dotyczący zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a prezentowany jest z pełnymi dowodami, choć raczej zwięźle. U czytelnika zakłada się znajomość podstawowych faktów z analizy zespolonej wielu zmiennych, teorii dystrybucji, funkcji rzeczywistych, form różniczkowych, macierzy hermitowskich oraz klasycznej teorii potencjału, które można znaleźć w ogólnie dostępnych podręcznikach.

W rozdziale 1. uogólniamy (twierdzenie 1.4) rezultat Richberga ([Rich]) dotyczący aproksymacji funkcji ściśle psh ciągłych (twierdzenie 1.2), tak by móc go później zastosować w rozdziale 6. Przydatna okazuje się tutaj terminologia snopów. Następnie dowodzimy wspomniane wyżej charakteryzacje obszarów hiperwypukłych (twierdzenie 1.7) oraz B-regularnych (twierdzenie 1.8), upraszczając nieznacznie dowód pierwszego z tych rezultatów dzięki zastosowaniu wyniku J. B. Walsh'a (twierdzenie 1.6). Rozdział 2. zawiera ogólnie znane wśród specjalistów, ale trudne do znalezienia w podręcznikach własności prądów dodatnich oraz macierzy hermitowskich. W rozdziale 3., wzorując się częściowo na przeglądowej pracy Demailly'ego [Dem], definiujemy zespolony operator Monge'a-Ampère'a dla funkcji psh ciągłych i prezentujemy jego podstawowe własności (większość pochodzi z [BT1]). Dowodzimy również oszacowania pochodzącego z [Bło1] (twierdzenie 3.5, wniosek 3.6), będącego z jednej strony uogólnieniem nierówności Cherna-Levine'a-Nirenberga, z drugiej zaś przydatnego w rozpatrywaniu stabilności operatora Monge'a-Ampère'a w rozdziale 5.

Rozdział 4. poświęcony jest przedstawieniu wspomnianego rozwiązania problemu Dirichleta w obszarach B-regularnych. Dla równania jednorodnego oryginalny dowód z [BT1] został znacznie skrócony przez Demailly'ego ([Dem]), jednak metoda ta przenosi się także na przypadek ogólny. Głównym uproszczeniem Demailly'ego jest zastosowanie twierdzenia Rademachera i propozycji 3.8 w punkcie V dowodu twierdzenia 4.1. Ta prosta operacja skraca oryginalny dowód o kilkanaście stron (por. [BT1] i [Kli]). W [Dem] uproszczony został również znacznie dowód tego, że z nierówności (4.8) i z tego, że funkcja $u$ jest psh wynika, że jest ona klasy $\mathrm{C}^{1,1}$.

W rozdziale 5. rozważamy pojęcie stabilności operatora Monge'a-Ampère'a. Głównym wynikiem, stosowanym później w rozdziale 6., jest twierdzenie 5.7 udowodnione przez Cegrella i Perssona ([CP]), którzy wykorzystali pomysł Chenga i Yau przedstawiony w [Bed], polegający na porównaniu rzeczywistego i zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a (lemat 5.9). Postępując podobnie jak Cegrell i Persson upraszczamy jednak ich dowód, tak, że obywamy się bez korzystania z rozwiązania problemu Dirichleta dla rzeczywistego operatora Monge'a-Ampère'a. Różnica polega na tym, że oszacowanie z lematu 5.8 stosujemy bezpośrednio dla funkcji psh, podczas gdy Cegrell i Persson korzystają z niego tylko dla funkcji wypukłych.

Wreszcie w rozdziale 6. rozwiązujemy problem (0.1) w obszarach hiperwypukłych aproksymując je obszarami B-regularnymi oraz korzystając ze stabilności operatora Monge'a-Ampère'a (twierdzenie 6.1). W przypadku, gdy $\Omega = \Delta^2$ jest bidyskiem (a więc obszarem hiperwypukłym, ale nie B-regularnym) twierdzenie 6.1 zostało udowodnione przez Levenberga i Okadę ([LO]) przy pomocy znacznie bardziej skomplikowanych, probabilistycznych metod. Na końcu dowodzimy istnienia gładkich podrozwiązań w obszarach hiperwypukłych (twierdzenie 6.2).

Praca zawiera więc rezultaty zarówno nowe jak i już znane, choć z reguły z prostszymi niż oryginalne dowodami. Za własne wyniki autora można uznać 3.5-3.6, 5.1-5.6 oraz rozdział 6. Nowe jest również twierdzenie 1.4, ale metody dowodu nie różnią się od argumentów Richberga.

Chciałbym podziękować mojemu promotorowi profesorowi Józefowi Siciakowi za opiekę naukową w czasie mojej pracy w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Sławkowi Kołodziejowi między innymi za szybkie obalanie moich licznych hipotez, co zaoszczędziło mi dużo czasu, oraz profesorowi Markowi Jarnickiemu za wiele cennych i bardzo celnych uwag.

# 1. Globalna aproksymacja funkcji plurisubharmonicznych

Niech $\Omega$ będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}^n$. Jeśli $u$ jest funkcją psh na $\Omega$, to dla $\delta > 0$ splotową regularyzację funkcji $u$ definiujemy wzorem:

$$u_\delta(z) := (u * \rho_\delta)(z) = \int_B u(z - \delta w)\rho(w)d\lambda(w),$$

gdzie $\lambda$ jest miarą Lebesgue'a, $B$ kulą jednostkową w $\mathbb{C}^n$, $\delta > 0$ zaś $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ jest nieujemna, zależy tylko od $|z|$, $\operatorname{supp}\rho = \overline{B}$, $\int_B \rho d\lambda = 1$ oraz $\rho_\delta(z) := \delta^{-2n}\rho(z/\delta)$. Wtedy $u_\delta \in \mathrm{PSH} \cap C^\infty(\Omega_\delta)$, gdzie $\Omega_\delta := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \delta\}$, oraz $u_\delta \downarrow u$, gdy $\delta \downarrow 0$ (zob. np. [Hör1]). Jeśli $u$ jest ciągła, to zbieżność jest lokalnie jednostajna.

Mówimy, że funkcja $u$ jest *ściśle psh* na $\Omega$, jeżeli dla każdego $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że $u + \varepsilon\varphi \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, gdy $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Łatwo można udowodnić następującą charakteryzację funkcji ściśle psh:

**Propozycja 1.1**. *Dla $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ następujące warunki są równoważne:*
*i) Funkcja $u$ jest ściśle psh;*
*ii) Funkcję $u$ można lokalnie zapisać w postaci $u' + \psi$, gdzie $u'$ jest psh zaś $\psi$ jest ściśle psh klasy $C^\infty$;*
*iii) Dla każdego $\Omega' \Subset \Omega$ istnieje $c > 0$ takie, że w $\Omega'$ mamy*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\alpha_j\overline{\alpha}_k \geq c|\alpha|^2, \quad \delta > 0,\ \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

*Dowód.* Można łatwo pokazać, że każdy z powyższych warunków jest równoważny temu, że dla $\Omega' \Subset \Omega$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $u(z) - \varepsilon|z|^2 \in \mathrm{PSH}(\Omega')$. ■

Jeśli chodzi o globalną aproksymację funkcji psh ciągłych, to mamy następujący rezultat Richberga:

**Twierdzenie 1.2** ([Rich]). *Załóżmy, że $\Omega$ jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}^n$ a $u$ funkcją ściśle psh ciągłą na $\Omega$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie funkcją ciągłą na $\Omega$ taką, że $\lim_{z\to\partial\Omega}\varepsilon(z) = 0$. Wtedy istnieje funkcja ściśle psh $v$, klasy $C^\infty$ na $\Omega$, taka, że $u \leq v \leq u + \varepsilon$.*

Stosując metody Richberga uogólnimy powyższe twierdzenie, by zastosować je później w rozdziale 6. Jedną z głównych idei w dowodzie twierdzenia 1.2 w pracy [Rich] jest rozpatrywanie funkcji postaci

$$u_\theta(z) := u_{\theta(z)}(z) = \int_B u(z - \theta(z)w)\rho(w)d\lambda(w), \quad z \in \Omega_\delta,$$

gdzie $\theta \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \theta \leq \delta$.

*Definicja.* Podsnop $\mathcal{S}$ snopa funkcji psh ciągłych nad $\mathbb{C}^n$ będziemy nazywać *snopem Richberga*, jeżeli spełnia on następujące warunki:
(1.1) Dla $u \in \mathcal{S}(\Omega)$, $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ i $c \in \mathbb{R}$ istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że $u + \varepsilon\varphi + c \in \mathcal{S}(\Omega)$, gdy $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.
(1.2) Jeśli $u, v \in \mathcal{S}$, to $\max\{u, v\} \in \mathcal{S}$.
(1.3) Jeśli $\Omega' \Subset \Omega$, $\theta \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, $0 \leq \theta \leq 1$ oraz $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na otoczeniu zbioru $\overline{\{\theta < 1\} \cap \Omega'}$, to istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $u_{\delta\theta} \in \mathcal{S} \cap \mathrm{C}^\infty(\Omega')$ dla $\delta \in (0, \delta_0]$.

**Propozycja 1.3**. *Snop funkcji ściśle psh ciągłych jest snopem Richberga.*

W rozdziale 6. skonstruujemy inny snop Richberga.

*Dowód propozycji 1.3.* Wystarczy pokazać (1.3). Oznaczmy $D := \{\theta < 1\} \cap \Omega'$ i niech $r > 0$ będzie takie, że $u$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na zbiorze $\{z \in \Omega' : \operatorname{dist}(z, D) < 3r\}$. Niech $0 < \delta \leq r$. Wtedy $u_{\delta\theta}(z) = u_\delta(z)$, gdy $\operatorname{dist}(z, D) > r$, $z \in \Omega'$, oraz $u_{\delta\theta}$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na zbiorze $\widetilde{D} := \{z \in \Omega' : \operatorname{dist}(z, D) < 2r\}$, bo możemy wówczas różniczkować pod znakiem całki. Mamy
$$\frac{\partial^2 u(z - \delta\theta(z)w)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z_0 - \delta\theta(z_0)w) + \delta\gamma_{jk}(z_0, w, \delta),$$
gdzie funkcje $\gamma_{jk}$ są jednostajnie ograniczone dla $z_0 \in \widetilde{D}$, $w \in \overline{B}$ i $\delta \leq r$. Dostaniemy więc jednostajną zbieżność pochodnych cząstkowych $\partial^2 u_{\delta\theta}/\partial z_j \partial \overline{z}_k \longrightarrow \partial^2 u/\partial z_j \partial \overline{z}_k$ na zbiorze $\widetilde{D}$. Zatem dla odpowiednio małych $\delta$ funkcje $u_{\delta\theta}$ są ściśle psh na $\Omega'$, co kończy dowód propozycji. ∎

Uogólnieniem twierdzenia 1.2 jest więc następujące:

**Twierdzenie 1.4**. *Załóżmy, że $\mathcal{S}$ jest snopem Richberga i niech $\Omega$ i $\varepsilon$ będą takie jak w twierdzeniu 1.2. Wtedy dla $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ istnieje $v \in \mathcal{S} \cap \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ takie, że $u \leq v \leq u + \varepsilon$.*

Głównym składnikiem dowodu twierdzenia 1.4 będzie następujący:

**Lemat 1.5**. *Niech $u \in \mathcal{S}(\Omega)$, gdzie $\mathcal{S}$ jest snopem Richberga a $\Omega$ obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}^n$. Załóżmy, że $u$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na otoczeniu $\overline{D}$ (zbiór pusty jest otoczeniem zbioru pustego), gdzie $D \Subset \Omega$ jest zbiorem otwartym. Niech $V$ i $W$ będą zbiorami otwartymi takimi, że $V \Subset W \Subset \Omega$ i niech $\varepsilon > 0$ (stałe). Wtedy istnieje $v \in \mathcal{S}(\Omega)$ takie, że*
*i) $v = u$ na $\Omega \setminus W$,*
*ii) $u \leq v \leq u + \varepsilon$ na $\Omega$,*
*iii) $v$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na otoczeniu $\overline{D} \cap \overline{V}$.*

Lemat 1.5 łatwo implikuje twierdzenie 1.4:

*Dowód twierdzenia 1.4.* Załóżmy, że $\Omega_k \uparrow \Omega$, gdzie $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1} \Subset \Omega$, $k \geq 0$, są otwarte,

$\Omega_0 = \emptyset$. Dla $k \geq 1$ połóżmy $W_k := \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega}_{k-2}$ ($W_1 := \Omega_2$) i niech $V_k$ będzie zbiorem otwartym takim, że $\Omega_k \setminus \Omega_{k-1} \Subset V_k \Subset W_k$. Niech $\gamma_k$ będzie liczbą dodatnią; zostanie ona ustalona później. Z lematu 1.5 dostaniemy ciąg $\{u_k\} \subset \mathcal{S}(\Omega)$ taki, że $u_0 = u$ oraz

$u_k = u_{k-1}$ na $\Omega \setminus W_k$,

$u_{k-1} \leq u_k \leq u_{k-1} + \gamma_k$ na $\Omega$,

$u_k$ jest klasy $C^\infty$ na otoczeniu $\bigcup_{j=1}^{k} \overline{V}_j$

(rolę $D$ spełnia $\bigcup_{j=1}^{k-1} V_j$). Ciąg $\{u_k\}$ lokalnie się stabilizuje, możemy zatem zdefiniować $v := \lim u_k \in \mathcal{S} \cap C^\infty(\Omega)$. Mamy wtedy $u \leq v$ na $\Omega$ oraz dla $z \in \Omega \setminus \Omega_k$

$$v(z) = u(z) + \sum_{j=k}^{\infty}(u_j(z) - u_{j-1}(z)) \leq u(z) + \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_j.$$

Jeśli teraz $\gamma_k$ są takie, że

$$\sum_{j=k}^{\infty} \gamma_j = \min_{\overline{\Omega}_{k+1}} \varepsilon,$$

to $u \leq v \leq u + \varepsilon$ na $\Omega$. ∎

*Dowód lematu 1.5.* Niech $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ będzie takie, że $0 \leq \eta \leq 1$ na $\Omega$, $\operatorname{supp} \eta \subset W$ oraz $\eta = 1$ na otoczeniu $\overline{V}$.

Załóżmy najpierw, że $D$ jest zbiorem pustym. Z (1.1) wynika, że istnieje $c_0 \in (0, 2\varepsilon)$ takie, że $u + c_0\eta \in \mathcal{S}(\Omega)$. Regularyzując funkcję $u + c_0\eta$ i korzystając z (1.3) dostaniemy funkcję $\psi_0 \in \mathcal{S} \cap C^\infty(\Omega')$, gdzie $\Omega'$ jest otoczeniem $\overline{W}$, taką, że $u + c_0\eta \leq \psi_0 \leq u + c_0\eta + \frac{c_0}{2}$ na $\Omega'$. Zdefiniujmy

$$v := \begin{cases} \max\{u, \psi_0 - c_0\} & \text{na } W, \\ u & \text{na } \Omega \setminus W. \end{cases}$$

Wtedy $v = u$, gdy $\eta = 0$, oraz $v = \psi_0 - c_0$, gdy $\eta = 1$. Zatem $v \in \mathcal{S}(\Omega)$ (dzięki (1.2)), $v$ jest klasy $C^\infty$ na otoczeniu $\overline{V}$ oraz $u \leq v \leq u + \frac{c_0}{2} \leq u + \varepsilon$ na $\Omega$.

Niech teraz $D$ będzie dowolne. Wybierzmy zbiory otwarte $G_j$, $D_j$ oraz $\theta_j \in C^\infty(\Omega)$, $j = 1, 2$, tak, że $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\overline{G}_j = \{\theta_j = 0\}$, $D_j = \{\theta_j < 1\}$, $D \Subset G_1 \Subset D_1 \Subset G_2 \Subset D_2 \Subset \Omega$ oraz $u$ jest klasy $C^\infty$ na otoczeniu $\overline{D}_2$.

Dzięki (1.1) znajdziemy $c \in (0, \varepsilon/2)$ takie, że

$$\widetilde{u} := u + c\eta \in \mathcal{S}(\Omega), \quad u + c\eta - c\theta_1 \in \mathcal{S}(\Omega). \tag{1.4}$$

Twierdzimy, że dla $\delta > 0$ odpowiednio małego funkcja $\widetilde{\psi} := \widetilde{u}_{\delta\theta_2}$, zdefiniowana na $W$, spełnia następujące warunki:

(1.5) $\widetilde{\psi} = \widetilde{u}$ na otoczeniu $W \cap \overline{D}_1$,

(1.6) $\widetilde{u} \leq \widetilde{\psi} \leq \widetilde{u} + c$ na $W$,

(1.7) $\widetilde{\psi} \in \mathcal{S} \cap C^\infty(W)$.

Żeby dostać (1.5) wystarczy wziąć $\delta$ takie, że $\overline{D}_1 \subset \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial G_2) > 2\delta\}$. Mamy $\widetilde{u}_\delta \downarrow \widetilde{u}$ i zbieżność jest lokalnie jednostajna na $\Omega$. Zatem jeśli $\widetilde{u}_\delta \leq \widetilde{u} + c$ na $W$, to $\widetilde{\psi}(z) = \widetilde{u}_{\delta\theta_2(z)}(z) \leq \widetilde{u}_\delta(z)$ i mamy (1.6). (1.7) wynika natychmiast z (1.3).

Niech teraz $\psi := \widetilde{\psi} - c\theta_1$ na $W$. Twierdzimy, że

(1.8) $\psi \in \mathcal{S} \cap \mathrm{C}^\infty(W)$,

(1.9) $\psi \le u$, gdy $\eta = 0$.

Istotnie, na $W \setminus \overline{D}_1$ mamy $\psi = \widetilde{\psi} - c$, zaś na otoczeniu $W \cap \overline{D}_1$, z (1.5), $\psi = \widetilde{u} - c\theta_1$. Zatem z (1.4) i (1.7) otrzymujemy (1.8), (1.9) zaś wynika z (1.5) i (1.6).

Definiujemy

$$v := \begin{cases} \max\{u, \psi\} & \text{na } W, \\ u & \text{na } \Omega \setminus W. \end{cases}$$

Z (1.8), (1.9) i (1.2) wynika, że $v \in \mathcal{S}(\Omega)$. Mamy oczywiście i), zaś z (1.6) wynika, że $v$ spełnia również ii). Wystarczy więc pokazać iii). Gdy $\eta = 1$, to z (1.6) mamy $\psi \ge \widetilde{u} - c\theta_1 = u + c - c\theta_1 \ge u$, zatem dzięki (1.8) $v$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na otoczeniu $\overline{V}$. Do zakończenia dowodu lematu wystarczy pokazać, że $v$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$ na $G_1$. Gdy $\eta = 0$, to dzięki (1.9) $v = u$, więc wystarczy pokazać klasę $\mathrm{C}^\infty$ na $G_1 \cap W$. Wtedy z (1.5) $\psi = \widetilde{\psi} = u + c\eta$, czyli $v = u + c\eta$ na $G_1 \cap W$. Dowód lematu został zakończony. ∎

Mając do dyspozycji twierdzenie 1.2 scharakteryzujemy teraz obszary hiperwypukłe oraz B-regularne. Przydatny będzie także następujący rezultat J. B. Walsh'a:

**Twierdzenie 1.6** ([Wal]). *Niech $\Omega$ będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}^n$ i niech $f \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$. Połóżmy*

$$u := \sup\{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) : v^*|_{\partial\Omega} \le f\}$$

*($v^*$, odp. $v_*$, oznacza górną, odp. dolną, regularyzację funkcji $v$; jest ona określona na $\overline{\Omega}$). Załóżmy dodatkowo, że $u_* = u^* = f$ na $\partial\Omega$. Wtedy funkcja $u$ jest ciągła.*

*Dowód.* Funkcja $u^*$ jest psh na $\Omega$ i z założenia $u^*|_{\partial\Omega} \le f$. Zatem $u = u^*$ i $u$ jest półciągła z góry. Dla pokazania półciągłości z dołu weźmy $z_0 \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Dzięki zwartości $\partial\Omega$ znajdziemy $0 < \delta < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ takie, że

(1.10) $$z \in \overline{\Omega},\ w \in \partial\Omega,\ |z - w| \le 2\delta \quad \Rightarrow \quad |u(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Weźmy $\widetilde{z} \in \Omega$ takie, że $|z_0 - \widetilde{z}| < \delta$ i dla $z \in \overline{\Omega}$ zdefiniujmy

$$v(z) := \begin{cases} \max\{u(z), u(z + z_0 - \widetilde{z}) - 2\varepsilon\} & \text{gdy } z + z_0 - \widetilde{z} \in \overline{\Omega}, \\ u(z) & \text{gdy } z + z_0 - \widetilde{z} \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Gdy $z + z_0 - \widetilde{z} \in \partial\Omega$, to z (1.10) $u(z + z_0 - \widetilde{z}) \le u(z) - \varepsilon$, więc $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Z (1.10) dostaniemy też, że $v = u$ na pewnym otoczeniu $\partial\Omega$, zatem $v \le u$ na $\Omega$. Mamy w efekcie $u(\widetilde{z}) \ge v(\widetilde{z}) \ge u(z_0) - 2\varepsilon$, czyli $u$ jest półciągła z dołu. ∎

Obszar $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *hiperwypukłym*, jeżeli istnieje w nim ograniczona wyczerpująca funkcja psh, tzn. istnieje $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, takie, że $u < 0$ oraz $\lim_{z \to \partial\Omega} u(z) = 0$. Takie $u$ będziemy nazywać *funkcją definiującą* dla $\Omega$. Z klasycznej teorii potencjału wynika, że obszary hiperwypukłe są regularne względem równania Laplace'a, tzn. każdą funkcję ciągłą na $\partial\Omega$ można przedłużyć do funkcji harmonicznej na $\Omega$ i ciągłej na $\overline{\Omega}$ (zob. np. [Doo], str. 125).

**Twierdzenie 1.7** ([KR]). *Jeśli $\Omega$ jest obszarem hiperwypukłym, to istnieje funkcja definiująca $\psi$ klasy $\mathrm{C}^\infty$, ściśle psh na $\Omega$.*

Powyższe twierdzenie zostanie wzmocnione w rozdziale 6. Pokażemy, że o $\psi$ można dodatkowo założyć, że

$$\det\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right)\geq 1.$$

*Dowód twierdzenia 1.7.* Pokażemy najpierw, że istnieje ciągła funkcja definiująca. Weźmy dowolną kulę $K \Subset \Omega$ i niech

$$u := \sup\{v\in \mathrm{PSH}(\Omega) : v\leq 0, v|_K\leq -1\}.$$

Wtedy $-1\leq u\leq 0$, $u^*|_{\partial K}=-1$ (z logarytmicznej wypukłości funkcji psh) oraz $u_*|_{\partial\Omega}=0$ (z definicji obszaru hiperwypukłego). Z twierdzenia 1.6 stosowanego do $\Omega\setminus\overline{K}$ mamy więc $u\in\mathrm{PSH}(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega}=0$, $u|_K=-1$, zatem $u$ jest funkcję definiującą.

Niech $C>0$ będzie takie, że $v(z):=|z|^2-C\leq 0$ na $\Omega$. Połóżmy $\widetilde{u}:=-2\sqrt{uv}$. Wtedy $\widetilde{u}$ jest ciągła na $\overline{\Omega}$ oraz $\widetilde{u}|_{\partial\Omega}=0$. Dla funkcji jednej zmiennej mamy

$$\frac{\partial^2(-2\sqrt{uv})}{\partial z\partial\overline{z}}=(uv)^{-1/2}\left(-u\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\overline{z}}-v\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}\right)+\frac{1}{2}(uv)^{-3/2}\left|u\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2\geq\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\overline{z}},$$

czyli w ogólnym przypadku $\widetilde{u}$ jest ściśle psh. Z twierdzenia 1.2 dostaniemy teraz żądane $\psi$. ■

**Twierdzenie 1.8** ([Sib]). *Dla ograniczonego obszaru $\Omega$ w $\mathbb{C}^n$ następujące warunki są równoważne:*

*i) Funkcje ciągłe na $\partial\Omega$ przedłużają się do funkcji psh na $\Omega$, ciągłych na $\overline{\Omega}$, tzn. dla każdego $f\in\mathrm{C}(\partial\Omega)$ istnieje $v\in\mathrm{PSH}(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ takie, że $v|_{\partial\Omega}=f$.*

*ii) W każdym punkcie brzegowym istnieje bariera psh, tzn. dla każdego $z_0\in\partial\Omega$ istnieje $v\in\mathrm{PSH}(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ takie, że $v(z_0)=0$ oraz $v|_{\overline{\Omega}\setminus\{z_0\}}<0$.*

*iii) Dla $\Omega$ istnieje funkcja definiująca $\psi$ klasy $\mathrm{C}^\infty$ taka, że*

$$\sum_{j,k=1}^n\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\alpha_j\overline{\alpha}_k\geq|\alpha|^2,\quad \alpha\in\mathbb{C}^n.$$

Obszar $\Omega$ spełniający jeden z powyższych warunków nazywamy *B-regularnym.* W szczególności brzeg obszaru B-regularnego nie ma struktury analitycznej (tzn. nie można w nim zanurzyć dysku analitycznego). Obszary B-regularne są oczywiście hiperwypukłe, ale pojęcia te nie są równoważne, gdyż np. polidyski są obszarami hiperwypukłymi, ale nie B-regularnymi.

*Dowód twierdzenia 1.8.* Implikacja i)$\Rightarrow$ii) jest oczywista. Żeby pokazać implikację odwrotną weźmy $f \in C(\partial\Omega)$ i niech $u$ będzie takie jak w twierdzeniu 1.6. Znajdziemy funkcję $h \in C(\partial\Omega)$, harmoniczną na $\Omega$ i taką, że $h|_{\partial\Omega} = f$. Z definicji $u$ mamy $u \leq h$, więc $u^* \leq f$ na $\partial\Omega$. Weźmy dowolne $z_0 \in \partial\Omega$ i $\varepsilon > 0$. Dzięki ii) istnieje $v_0 \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ takie, że $v_0(z_0) = 0$ oraz $v_0|_{\overline{\Omega}\setminus\{z_0\}} < 0$. Jeśli teraz $v := f(z_0) + tv_0$, to dla $t$ odpowiednio dużego mamy $v|_{\partial\Omega} \leq f + \varepsilon$. Stąd $v - \varepsilon \leq u$ na $\Omega$, więc $f(z_0) - \varepsilon \leq u_*(z_0)$ i w efekcie $f \leq u_*$ na $\partial\Omega$. Mamy zatem $u_* = u^* = f$ na $\partial\Omega$ i z twierdzenia 1.6 wynika, że $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Chcemy następnie pokazać, że z i) wynika iii). Dzięki i) istnieje $v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ takie, że dla $z \in \partial\Omega$ mamy $v(z) = -2|z|^2$. Połóżmy $u(z) := v(z) + |z|^2$. Z twierdzenia 1.2 dostaniemy funkcję $\widetilde{u} \in \mathrm{PSH} \cap C^\infty(\Omega)$ taką, że $\lim_{z\to\partial\Omega}(u(z) - \widetilde{u}(z)) = 0$. Wystarczy teraz przyjąć $\psi(z) := \widetilde{u}(z) + |z|^2$.

Do pokazania została jeszcze implikacja iii)$\Rightarrow$i). Weźmy $f \in C(\partial\Omega)$ i ponownie niech $u$ będzie takie jak w twierdzeniu 1.6. Niech $\varepsilon > 0$; znajdziemy wtedy $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ takie, że $f \leq g \leq f + \varepsilon$ na $\partial\Omega$. Dla $A$ odpowiednio dużego funkcje $g + A\psi$ i $-g + A\psi$ są psh na $\Omega$. Funkcja $g + A\psi - \varepsilon$ jest $\leq f$ na $\partial\Omega$, więc jest $\leq u$ na $\Omega$. Z kolei dla $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ takich, że $v^*|_{\partial\Omega} \leq f$ funkcja $v^* - g + A\psi$ jest $\leq 0$ na $\partial\Omega$, więc jest również $\leq 0$ na $\Omega$, a zatem $u - g + A\psi \leq 0$ na $\Omega$. Dostaliśmy więc $g + A\psi - \varepsilon \leq u \leq g - A\psi$ na $\Omega$ czyli, wobec dowolności $\varepsilon$, $u_* = u^* = f$ na $\partial\Omega$. Z twierdzenia 1.6 $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. ■

# 2. Prądy dodatnie

Niech $\Omega$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$ i niech $0 \le p \le m$. Formę różniczkową

$$T = \sum_{|I|=p} T_I dx_I$$

(suma brana po $I = (i_1, \dots, i_p)$ takich, że $1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$; $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$), gdzie $T_I$ są dystrybucjami na $\Omega$, nazywamy *prądem* stopnia $p$ (wymiaru $m-p$) i piszemy $T \in \mathcal{D}'_{(p)}(\Omega)$. Jeśli $\Psi = \sum_{|J|=q} \Psi_J dx_J \in \mathrm{C}^\infty_{0,(q)}(\Omega)$ jest gładką formą różniczkową o nośniku zwartym, to definiujemy

$$\langle T, \Psi \rangle := \begin{cases} 0 & \text{gdy } q \neq m-p \\ \sum_{|J|=q} \left(\widetilde{T \wedge dx_J}\right)(\Psi_J) & \text{gdy } q = m-p, \end{cases}$$

gdzie $\widetilde{\ } : \mathcal{D}'_{(m)}(\Omega) \ni t d\lambda \mapsto t \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $d\lambda = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Można łatwo sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathcal{D}'_{(p)}(\Omega) \ni T \mapsto \langle T, \cdot \rangle \in \left(\mathrm{C}^\infty_{0,(m-p)}\right)'$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowo topologicznych. Możemy więc identyfikować prądy stopnia $p$ z ciągłymi funkcjonałami liniowymi na przestrzeni gładkich form różniczkowych stopnia $m-p$ o nośniku zwartym.

Mówimy, że prąd $T$ jest *rzędu zero*, jeśli wszystkie jego współczynniki $T_I$ są (lokalnie) miarami zespolonymi, tzn. $T_I$, jako ciągłe funkcjonały liniowe na $\mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$, przedłużają się na $\mathrm{C}_0(\Omega)$. Gdy $T$ jest rzędu zero, to

$$\langle T, \Psi \rangle = \int_\Omega T \wedge \Psi, \quad \Psi \in \mathcal{D}'_{(m-p)}(\Omega).$$

Prąd $T$ nazywamy *zamkniętym*, jeżeli $dT = 0$ (operator $d : \mathcal{D}'_{(p)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'_{(p+1)}(\Omega)$ definiuje się analogicznie jak w przypadku form gładkich).

Jeśli $T = \sum_{|I|=p} T_I dx_I \in \mathcal{D}'_{(p)}(\Omega)$, to dla $\delta > 0$ definiujemy $(T_\delta)_I := T_I * \rho_\delta$. Wtedy $(T_\delta)_I \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_\delta)$ oraz funkcje $(T_\delta)_I$ dążą słabo do $T_I$, tj.

$$(T_\delta)_I(\varphi) = \int_\Omega (T_\delta)_I \, \varphi \, d\lambda \longrightarrow T_I(\varphi)$$

dla $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$, a gdy $T_I$ jest miarą zespoloną to również dla $\varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega)$. Jeśli $T_\delta := T * \rho_\delta = \sum_{|I|=p} (T_\delta)_I dx_I$, to $T_\delta \in \mathrm{C}^\infty_{(p)}(\Omega_\delta)$ oraz formy $T_\delta$ dążą słabo do $T$ tj. $\lim_{\delta \longrightarrow 0} \langle T_\delta, \Psi \rangle = \langle T, \Psi \rangle$ dla $\Psi \in \mathrm{C}^\infty_{0,(m-p)}$, a gdy $T$ jest rzędu zero, to również dla $\Psi \in \mathrm{C}_{0,(m-p)}(\Omega)$.

Dla prądów rzędu zero możemy sformułować twierdzenie Stokes'a:

**Twierdzenie 2.1**. *Niech $\Omega$ będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^m$ o gładkim brzegu a $T$ prądem stopnia $m-1$, określonym na otoczeniu $\overline{\Omega}$, gładkim na otoczeniu $\partial\Omega$ i takim, że prąd $dT$ jest rzędu zero (czyli jest miarą zespoloną). Wtedy*

$$\int_{\partial\Omega} T = \int_{\Omega} dT.$$

*Dowód.* Niech $F$ będzie gładką formą stopnia $m-1$ w $\Omega$ taką, że $F = T$ na otoczeniu $\partial\Omega$. Z klasycznego twierdzenia Stokes'a mamy

$$\int_{\partial\Omega} T = \int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF.$$

Możemy zatem założyć, że $T = 0$ na otoczeniu $\partial\Omega$. Niech $T_\delta := T * \rho_\delta \longrightarrow T$ słabo. Wtedy $T_\delta = 0$ na otoczeniu $\partial\Omega$ (dla odpowiednio małych $\delta$), więc z klasycznego twierdzenia Stokes'a $\int_\Omega dT_\delta = 0$. Weźmy $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ takie, że $\varphi = 1$ na otoczeniu $\operatorname{supp} T$. $dT_\delta \longrightarrow dT$ słabo, zatem

$$\int_\Omega dT = \int_\Omega \varphi dT = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \int_\Omega \varphi dT_\delta = 0. \blacksquare$$

Niech teraz $\Omega$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Prąd postaci

$$T = \sum_{|I|=p, |J|=q} T_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

nazywamy *prądem zespolonym* bistopnia $(p,q)$ (biwymiaru $(n-p, n-q)$) i piszemy $T \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(\Omega)$. Podobnie jak wyżej mamy $\mathcal{D}'_{(p,q)}(\Omega) \cong \left(\mathbb{C}^\infty_{0,(n-p,n-q)}\right)'$.

Elementy przestrzeni $\mathbb{C}_{(p,p)}$ (czyli formy bistopnia $(p,p)$ o stałych współczynnikach) postaci $i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p$, gdzie $\alpha_j \in \mathbb{C}_{(1,0)}$ (tj. $\alpha_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} dz_k$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$), nazywamy *głównymi formami dodatnimi.* Prąd zespolony $T \in \mathcal{D}'_{(p,p)}(\Omega)$ nazywamy *dodatnim* (ozn. $T \geq 0$), jeżeli dla każdej $(n-p, n-p)$ - głównej formy dodatniej $\alpha$ mamy $\widetilde{T \wedge \alpha} \geq 0$ (jako dystrybucja).

Poniżej przedstawimy podstawowe własności prądów dodatnich i głównych form dodatnich.

**Lemat 2.2**. *W przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}_{(p,p)}$ istnieje baza złożona z głównych form dodatnich.*

*Dowód.* Wystarczy pokazać, że formy typu $dz_I \wedge d\overline{z}_J$ są generowane przez główne formy dodatnie. Mamy $dz_I \wedge d\overline{z}_J = \pm \bigwedge_{k=1}^p dz_{i_k} \wedge d\overline{z}_{j_k}$, więc wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} dz_j \wedge d\overline{z}_k = \frac{1}{2}(dz_j + dz_k) \wedge (d\overline{z}_j + d\overline{z}_k) + \frac{i}{2}(dz_j + i dz_k) \wedge (d\overline{z}_j - i d\overline{z}_k) \\ - \frac{i+1}{2}(dz_j \wedge d\overline{z}_j + dz_k \wedge d\overline{z}_k). \blacksquare \end{aligned}$$

**Twierdzenie 2.3**. *Każdy prąd dodatni jest rzędu zero.*

*Dowód.* Niech $\{\alpha_j\}$ będzie bazą w $\mathbb{C}_{(n-p,n-p)}$ złożoną z głównych form dodatnich a $\{\beta_j\}$ bazą w $\mathbb{C}_{(p,p)}$ dualną do $\{\alpha_j\}$ (tzn. $\alpha_j \wedge \beta_k = \delta_{jk} d\lambda$). Niech $T = \sum_{I,J} T_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J \in \mathcal{D}'_{(p,p)}(\Omega)$ będzie dowolnym prądem dodatnim. Mamy $T = \sum_j T_j \beta_j$, gdzie $T_j = \widetilde{T \wedge \alpha_j}$ są dystrybucjami dodatnimi, czyli miarami dodatnimi. Jeśli zatem $\beta_j = \sum_{I,J} c^j_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$, $c^j_{IJ} \in \mathbb{C}$, to $T_{IJ} = \sum_j c^j_{IJ} T_j$, więc $T_{IJ}$ są miarami zespolonymi. ∎

**Propozycja 2.4**. *Prąd* $T = \sum_{j,k=1}^n T_{jk}\, i dz_j \wedge d\overline{z}_k \in \mathcal{D}'_{(1,1)}(\Omega)$ *jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy macierz* $(T_{jk})$ *jest dodatnio określona (tzn. dla* $w \in \mathbb{C}^n$ *dystrybucja* $\sum_{j,k=1}^n w_j \overline{w}_k T_{jk}$ *jest dodatnia).*

*Dowód.* Niech $\alpha = i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_{n-1} \wedge \overline{\alpha}_{n-1}$, $\alpha_s = \sum_{t=1}^n a_{st} dz_t$, $a_{st} \in \mathbb{C}$. Dostaniemy $T \wedge \alpha = 2^n \sum_{j,k=1}^n M_j \overline{M}_k T_{jk} d\lambda$, gdzie $M_j = \det(a_{st})_{\substack{s=1,\ldots,n-1 \\ t=1,\ldots,n,\, t\neq j}}$. ∎

**Propozycja 2.5**. *Jeśli $T$ jest prądem dodatnim a* $\Psi \in \mathrm{C}_{(1,1)}(\Omega)$ *(czyli $\Psi$ jest $(1,1)-$formą o ciągłych współczynnikach), to* $T \wedge \Psi \geq 0$.

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że $T$ ma współczynniki ciągłe i weźmy $z_0 \in \Omega$. Dzięki propozycji 2.4, po ewentualnej zmianie współrzędnych, możemy założyć, że

$$\Psi(z_0) = \sum_{j=1}^n \Psi_j(z_0)\, i dz_j \wedge d\overline{z}_j, \quad \Psi_j(z_0) \geq 0.$$

Jeśli $\alpha \in \mathbb{C}_{(n-p-1,n-p-1)}$ jest główną formą dodatnią , to mamy

$$T(z_0) \wedge \Psi(z_0) \wedge \alpha = \sum_{j=1}^n \Psi_j(z_0)\, T(z_0) \wedge i dz_j \wedge d\overline{z}_j \wedge \alpha \geq 0,$$

czyli $T \wedge \Psi \geq 0$. Niech teraz $T$ będzie dowolne. Dla $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\delta > 0$ oraz $\beta \in \mathbb{C}_{(n-p,n-p)}$ - głównej formy dodatniej mamy $(\widetilde{T_\delta \wedge \beta})(\varphi) = (\widetilde{T \wedge \beta})(\varphi * \rho_\delta) \geq 0$, czyli $T_\delta \geq 0$. W efekcie

$$(T \widetilde{\wedge \Psi \wedge} \alpha)(\varphi) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} (T_\delta \widetilde{\wedge \Psi \wedge} \alpha)(\varphi) \geq 0. \blacksquare$$

**Lemat 2.6**. *Niech* $\{\alpha_j\}$ *będzie bazą w* $\mathbb{C}_{(n-p,n-p)}$ *złożoną z głównych form dodatnich i niech* $\beta := \sum_j \alpha_j$*. Wtedy istnieje stała dodatnia $C$ zależna tylko od $n$ i $\beta$ taka, że dla każdego dodatniego prądu* $T = \sum T_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J \in \mathcal{D}'_{(p,p)}(\Omega)$ *mamy*

$$|T_{IJ}| \leq C\, T \wedge \beta$$

*($|\mu|$ oznacza wariację miary zespolonej $\mu$).*

*Dowód.* Niech $\{\omega_{IJ}\}$ będzie bazą w $\mathbb{C}_{(n-p,n-p)}$ dualną do bazy $\{dz_I \wedge d\overline{z}_J\}$ w $\mathbb{C}_{(p,p)}$ i niech $\omega_{IJ} = \sum_j c^j_{IJ}\alpha_j$. Wtedy

$$|T_{IJ}| = |T \wedge \omega_{IJ}| = \left|\sum_j c^j_{IJ} T \wedge \alpha_j\right| \leq \max_{j,I,J}\left|c^j_{IJ}\right| T \wedge \beta. \ \blacksquare$$

W następnych rozdziałach będziemy potrzebować również pewnych prostych własności macierzy:

**Lemat 2.7**. *Załóżmy, że $A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ jest macierzą kwadratową o współczynnikach zespolonych. Przez $\widehat{\ }$ oznaczmy naturalne zanurzenie $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ w $\mathrm{gl}(2n,\mathbb{R})$. Wtedy $\det\widehat{A} = |\det A|^2$.*

*Dowód.* Jeśli $A = M + iN$, gdzie $M, N \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, to

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} M & -N \\ N & M \end{pmatrix}.$$

Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są wszystkimi wartościami własnymi macierzy $A$, to łatwo pokażemy, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$ są wszystkimi wartościami własnymi macierzy $\widehat{A}$, co kończy dowód lematu. $\blacksquare$

**Lemat 2.8** ([Gav]). *Przez $\mathcal{A}$ oznaczmy rodzinę wszystkich macierzy hermitowskich $A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, dla których $\det A = 1$. Wtedy dla dowolnej macierzy hermitowskiej $B$ mamy*

$$(\det B)^{1/n} = \frac{1}{n}\inf_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{tr}(AB).$$

*Dowód.* Weźmy $A \in \mathcal{A}$. Znajdziemy wtedy macierz ortonormalną $P$ taką, że macierz $C := PABP^{-1}$ jest diagonalna. Wtedy z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostaniemy

$$(\det B)^{1/n} = (\det C)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}\, C = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB).$$

Trzeba jeszcze pokazać, że infimum jest realizowane. Łatwo zrobimy to w przypadku, gdy macierz $B$ jest diagonalna. Przypadek ogólny dostaniemy diagonalizując $B$. $\blacksquare$

**Wniosek 2.9** ([BT1]). *Odwzorowanie $B \mapsto (\det B)^{1/n}$ jest wklęsłe na zbiorze macierzy hermitowskich.*

*Dowód.* Z lematu 2.8 mamy

$$\begin{aligned}(\det(B_1 + B_2))^{1/n} &= \frac{1}{n} \inf_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{tr}(AB_1 + AB_2) \\ &\geq \frac{1}{n} \inf_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{tr}(AB_1) + \frac{1}{n} \inf_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{tr}(AB_2) = (\det B_1)^{1/n} + (\det B_2)^{1/n}.\end{aligned}$$

Wklęsłość wynika teraz z jednorodności rozpatrywanego odwzorowania. ■

# 3. Zespolony operator Monge'a-Ampère'a

W tym rozdziale podamy definicję oraz potrzebne nam później własności zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a dla funkcji psh ciągłych. Większość rezultatów będzie miała charakter czysto lokalny i wtedy nie będziemy precyzować na jakim obszarze w $\mathbb{C}^n$ funkcje te są określone. Podstawowym wynikiem jest następujące twierdzenie, będące w istocie definicją operatora Monge'a-Ampère'a:

**Twierdzenie 3.1** ([BT1]). *Dla każdej funkcji psh ciągłej $u$ istnieje dokładnie jedna dodatnia miara borelowska $Mu$ (określona tam gdzie $u$) o następujących własnościach:*

*i)* $Mu = \det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right)$, *gdy $u$ jest klasy $C^\infty$;*

*ii) Jeśli $\{u_j\}$ jest ciągiem funkcji psh ciągłych jednostajnie zbieżnych do $u$, to $Mu_j \longrightarrow Mu$ słabo.*

Operator $M$ konstruować będziemy przy pomocy operatorów różniczkowych $\partial$ i $\overline{\partial}$ (zob. np. [Hör1], str. 22-25). Mamy $d = \partial + \overline{\partial}$, połóżmy

$$d^c := i(\overline{\partial} - \partial).$$

Wtedy $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$ oraz, dzięki propozycji 2.4, $u$ jest psh wtedy i tylko wtedy, gdy $dd^c u \geq 0$. Ponadto dla gładkich $u$ mamy

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u = n! 4^n \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right).$$

**Propozycja 3.2** ([Dem]). *Dla funkcji psh ciągłej $u$ i prądu zamkniętego dodatniego $T$ zdefiniujmy*

$$dd^c u \wedge T := dd^c\,(uT)\,.$$

*Wtedy prąd $dd^c u \wedge T$ jest zamknięty i dodatni.*

*Dowód.* Wystarczy pokazać dodatniość. Niech $u_j := u * \rho_{1/j}$ będą regularyzacjami funkcji $u$. Wtedy $u_j T \longrightarrow uT$ słabo oraz $dd^c\,(u_j T) = dd^c u_j \wedge T$ w zwykłym sensie. Z propozycji 2.5 mamy $dd^c u_j \wedge T \geq 0$, a stąd $dd^c u \wedge T \geq 0$. ∎

Możemy zatem zdefiniować indukcyjnie

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_k \wedge T := dd^c\,(u_1 dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_k T)$$

gdzie $u_1, \ldots, u_k$ są funkcjami psh ciągłymi a $T$ prądem zamkniętym dodatnim; dostaniemy znowu prąd zamknięty dodatni.

**Propozycja 3.3**. *Jeśli $T$ jest prądem bistopnia $(p,p)$ zaś $\Psi$ formą klasy $\mathrm{C}^\infty$ bistopnia $(q,q)$ oraz $p+q+1=n$, to*

$$\Psi \wedge dd^cT - dd^c\Psi \wedge T = d\left(\Psi \wedge d^cT - d^c\Psi \wedge T\right).$$

*Dowód.* Mamy

$$d\left(\Psi \wedge d^cT - d^c\Psi \wedge T\right) = \Psi \wedge dd^cT - dd^c\Psi \wedge T + d\Psi \wedge d^cT + d^c\Psi \wedge dT$$

oraz

$$d\Psi \wedge d^cT = i\left(\partial\Psi \wedge \overline{\partial}T - \overline{\partial}\Psi \wedge \partial T\right) = -d^c\Psi \wedge dT. \ \blacksquare$$

Następny rezultat jest nazywany nierównością Cherna-Levine'a-Nirenberga:

**Twierdzenie 3.4** ([CLN]). *Jeśli $K \Subset \Omega \Subset \mathbb{C}^n$, to istnieje stała $C$, zależna tylko od $K$ i $\Omega$, taka, że dla każdego prądu zamkniętego dodatniego $T$ i dowolnych $u_1,\ldots,u_k \in \mathrm{PSH}\cap\mathrm{C}(\Omega)$ mamy*

$$||dd^cu_1 \wedge \ldots \wedge dd^cu_k \wedge T||_K \le C||u_1||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \ldots ||u_k||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}||T||_\Omega,$$

*gdzie jeśli $T = \sum_{I,J} T_{IJ}dz_I \wedge d\overline{z}_J$, to*

$$||T||_K = \sum_{I,J} |T_{IJ}|\,(K).$$

*Dowód.* Dzięki indukcji możemy założyć, że $k=1$, $u_1=u$. Niech $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ będzie takie, że $\varphi = 1$ na $K$, $\varphi \ge 0$ i niech $\beta$ będzie takie jak w lemacie 2.6, gdzie $(p,p)$ jest bistopniem prądu $dd^cu \wedge T$. Z lematu 2.6, propozycji 3.3 i twierdzenia 2.1 ($\Psi := \varphi\beta$; wtedy $dd^c\Psi = dd^c\varphi \wedge \beta$, bo $d\beta = 0$) mamy

$$\begin{aligned} ||dd^cu \wedge T||_K \le C' \int_K dd^cu \wedge T \wedge \beta &\le C' \int_\Omega \varphi\, dd^cu \wedge T \wedge \beta \\ &= C' \int_\Omega uT \wedge dd^c\varphi \wedge \beta \le C||u||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}||T||_\Omega, \end{aligned}$$

gdzie $C$ jest równe stałej $C'$ pomnożonej przez maksimum modułów wszystkich współczynników formy $dd^c\varphi \wedge \beta$. $\blacksquare$

Następne twierdzenie można traktować jako uogólnienie nierówności Cherna-Levine'a-Nirenberga:

**Twierdzenie 3.5**. *Załóżmy, że $\Omega$ jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{C}^n$ i niech $h,u,v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ będą takie, że $u \le h$ na $\Omega$, $u = h$ na $\partial\Omega$ oraz $v \le 0$ na $\Omega$. Niech $T$ będzie prądem zamkniętym dodatnim bistopnia (n-1,n-1) na $\Omega$. Wtedy dla $t \ge 1$ mamy*

$$\int_\Omega (h-u)^t dd^cv \wedge T \le t \int_\Omega |v|(h-u)^{t-1} dd^cu \wedge T.$$

**Wniosek 3.6** ([Bło1]). *Niech* $\Omega$, $u$ *i* $h$ *będą takie jak w twierdzeniu 3.5. Wtedy dla* $v_j \in \mathrm{PSH} \cap \mathrm{C}(\Omega)$, $v_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$, *mamy*

$$\int_\Omega (h-u)^n dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_n \leq n! \, ||v_1||_\Omega \ldots ||v_{n-1}||_\Omega \int_\Omega |v_n| \left(dd^c u\right)^n . \blacksquare$$

*Dowód twierdzenia 3.5.* Zamiana $h$ na $h_\varepsilon := \max\{u, h-\varepsilon\}$ i skorzystanie z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej redukuje dowód twierdzenia do przypadku, gdy $h = u$ na otoczeniu $\partial\Omega$. Niech teraz $h_\delta := h * \rho_\delta$, $u_\delta := u * \rho_\delta$. Z lokalnie jednostajnej zbieżności regularyzacji, ze słabej zbieżności $dd^c u_\delta \wedge T \longrightarrow dd^c \wedge T$ oraz z nierówności Cherna-Levine'a-Nirenberga dostaniemy słabą zbieżność

$$|v|(h_\delta - u_\delta)^t dd^c u_\delta \wedge T \longrightarrow |v|(h-u)^t dd^c u \wedge T.$$

Wystarczy więc udowodnić twierdzenie 3.5 w przypadku, gdy $h$ i $u$ są gładkie oraz $h = u$ na otoczeniu $\partial\Omega$. Z twierdzenia Stokes'a mamy

$$\int_\Omega (h-u)^t dd^c v \wedge T = \int_\Omega v dd^c (h-u)^t \wedge T.$$

Na mocy propozycji 2.5, by zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że

$$-dd^c(h-u)^t \leq t(h-u)^{t-1} dd^c u. \tag{3.1}$$

Mamy

$$dd^c(h-u)^t = t(t-1)(h-u)^{t-2} d(h-u) \wedge d^c(h-u) + t(h-u)^{t-1} dd^c(h-u)$$

oraz $d(h-u) \wedge d^c(h-u) = i\partial(h-u) \wedge \overline{\partial}(h-u) \geq 0$ i $dd^c h \geq 0$, co dowodzi nierówności (3.1). $\blacksquare$

Mając do dyspozycji operator $(dd^c)^n$ oraz nierówność Cherna-Levine'a-Nirenberga możemy łatwo udowodnić twierdzenie 3.1:

*Dowód twierdzenia 3.1.* Definiujemy oczywiście

$$Mu := \left(n! 4^n\right)^{-1} \left(dd^c u\right)^n .$$

Własność i) oraz jednoznaczność $Mu$ są oczywiste. Wystarczy pokazać ii). Niech $u_j \longrightarrow u$ jednostajnie i oznaczmy $T_j^k := (dd^c u_j)^k$, $T^k := (dd^c u)^k$, $k = 1, \ldots, n$. Udowodnimy indukcyjnie, że $T_j^k \longrightarrow T^k$ słabo. Wystarczy pokazać, że z tego, iż $T_j^k \longrightarrow T^k$ słabo wynika, że $u_j T_j^k \longrightarrow u T^k$ słabo. Mamy

$$u_j T_j^k - u T^k = u_j (T_j^k - T^k) + (u_j - u) T^k$$

i wystarczy skorzystać z nierówności Cherna-Levine'a-Nirenberga. ∎

Ważną własnością zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a jest jego dobre zachowanie się przy holomorficznej zmianie zmiennych:

**Propozycja 3.7**. *Niech $\Omega_1$ i $\Omega_2$ będą zbiorami otwartymi w $\mathbb{C}^n$ i niech $H : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o niezerującym się jakobianie. Wtedy dla $u \in \mathrm{PSH} \cap \mathrm{C}(\Omega_2)$ mamy*

$$M(u \circ H) = |\mathrm{Jac}H|^2 H^* Mu,$$

*gdzie $H^*Mu$ jest obrazem wstecznym (ang. pullback) miary $Mu$ (gdy $Mu \in \mathrm{C}(\Omega)$, to $H^*Mu = Mu \circ H$; zob. [Hör2], Theorem 6.1.2).*

*Dowód.* $H^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ jest odwzorowaniem liniowym ciągłym, a ponieważ problem jest czysto lokalny, to możemy założyć, że $u$ jest klasy $\mathrm{C}^\infty$. Wtedy mamy równość macierzy:

$$\left(\frac{\partial^2(u \circ H)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right) = A^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_l \partial \overline{z}_m} \circ H\right) \overline{A},$$

gdzie $A = (\partial H_p / \partial z_q)$, co kończy dowód propozycji. ∎

Dla funkcji klasy $\mathrm{C}^\infty$ mamy

$$Mu = \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right). \tag{3.2}$$

Prawa strona (3.2) jest dobrze określona również dla funkcji klasy $\mathrm{C}^2$ a nawet funkcji klasy $\mathrm{C}^{1,1}$, tj. funkcji klasy $\mathrm{C}^1$, których pochodne cząstkowe są lokalnie lipschitzowskie. Wynika to z twierdzenia Rademachera (zob. np. [Łoj]), które mówi, że funkcja lipschitzowska jest różniczkowalna prawie wszędzie względem miary Lebesgue'a. Funkcje klasy $\mathrm{C}^{1,1}$ można identyfikować z dystrybucjami, których pochodne cząstkowe drugiego rzędu są lokalnie ograniczone. (Istotnie, z twierdzenia Sobolewa, zob. np. [Hör2], Theorem 4.5.12, wynika w szczególności, że takie dystrybucje są klasy $\mathrm{C}^1$. To, że są klasy $\mathrm{C}^{1,1}$ można teraz łatwo wywnioskować z oszacowania

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq ||\nabla\varphi||\,|x-y|, \quad \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m),\ x, y \in \mathbb{R}^m.)$$

**Propozycja 3.8**. *Równość (3.2) pozostaje prawdziwa dla funkcji psh klasy $\mathrm{C}^{1,1}$. Co więcej, jeśli $u_\delta := u * \rho_\delta$ jest regularyzacją takiej funkcji $u$, to $Mu_\delta \longrightarrow Mu$ lokalnie w normie $\mathrm{L}^p$ dla każdego $p < \infty$.*

*Dowód.* Wystarczy pokazać drugą część propozycji. Zauważmy najpierw, że pochodne cząstkowe $\partial^2 u / \partial z_j \partial \overline{z}_k$, dobrze zdefiniowane "punktowo" dzięki twierdzeniu Rademachera jako funkcje lokalnie ograniczone, pokrywają się z pochodnymi dystrybucyjnymi (wynika to stąd, że funkcje bezwzględnie ciągłe, a więc także lipschitzowskie, jednej zmiennej możemy całkować przez części, zob. [Łoj], Tw. 6, str. 174). Dla $p < \infty$ mamy zbieżność w $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}$

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} * \rho_\delta \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}.$$

W celu zakończenia dowodu wystarczy zaobserwować, że jeśli dwa ciągi funkcji $\{f_j\}$ i $\{g_j\}$ są lokalnie jednostajnie ograniczone oraz zbieżne w $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}$ do, odpowiednio, $f$ i $g$, to $f_j g_j \longrightarrow fg$ w $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}$. Istotnie, wystarczy zapisać

$$f_j g_j - fg = f_j(g_j - g) + g(f_j - f). \blacksquare$$

Następne twierdzenie nazywane jest często *zasadą porównawczą*:

**Twierdzenie 3.9** ([BT1]). *Jeśli $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$, $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ są takie, że $u \leq v$ na $\partial\Omega$ oraz $Mu \geq Mv$, to $u \leq v$ w $\Omega$.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że zbiór $\{u < v\}$ jest niepusty. Niech $C$ będzie takie, że $\psi(z) := |z|^2 - C \leq 0$ na $\Omega$; wtedy dla pewnego $\varepsilon > 0$ zbiór $S := \{u + \varepsilon\psi > v\}$ jest także niepusty. Dla $\delta > 0$ niech $v_\delta := \max\{u+\varepsilon\psi, v+\delta\}$. Wtedy $v_\delta \downarrow u+\varepsilon\psi$ na $S$, gdy $\delta \downarrow 0$, oraz $v_\delta = v+\delta$ na otoczeniu $\partial S$. Z twierdzenia Stokes'a oraz ze słabej zbieżności $Mv_\delta \longrightarrow M(u + \varepsilon\psi)$ mamy

$$Mv(S) = \liminf_{\delta \longrightarrow 0} Mv_\delta(S) \geq M(u + \varepsilon\psi)(S) \geq Mu(S) + \varepsilon^n > Mu(S)$$

- sprzeczność (operator $M$ jest superaddytywny - wynika to łatwo np. z wniosku 2.9). $\blacksquare$

**Twierdzenie 3.10** ([BT1]). *Jeśli funkcje $u$ i $v$ są psh i ciągłe, to*

$$M \max\{u, v\} \geq 1_{\{u>v\}} Mu + 1_{\{u \leq v\}} Mv,$$

*gdzie $1_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A$.*

*Dowód.* Wystarczy pokazać, że dla zwartych $K \subset \{u = v\}$ mamy $M \max\{u, v\}(K) \geq Mu(K)$. Dla $\delta > 0$ niech $u_\delta := \max\{u + \delta, v\}$; wtedy $u_\delta = u + \delta$ na otoczeniu $K$ oraz $u_\delta \downarrow \max\{u, v\}$. Ze słabej zbieżności $Mu_\delta \longrightarrow M \max\{u, v\}$ mamy więc

$$Mu(K) = \limsup_{\delta \longrightarrow 0} Mu_\delta(K) \leq M \max\{u, v\}(K). \blacksquare$$

# 4. Problem Dirichleta w obszarach B-regularnych

Celem tego rozdziału jest przedstawienie dowodu następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 4.1** ([BT1]). *Załóżmy, że* $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ *jest obszarem B-regularnym. Niech* $f \in \mathrm{C}\,(\partial\Omega)$, $F \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, $F \geq 0$. *Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie* $u = u_\Omega(f, F)$ *następującego problemu Dirichleta:*

$$\begin{cases} u \in \mathrm{PSH}\,(\Omega) \cap \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right) \\ Mu = F \text{ na } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases} \tag{4.1}$$

W rozdziale 6. uogólnimy powyższe twierdzenie na klasę obszarów hiperwypukłych.

*Dowód twierdzenia 4.1.* Jednoznaczność wynika z zasady porównawczej. Co więcej, rozwiązanie, jeśli istnieje, to musi być postaci $u = \sup \mathcal{B}$, gdzie

$$\mathcal{B} = \{v \in \mathrm{PSH}\,(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = f,\ Mv \geq F\}.$$

(elementy rodziny $\mathcal{B}$ nazywamy *podrozwiązaniami* problemu (4.1)). Niech $\psi$ będzie takie jak w twierdzeniu 1.8. Rodzina $\mathcal{B}$ jest niepusta, bo jeśli $v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, $v|_{\partial\Omega} = f$, to $M(v + A\psi) \geq Mv + A^n M\psi \geq A^n \geq F$ dla $A$ odpowiednio dużego. Na mocy twierdzenia 3.10 rodzina $\mathcal{B}$ ma własność kraty:

$$v_1, v_2 \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \max\{v_1, v_2\} \in \mathcal{B}. \tag{4.2}$$

Twierdzenie będzie dowodzone w kilku etapach.

*I. Możemy założyć, że* $F \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie 4.1 dla gładkich $F$. Jeśli teraz $F$ będzie dowolną funkcją nieujemną i ciągłą na $\overline{\Omega}$, to znajdziemy ciąg gładkich funkcji $\{F_j\}$ taki, że $F_j \downarrow F$. Istnieją zatem rozwiązania $u_j := u_\Omega(f, F_j)$ i z zasady porównawczej dostaniemy

$$u_j + \|F_j - F_k\|_{\Omega}^{1/n} \psi \leq u_k,$$

a stąd

$$\|u_j - u_k\|_{\overline{\Omega}} \leq \|\psi\|_{\overline{\Omega}} \|F_j - F_k\|_{\Omega}^{1/n}.$$

Funkcje $u_j$ są zatem jednostajnie zbieżne na $\overline{\Omega}$. Można teraz łatwo pokazać, że $u := \lim u_j$ jest szukanym rozwiązaniem.

*II. Jeśli funkcja $F$ jest jednostajnie ciągła na $\overline{\Omega}$, to $u := \sup\mathcal{B} \in \mathcal{B}$.*

Wybierzmy $v_0 \in \mathcal{B}$ i niech $h$ będzie funkcją harmoniczną na $\Omega$, ciągłą na $\overline{\Omega}$ i taką, że $h|_{\partial\Omega} = f$. Mamy $v_o \le u \le h$, zatem w szczególności $u_* = u^* = f$ na $\partial\Omega$.

Z definicji funkcja $u$ jest półciągła z dołu. Chcemy pokazać, że jest ona również półciągła z góry. Rozumowanie będzie podobne jak w dowodzie twierdzenia 1.6. Ustalmy $z_0 \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Znajdziemy $0 < \delta < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ takie, że

$$z \in \overline{\Omega},\ w \in \partial\Omega,\ |z-w| \le 2\delta \quad\Rightarrow\quad |v_0(z) - f(w)| < \varepsilon,\ |h(z) - f(w)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

(dzięki zwartości $\partial\Omega$) oraz

$$|\tau| \le \delta,\ z \in \overline{\Omega},\ z+\tau \in \overline{\Omega} \quad\Rightarrow\quad |F(z+\tau) - F(z)| \le (\varepsilon/\|\psi\|_\Omega)^n \tag{4.4}$$

(dzięki jednostajnej ciągłości $F$). Ustalmy $\widetilde{z} \in B(z_0, \delta)$. Znajdziemy wtedy $v \in \mathcal{B}$ takie, że $u(\widetilde{z}) \le v(\widetilde{z}) + \varepsilon$. Z (4.2) wynika, że możemy wziąć $v \ge v_0$, a stąd i z (4.3) mamy

$$z \in \overline{\Omega},\ w \in \partial\Omega,\ |z-w| \le 2\delta \quad\Rightarrow\quad |v(z) - v(w)| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Zdefiniujmy

$$\widehat{v}(z) := \begin{cases} \max\{v(z), v(z+\widetilde{z}-z_0) - 2\varepsilon\} & \text{gdy } z+\widetilde{z}-z_0 \in \overline{\Omega}, \\ v(z) & \text{gdy } z+\widetilde{z}-z_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Gdy $z+\widetilde{z}-z_0 \in \partial\Omega$, to z (4.5) mamy $v(z+\widetilde{z}-z_0) \le v(z)+\varepsilon$, więc $\widehat{v} \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Z (4.5) wynika również, że $\widehat{v} = v$ na pewnym otoczeniu $\partial\Omega$. Dzięki (4.4) i twierdzeniu 3.10 mamy $M\widehat{v} \ge F - (\varepsilon/\|\psi\|_\Omega)^n$, a stąd wynika, że $\widehat{v} + \varepsilon\psi/\|\psi\|_\Omega \in \mathcal{B}$. Mamy więc $u(z_0) \ge \widehat{v}(z_0) - \varepsilon \ge v(\widetilde{z}) - 3\varepsilon \ge u(\widetilde{z}) - 4\varepsilon$, czyli funkcja $u$ jest półciągła z dołu. Pokazaliśmy więc, że $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = f$.

Z lematu Choquet'a (zob. np. [Doo]) wynika, że istnieje ciąg $\{v_j\} \subset \mathcal{B}$ taki, że $u = \sup v_j$. Dla $u_j := \max\{v_1, \dots, v_j\} \in \mathcal{B}$ mamy wtedy $u_j \uparrow u$. Zbieżność jest jednostajna, zatem $Mu \ge F$ i w efekcie $u \in \mathcal{B}$.

*III. Możemy założyć, że $\Omega$ jest kulą jednostkową $B$ oraz $f \in \mathrm{C}^\infty(\partial B)$.*

Do udowodnienia twierdzenia 4.1 pozostało pokazanie, że jeśli $F \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$, to $Mu = F$. Załóżmy najpierw, że zrobiliśmy to w przypadku, gdy $\Omega$ jest kulą. Niech teraz $\Omega$ będzie dowolne. Ustalmy $\widetilde{B} = B(z_0, r) \Subset \Omega$ i niech $\widetilde{u} := u_{\widetilde{B}}(f|_{\partial\widetilde{B}}, F|_{\widetilde{B}})$. Z zasady porównawczej $\widetilde{u} \ge u$ na $\widetilde{B}$ oraz $\widetilde{u} = u$ na $\partial\widetilde{B}$. Z twierdzenia 3.10 wynika, że funkcja

$$v := \begin{cases} \widetilde{u} & \text{na } \widetilde{B} \\ u & \text{na } \overline{\Omega} \setminus \widetilde{B} \end{cases}$$

jest elementem rodziny $\mathcal{B}$ (bo $v = \max\{u, v\}$). W efekcie $\widetilde{u} = u$ na $B$, więc $Mu = F$ na $\widetilde{B}$. Możemy zatem założyć, że $\Omega = B$.

Załóżmy z kolei, że twierdzenie 4.1 jest prawdziwe, gdy $f \in \mathrm{C}^\infty(\partial B)$. Jeśli teraz $f \in \mathrm{C}(\partial B)$, to znajdziemy ciąg $\{f_j\} \subset \mathrm{C}^\infty(\partial B)$ taki, że $f_j \downarrow f$ na $\partial B$ oraz rozwiązania $u_j := u_B(f_j, F)$. Z zasady porównawczej łatwo pokażemy, że ciąg $\{u_j\}$ jest jednostajnie zbieżny na $\overline{\Omega}$ i stąd otrzymamy rozwiązanie $u_B(f, F) = \lim u_j$.

*IV. Jeśli $f \in \mathrm{C}^2(\partial B)$ oraz $F \in \mathrm{C}^2(\overline{B})$, to $u \in \mathrm{C}^{1,1}(B)$.*

Dla $a \in B$ połóżmy

$$T_a(z) := \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle},$$

gdzie $P_a(z) = \frac{\langle z,a\rangle}{|a|^2} a$ jest rzutem punktu $z$ na prostą $\mathbb{C}a$, $Q_a(z) = z - P_a(z)$, $s_a = \sqrt{(1-|a|^2)}$ $(T_0(z) = -z)$. Wtedy $T_a$ jest biholomorfizmem $B$, ${T_a}^{-1} = T_a$ oraz $T_a(0) = a$ (zob. [Rud]).

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i zdefiniujmy

$$L(a, h, z) := T_{a+h}^{-1}\left(T_a\left(z\right)\right) = T_{a+h}\left(T_a\left(z\right)\right).$$

Wtedy $L \in \mathrm{C}^\infty\left(\overline{B^{1-\varepsilon}} \times B^\varepsilon \times \overline{B}\right)$ $(B^R = B\left(0, R\right))$, bo możemy wyliczyć, że

$$T_a(z) = \frac{a - s_a z + \frac{\langle z,a\rangle}{s_a+1} a}{1 - \langle z, a\rangle}.$$

Jeśli oznaczymy

$$V(a, h, z) := \frac{1}{2}\left[u\left(L\left(a, h, z\right)\right) + u\left(L\left(a, -h, z\right)\right)\right],$$

to $V \in \mathrm{C}^2\left(\overline{B^{1-\varepsilon}} \times B^\varepsilon \times \partial B\right)$ oraz

$$V(a, 0, z) = u(z), \tag{4.6}$$

$$V(z, h, z) = \frac{1}{2}\left[u(z+h) + u(z-h)\right]. \tag{4.7}$$

Chcemy najpierw pokazać, że istnieją stałe dodatnie $K_1$ i $K_2$, zależne tylko od $u$ i $\varepsilon$, takie, że dla $(a, h) \in \overline{B^{1-\varepsilon}} \times \overline{B^{\varepsilon/2}}$ funkcja

$$v(z) := V(a, h, z) - K_1|h|^2 + K_2(|z|^2 - 1)|h|^2$$

należy do $\mathcal{B}$. Dla $a \in \overline{B^{1-\varepsilon}}$ i $z \in \partial B$ mamy $\partial V/\partial h(a, 0, z) = 0$, więc ze wzoru Taylora z resztą Lagrange'a

$$V(a, h, z) = V(a, 0, z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h^2}(a, \widetilde{h}, z).\, h^2$$

dla pewnego $|\widetilde{h}| \leq |h|$. Dzięki (4.6) wystarczy zatem wziąć

$$K_1 := \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} \right\|_{\overline{B^{1-\varepsilon}} \times \overline{B^{\varepsilon/2}} \times \partial B},$$

żeby dostać $v|_{\partial B} \leq f$. Z kolei dzięki propozycji 3.7

$$Mv \geq \frac{1}{2} \left[ F(L(a,h,z)) |\mathrm{Jac}_z L(a,h,z)|^2 + F(L(a,-h,z)) |\mathrm{Jac}_z L(a,-h,z)|^2 \right] + K_2 |h|^2.$$

Jeśli teraz ponownie skorzystamy ze wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, to stała

$$K_2 := \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 \left( F(L(a,h,z)) |\mathrm{Jac}_z L(a,h,z)|^2 \right)}{\partial h^2} \right\|_{\overline{B^{1-\varepsilon}} \times \overline{B^{\varepsilon/2}} \times \partial B}$$

da nam $v \in \mathcal{B}$. Gdy $a = z$, to z (4.7) otrzymamy oszacowanie

$$u(z+h) + u(z-h) - 2u(z) \leq K|h|^2, \qquad |z| \leq 1-\varepsilon, \ |h| \leq \varepsilon/2, \tag{4.8}$$

gdzie stała $K := K_1 + K_2$ zależy tylko od $\varepsilon$, $f$ i $F$.

Pokażemy teraz, że dowolna funkcja psh na $B$ spełniająca oszacowanie (4.8) jest klasy $\mathrm{C}^{1,1}$. Jeśli $u_\delta := u * \rho_\delta$, to z (4.8) dla $\delta < \varepsilon/2$ mamy

$$u_\delta(z+h) + u_\delta(z-h) - 2u_\delta(z) \leq K|h|^2, \qquad |z| \leq 1-2\varepsilon, \ |h| \leq \varepsilon/2,$$

stąd zaś $u_\delta''(z).h^2 \leq K|h|^2$. Funkcje $u_\delta$ są psh, więc

$$u_\delta''(z).h^2 + u_\delta''(z).(ih)^2 = 4 \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\, h_j \overline{h}_k \geq 0.$$

Mamy zatem

$$u_\delta''(z).h^2 \geq -u_\delta''(z).(ih)^2 \geq -K|h|^2,$$

więc $|u_\delta''(z)| \leq K$. Z twierdzenia Banacha-Alouglu i ze słabej zbieżności ciągu $\{u_\delta''\}$ do $u''$ dostaniemy lokalną ograniczoność pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji $u$, czyli $u$ jest klasy $\mathrm{C}^{1,1}$.

*V. $Mu = F$, gdy $u \in \mathrm{C}^{1,1}$.*

Z punktu III mamy $Mu \geq F$. Z propozycji 3.8 wynika, że wystarczy pokazać, że

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right) = F \tag{4.9}$$

tam gdzie funkcja $u$ jest dwukrotnie różniczkowalna. Przypuśćmy, że dla pewnego $z_0$ mamy silną nierówność ">" w (4.9). Możemy założyć, że macierz $(\partial^2 u/\partial z_j \partial \overline{z}_k(z_0))$ ma postać diagonalną $(\lambda_j \delta_{jk})$, $\lambda_j > 0$. Niech $0 < \widetilde{\lambda}_j < \lambda_j$ będą takie, że $\widetilde{\lambda}_1 \ldots \widetilde{\lambda}_n > F(z_0)$. Z rozwinięcia Taylora mamy

$$u(z_0 + h) = Re\, P(h) + \lambda_1 |h_1|^2 + \cdots + \lambda_n |h_n|^2 + o\left(|h|^2\right),$$

gdzie

$$P(h) = u(z_0) + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}(z_0) h_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k}(z_0) h_j h_k.$$

Istnieją zatem $r > 0$ i $\varepsilon > 0$ takie, że $F(z_0 + h) < \widetilde{\lambda}_1 \ldots \widetilde{\lambda}_n$, gdy $|h| \leq r$, oraz

$$Q(h) := Re\, P(h) + \widetilde{\lambda}_1 |h_1|^2 + \cdots + \widetilde{\lambda}_n |h_n|^2 + \varepsilon < u(z_0 + h),$$

gdy $|h| = r$. Wtedy funkcja

$$v(z) := \begin{cases} \max\{u(z), Q(z - z_0)\} & \text{dla } z \in B(z_0, r), \\ u(z) & \text{dla } z \notin B(z_0, r) \end{cases}$$

należy do $\mathcal{B}$, więc $v \leq u$. Mamy jednak $v(z_0) \geq Re\, P(0) + \varepsilon = u(z_0) + \varepsilon$ - sprzeczność.

Dowód twierdzenia 4.1 został zakończony. ∎

Przy okazji w punkcie IV dowodu twierdzenia 4.1 udowodniliśmy następujące:

**Twierdzenie 4.2**. *Jeśli $B$ jest kulą jednostkową w $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathrm{C}^2(\partial B)$ oraz $F \in \mathrm{C}^2(\overline{B})$, to $u_B(f, F) \in \mathrm{C}^{1,1}(B)$.* ∎

## 5. Stabilność operatora Monge'a-Ampère'a

*Definicja.* Niech $p, q \in (0, \infty]$. Powiemy, że operator Monge'a-Ampère'a jest $(p, q)$-*stabilny*, jeżeli istnieje stała $C$, zależna tylko od $p$, $q$ i $n$, taka, że

$$\|u_B(0, F)\|_{\mathrm{L}^p(B)} \leq C\|F\|_{\mathrm{L}^q(B)}^{1/n}, \quad F \in \mathrm{C}(\overline{B}),\ F \geq 0. \tag{5.1}$$

Z nierówności Höldera wynika, że $(p_0, q_0)$-stabilność implikuje $(p, q)$-stabilność dla $p \leq p_0$ i $q \geq q_0$. Z zasady porównawczej dla $F \in \mathrm{C}(\overline{B})$, $F \geq 0$, mamy

$$\|F\|_{\overline{B}}^{1/n}(|z|^2 - 1) \leq u_B(0, F)(z), \quad z \in B,$$

skąd wynika, że operator Monge'a-Ampère'a jest $(\infty, \infty)$-stabilny. To zaś oznacza, że jest on $(p, \infty)$-stabilny dla każdego $p > 0$. Pokażemy teraz kiedy operator Monge'a-Ampère'a nie jest $(p, q)$-stabilny:

*Przykład.* Niech $u$ będzie funkcją psh gładką na $\mathbb{C}^n$ taką, że $u(z) = \log|z|$, gdy $|z| \geq 1$. Zdefiniujmy $u_j(z) := u(jz) - \log j$. Wtedy $u_j(z) = \log|z|$, gdy $|z| \geq 1/j$, $u_j \downarrow \log|z|$, gdy $j \uparrow \infty$, oraz $Mu_j(z) = j^{2n}Mu(jz)$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej mamy zatem $\|u_j\|_{\mathrm{L}^p(B)} \longrightarrow \|\log|z|\|_{\mathrm{L}^p(B)}$ oraz, ponieważ $Mu_j(z) = M(\log|z|) = 0$, gdy $|z| \geq 1/j$, mamy $\|Mu_j\|_{\mathrm{L}^q(B)} = j^{2n(1-1/q)}\|Mu\|_{\mathrm{L}^q(B)}$. Pokazuje to, że operator Monge'a-Ampère'a nie jest $(p, q)$-stabilny, gdy albo $q < 1$ albo $p = \infty$ i $q = 1$.

$(p, q)$-stabilność oznacza, że $\mathrm{L}^p$-normę odpowiednio regularnej funkcji psh na kuli jednostkowej, zerującej się na brzegu, możemy oszacować przez $\mathrm{L}^q$-normę gęstości miary Monge'a-Ampère'a tej funkcji. Okazuje się, że rozpatrywanie tylko kuli i funkcji psh nie jest istotnym ograniczeniem:

**Twierdzenie 5.1**. *Niech $\Omega$ będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$ zawartym w pewnej kuli o promieniu $R$. Załóżmy, że operator Monge'a-Ampère'a jest $(p, q)$-stabilny. Wtedy*

*i) Dla $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ takich, że $u = v$ na $\partial\Omega$ oraz $Mu, Mv \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ mamy*

$$\|u - v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C_R\|Mu - Mv\|_{\mathrm{L}^q(\overline{\Omega})}^{1/n},$$

*gdzie*

$$C_R = C\,R^{2\left(\frac{n}{p} + \frac{q-1}{q}\right)}.$$

*ii) Dla $\varphi \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ takich, że $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ mamy*

$$\|\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq 2C_R\|M\varphi\|_{\mathrm{L}^q(\overline{\Omega})}^{1/n}.$$

*Dowód.* Możemy założyć, że $R=1$ oraz $\Omega\subset B$ (wykładnik przy $R$ dostaniemy stosując liniową transformację $z\mapsto Rz$). W celu udowodnienia i) wybierzmy $F_j\in \mathrm{C}(\overline{B})$ takie, że $F_j|_{\overline{\Omega}}=|Mu-Mv|$ oraz $F_j\downarrow 0$ na $\overline{B}\setminus\overline{\Omega}$. Jeśli położymy $u_j:=u_B(0,F_j)$, to z zasady porównawczej $|u-v|\le -u_j$ na $\Omega$. Zatem z $(p,q)$-stabilności

$$\|u-v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\le\|u_j\|_{\mathrm{L}^p(B)}\le C\|F_j\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B)}\longrightarrow C_R\|Mu-Mv\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(\overline{\Omega})}.$$

Dla dowodu ii) przez $\Gamma_\varphi$ oznaczmy maksymalny zbiór otwarty, na którym $\varphi$ jest ściśle psh. Będzie nam potrzebna następująca wersja zasady porównawczej:

**Twierdzenie 5.2**. *Niech $\Omega$ i $u$ będą takie jak w twierdzeniu 3.9. Załóżmy, że $v\in \mathrm{C}^2(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, $u\le v$ na $\partial\Omega$ oraz $Mu\ge Mv$ na $\Gamma_v$. Wtedy $u\le v$ na $\Omega$.*

*Dowód.* Będziemy się wzorować na dowodzie Lemma 5.2 w [RT]. Niech $C$ będzie takie, że $\psi(z):=|z|^2-C\le 0$ na $\Omega$. Przypuśćmy, że zbiór $\{u>v\}$ jest niepusty, wtedy również $S:=\{u+\varepsilon\psi>v\}\ne\emptyset$ dla pewnego $\varepsilon>0$. Przez $a$ oznaczmy maksimum funkcji $u+\varepsilon\psi-v$ zaś przez $W$ zbiór, na którym jest ono realizowane. $W$ jest zbiorem zwartym, zawartym w $S$.

Przypuśćmy, że $W\subset\Gamma_v$. Wtedy dla pewnego $a'<a$ mielibyśmy $u+\varepsilon\psi-v\le a'$ na $\partial\Gamma_v$ i z klasycznej zasady porównawczej dostalibyśmy sprzeczność. Możemy zatem założyć, że istnieje $z_0\in W\setminus\Gamma_v$. Wtedy macierz $(\partial^2 v/\partial z_j\partial\overline{z}_k(z_0))$ nie jest dodatnio określona, czyli dla pewnego $\alpha\in\mathbb{C}^n$

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}v(z_0+\zeta\alpha)(0)\le 0.$$

Mamy więc

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}(u+\varepsilon\psi-v)(z_0+\zeta\alpha)(0)>0$$

co przeczy temu, że $u+\varepsilon\psi-v$ ma maksimum w $z_0$. ∎

*Uwaga.* Twierdzenie 5.2 nie jest prawdziwe, jeśli o funkcji $v$ założymy tylko, że jest ciągła na $\overline{\Omega}$. Kontrprzykład można łatwo skonstruować nawet w przypadku, gdy $n=1$.

*Koniec dowodu twierdzenia 5.1.* Podobnie jak poprzednio znajdziemy $G_j^+,G_j^-\in\mathrm{C}(\overline{B})$ takie, że $G_j^\pm=M(\pm\varphi)$ w $\overline{\Gamma}_{\pm\varphi}$ oraz $G_j^\pm\downarrow 0$ na $\overline{B}\setminus\overline{\Gamma}_{\pm\varphi}$. Jeśli teraz $u_j^\pm:=u_B(0,G_j^\pm)$, to z twierdzenia 5.2 dostaniemy $u_j^+\le\varphi\le -u_j^-$. W efekcie

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}&\le\|u_j^+\|_{\mathrm{L}^p(B)}+\|u_j^-\|_{\mathrm{L}^p(B)}\le C\left(\|G_j^+\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B)}+\|G_j^-\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B)}\right)\\&\longrightarrow C\left(\|M\varphi\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(\overline{\Gamma}_\varphi)}+\|M\varphi\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(\overline{\Gamma}_{-\varphi})}\right)\le 2C\|M\varphi\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(\overline{\Omega})}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Z drugiej strony następne twierdzenie pokazuje, że stabilność wystarczy weryfikować dla gładkich funkcji psh:

**Twierdzenie 5.3**. *Załóżmy, że dla pewnych $p$, $q$, $C$ i $\widetilde{C}$ mamy oszacowanie*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(B)} \le \widetilde{C}\|u\|_{\partial B} + C\|Mu\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B)}, \quad u \in \mathrm{PSH}(B) \cap \mathrm{C}^\infty(\overline{B}),\ u \le 0. \tag{5.2}$$

*Wtedy operator Monge'a-Ampère'a jest $(p, q)$-stabilny.*

*Dowód.* Ponieważ oszacowanie (5.2) nie zachodzi dla $q < 1$ oraz operator Monge'a-Ampère'a jest $(p, \infty)$-stabilny dla każdego $p > 0$, to możemy założyć, że $1 \le q < \infty$.

W celu pokazania (5.1) weźmy najpierw $F \in \mathrm{C}^2(\overline{B})$, $F \ge 0$. Dzięki twierdzeniu 4.2 funkcja $u := u_B(0, F)$ jest klasy $\mathrm{C}^{1,1}$ w $B$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $u_\delta := u * \rho_\delta \in \mathrm{PSH} \cap \mathrm{C}^\infty(B_\delta)$ $(B_\delta = B(0, 1 - \delta))$ będą regularyzacjami funkcji $u$. Niech $\widetilde{\delta} > 0$ będzie takie, że $\|u\|_{B\setminus B_{\widetilde{\delta}}} \le \varepsilon$. Wtedy

$$\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(B)} \le \|u\|^p_{\mathrm{L}^p(B_{\widetilde{\delta}})} + \varepsilon^p\lambda(B) = \lim_{\delta\longrightarrow 0} \|u_\delta\|^p_{\mathrm{L}^p(B_{\widetilde{\delta}})} + \varepsilon^p\lambda(B). \tag{5.3}$$

Z założenia oraz propozycji 3.8 mamy

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} \|u_\delta\|_{\mathrm{L}^p(B_{\widetilde{\delta}})} \le \lim_{\delta\longrightarrow 0} \left(\widetilde{C}\varepsilon + C\|Mu_\delta\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B_{\widetilde{\delta}})}\right) = \widetilde{C}\varepsilon + C\|F\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B_{\widetilde{\delta}})}. \tag{5.4}$$

Z (5.3) i (5.4)

$$\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(B)} \le \left(\widetilde{C}\varepsilon + C\|Mu\|^{1/n}_{\mathrm{L}^q(B)}\right)^p + \varepsilon^p\lambda(B),$$

więc dzięki dowolności $\varepsilon$ mamy (5.1) dla $F \in \mathrm{C}^2(\overline{B})$.

Niech teraz $F$ będzie dowolne i niech $F_j$ będzie ciągiem funkcji klasy $\mathrm{C}^2$ na $\overline{B}$ malejącym do $F$. Dzięki zasadzie porównawczej mamy $u + \|F - F_j\|^{1/n}_{\overline{B}}(|z|^2 - 1) \le u_j \le u_{j+1} \le u$, gdzie $u = u_B(0, F)$, $u_j = u_B(0, F_j)$, zatem $u_j \uparrow u$. W szczególności $\|u_j\|_{\mathrm{L}^p(B)} \longrightarrow \|u\|_{\mathrm{L}^p(B)}$ oraz $\|F_j\|_{\mathrm{L}^q(B)} \longrightarrow \|F\|_{\mathrm{L}^q(B)}$, co kończy dowód twierdzenia. ∎

Z wniosku 3.6 bezpośrednio wynika następująca:

**Propozycja 5.4**. *Jeśli $u, v \in \mathrm{PSH}(B) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ oraz $u|_{\partial B} = 0$, to*

$$\int_B |u|^n Mv \le n!\|v\|^n_{\mathrm{L}^\infty(\overline{B})} \int_B Mu.$$

*Dowód.* We wniosku 3..6 wystarczy przyjąć $\Omega = B$, $h = 0$ oraz $v_1 = \cdots = v_n = v$. ∎

**Wniosek 5.5**. *Operator Monge'a-Ampère'a jest $(n, 1)$-stabilny.*

*Dowód.* W propozycji 5.4 wystarczy przyjąć $v(z) := |z|^2 - 1$. ∎

**Wniosek 5.6** ([Bło2]). *Niech $q > 1$. Wtedy $(\infty, q)$-stabilność implikuje $(nq/(q-1), 1)$-stabilność.*

*Dowód.* Niech $u \in \mathrm{PSH} \cap \mathrm{C}(\overline{B})$, $u|_{\partial B} = 0$. Oznaczmy $p := nq/(q-1)$ i zdefiniujmy $v := u_B(0, |u|^{p/q})$. Wtedy dzięki propozycji 5.4 i $(\infty, q)$-stabilności mamy

$$\int_B |u|^p d\lambda = \int_B |u|^n Mv \leq n! \|v\|^n_{\mathrm{L}^\infty(\overline{B})} \int_B Mu \leq C \left( \int_B |u|^p d\lambda \right)^{1/q} \int_B Mu. \blacksquare$$

Jak pokazał ostatnio Kołodziej ([Koł]) operator Monge'a-Ampère'a jest $(\infty, q)$-stabilny dla każdego $q > 1$. Z wniosku 5.6 wynika zatem, że jest on $(p, q)$-stabilny dla wszystkich par $(p, q)$ poza tymi, które były wymienione w przykładzie na początku rozdziału.

Obecnie udowodnimy wcześniejszy rezultat Cegrella i Perssona:

**Twierdzenie 5.7** ([CP]). *Operator Monge'a-Ampère'a jest $(\infty, 2)$-stabilny.*

Potrzebne nam będą dwa lematy:

**Lemat 5.8** ([GT], Lemma 9.2). *Niech $B$ będzie kulą jednostkową w $\mathbb{R}^m$. Wtedy dla $u \in \mathrm{C}^2(B) \cap \mathrm{C}(\overline{B})$ mamy*

$$-\inf_{\overline{B}} u \leq -\inf_{\partial B} u + \frac{2}{\lambda(B)^{1/m}} \left( \int_{\{D^2 u \geq 0\}} \det D^2 u \, d\lambda \right)^{1/m},$$

*gdzie $D^2 u = (\partial^2 u / \partial x_j \partial x_k)_{j,k=1,\ldots,m}$.* $\blacksquare$

**Lemat 5.9**. *Załóżmy, że funkcja $u$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}^n$ oraz że macierz $(\partial^2 u / \partial x_j \partial x_k(z_0))_{j,k=1,\ldots,2n}$ jest dodatnio półokreślona (przyjmujemy $z_j = x_j + i x_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$). Wtedy*

$$\det \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(z_0) \right) \leq 4^n \left( \det \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \overline{z}_q}(z_0) \right) \right)^2.$$

*Dowód.* Oznaczmy

$$X := \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(z_0) \right)_{j,k=1,\ldots,2n}, \quad B := \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \overline{z}_q}(z_0) \right)_{p,q=1,\ldots,n}.$$

Można wyliczyć, że przy oznaczeniach z lematów 2.7 i 2.8, dla $A \in \mathcal{A}$ mamy $4\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(\widehat{A}^T X)$. Wtedy z lematów 2.7 i 2.8 dostaniemy

$$(\det B)^{1/n} = \frac{1}{4n} \inf\{\mathrm{tr}(\widehat{A}^T X) : A \in \mathcal{A}\} \geq \frac{1}{2} (\det X)^{1/2n}. \blacksquare$$

*Dowód twierdzenia 5.7.* Weźmy $u \in \mathrm{PSH}(B) \cap \mathrm{C}^\infty(\overline{B})$, $u \leq 0$. Z lematów 5.8 i 5.9 mamy

$$\|u\|_B \leq \|u\|_{\partial B} + C \left( \int_{\{D^2 u \geq 0\}} (Mu)^2 \, d\lambda \right)^{1/2n}.$$

$(\infty, 2)$-stabilność wynika teraz z twierdzenia 5.3. ■

## 6. Operator Monge'a-Ampère'a w obszarach hiperwypukłych

Używając $(\infty, 2)$-stabilności możemy teraz uogólnić twierdzenie 4.1 na przypadek obszarów hiperwypukłych:

**Twierdzenie 6.1** ([Bło2]). *Niech $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem hiperwypukłym. Załóżmy, że $f \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$ przedłuża się do funkcji psh na $\Omega$, ciągłej na $\overline{\Omega}$, tzn. istnieje $v_0 \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ takie, że $v_0|_{\partial\Omega} = f$. Niech $F$ będzie takie jak w twierdzeniu 4.1. Wtedy istnieje rozwiązanie $u = u_\Omega(f, F)$ problemu (4.1).*

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że $F \equiv 0$ i niech $u$ będzie takie jak w twierdzeniu 1.6. Niech $h$ będzie funkcją harmoniczną na $\Omega$, ciągłą na $\overline{\Omega}$ i taką, że $h|_{\partial\Omega} = f$. Wtedy $v_0 \le u \le h$ i z twierdzenia 1.6 $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Jeśli $\widetilde{B} = \widetilde{B}(z_0, r) \Subset \Omega$, to łatwo pokażemy, że $u = u_{\widetilde{B}}(u|_{\partial B}, 0)$ na $\widetilde{B}$, zatem $Mu = 0$. Możemy więc dodatkowo założyć, że $Mv_0 = 0$.

Załóżmy z kolei, że $F$ ma nośnik zwarty w $\Omega$. Niech $\psi$ będzie takie jak w twierdzeniu 1.7. Wtedy $M(v_0 + A\psi) \ge F$ dla $A$ odpowiednio dużego (bo $F$ ma nośnik zwarty). Niech $\Omega_j \uparrow \Omega$ będą obszarami B-regularnymi. Dzięki twierdzeniu 4.1 istnieją rozwiązania $u_j := u_{\Omega_j}(v_0|_{\partial\Omega_j}, F|_{\Omega_j})$. Z zasady porównawczej

$$v_0 + A\psi \le u_{j+1} \le u_j \le v_0 \text{ na } \Omega_j. \tag{6.1}$$

Chcemy pokazać, że ciąg $\{u_j\}$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $\Omega$. W tym celu wybierzmy $K \Subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Niech $k_0$ będzie takie, że $K \subset \Omega_{k_0}$ oraz $|A\psi| \le \varepsilon$ na $\partial\Omega_{k_0}$. Wtedy z (6.1) i zasady porównawczej dla $j, k \ge k_0$ mamy

$$\|u_j - u_k\|_K \le \|u_j - u_k\|_{\Omega_{k_0}} = \|u_j - u_k\|_{\partial\Omega_{k_0}} \le \|A\psi\|_{\partial\Omega_{k_0}} \le \varepsilon,$$

więc ciąg $\{u_j\}$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $\Omega$. Możemy teraz łatwo pokazać, że $u := \lim u_j$ jest szukanym rozwiązaniem.

Niech teraz $F$ będzie dowolne. Znajdziemy funkcje $F_j \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $F_j \ge 0$, takie, że $F_j \longrightarrow F$ w $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Wystarczy pokazać, że ciąg rozwiązań $u_j := u_\Omega(f, F_j)$ jest jednostajnie zbieżny na $\overline{\Omega}$. Możemy założyć, że $\Omega \subset B$. Wtedy z zasady porównawczej na $\Omega$ mamy

$$|u_j - u_k| \le -u_\Omega(0, |F_j - F_k|) \le -u_B(0, |F_j - F_k|)$$

więc z twierdzenia 5.7

$$\|u_j - u_k\|_{\overline{\Omega}} \le \|u_B(0, |F_j - F_k|)\|_B \le C\|F_j - F_k\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^{1/n}$$

czyli ciąg $\{u_j\}$ jest jednostajnie zbieżny na $\overline{\Omega}$. Funkcja $u := \lim u_j$ posiada wszystkie żądane własności. ■

*Uwaga.* W dowodzie twierdzenia 6.1 nie musimy stosować twierdzenia 1.7 w pełnej wersji. Jeśli $K \Subset \Omega$, to bez korzystania z twierdzenia 1.2 możemy łatwo skonstruować funkcję definiującą, która jest ściśle psh i klasy $C^\infty$ tylko na pewnym otoczeniu $K$, i to wystarczy w dowodzie twierdzenia 6.1.

Nie musimy również korzystać ze stabilności operatora Monge'a-Ampère'a, jeśli wiemy, że dla $\Omega$ istnieje ciągła funkcja definiująca $\psi$ taka, że $M\psi \geq F$. Tak jest na przykład w przypadku bidysku:

*Przykład.* Bidysk $\Delta^2$ w $\mathbb{C}^2$ jest obszarem hiperwypukłym, ale nie B-regularnym. Dla $\varepsilon \in (0,1]$ zdefiniujmy

$$\psi(z) := -\left(1-|z_1|^2\right)^\varepsilon \left(1-|z_2|^2\right)^\varepsilon, \quad z=(z_1,z_2)\in\overline{\Delta}^2.$$

Wtedy $\psi|_{\partial\Delta^2}=0$, $\psi$ jest funkcją klasy $C^\infty$, oddzielnie subharmoniczną na $\Delta^2$ oraz

$$M\psi(z) = \varepsilon^2\left(1-|z_1|^2\right)^{2\varepsilon-2}\left(1-|z_2|^2\right)^{2\varepsilon-2}\left(1-\varepsilon(|z_1|^2+|z_2|^2)\right),$$

zatem $\psi$ jest psh na $\Delta^2$, gdy $\varepsilon \leq 1/2$.

Pokazuje to (bez korzystania z rezultatów udowodnionych w rozdziałach 1 i 5), że dla $\Omega = \Delta^2$ problem (4.1) ma rozwiązanie, jeśli $f$ jest takie jak w twierdzeniu 6.1 zaś $F \in C(\Delta^2)$ takie, że

$$0 \leq F(z) \leq \frac{C}{(1-|z_1|^2)^\beta(1-|z_2|^2)^\beta}, \quad z\in\Delta^2$$

dla pewnych $C \geq 0$ oraz $\beta < 2$. Wzmacnia to rezultat Levenberga i Okady ([LO], Theorem 3.1), którzy zakładają, że $\beta < 1$ i posługują się znacznie bardziej skomplikowanymi, probabilistycznymi metodami - dowód zajmuje około 10 stron!

Na końcu pokażemy, że w obszarach hiperwypukłych problem (4.1) ma gładkie podrozwiązania:

**Twierdzenie 6.2**. *Niech $\Omega$ i $f$ będą takie jak w twierdzeniu 6.1. Wtedy istnieje $u \in$ $\mathrm{PSH}\cap C^\infty(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ takie, że $u|_{\partial\Omega}=f$ oraz $Mu \geq 1$.*

W tym celu zdefiniujemy odpowiedni snop Richberga.

Dla $A=(a_{jk})\in\mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{A}$ jest określone w lemacie 2.8, oznaczamy

$$\Delta_A := \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}.$$

Z lematu 2.8 i propozycji 3.8 mamy

$$(6.2) \qquad (Mu)^{1/n} = \inf_{A\in\mathcal{A}} \Delta_A u \quad \text{dla } u\in \mathrm{PSH}\cap C^{1,1}.$$

Dla funkcji psh ciągłej $u$ rozpatrzmy następujące dwa warunki:
(6.3) $\Delta_A u \geq 1$ dla $A \in \mathcal{A}$,
(6.4) $Mu \geq 1$.

**Propozycja 6.3**. *i) Funkcja $u$ spełnia (6.3) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\delta > 0$ regularyzacja $u_\delta$ spełnia (6.3).*

*ii) Jeśli $u$ spełnia (6.3), to $Mu_\delta \geq 1$ dla każdego $\delta > 0$.*

*iii) Z (6.3) wynika (6.4).*

*iv) Warunki (6.3) i (6.4) są równoważne w każdym z następujących przypadków:*

*a) $u$ jest klasy $C^{1,1}$,*

*b) $Mu$ jest ciągłe.*

*Dowód.* i) Jeśli $\Delta_A u \geq 1$, to $\Delta_A u_\delta = (\Delta_A u) * \rho_\delta \geq 1$. Implikacja przeciwna wynika ze słabej zbieżności $\Delta_A u_\delta \longrightarrow \Delta_A u$.

ii) Wynika z i) i (6.2).

iii) Wynika z ii) i słabej zbieżności $Mu_\delta \longrightarrow Mu$.

iv) Punkt a) wynika z (6.2). Żeby pokazać b) możemy założyć, że funkcja $u$ jest określona na otoczeniu $\overline{B}$, $Mu$ jest ciągłe oraz $Mu \geq 1$. Niech $f_j \in C^2(\partial B)$ oraz $F_j \in C^2(\overline{B})$ będą takie, że $f_j \uparrow u|_{\partial B}$ oraz $F_j \downarrow Mu$. Wtedy dzięki twierdzeniu 4.2 $u_j := u_B(f_j, F_j) \in C^{1,1}(B)$ oraz z zasady porównawczej $u_j \uparrow u$. Z a) mamy więc $\Delta_A u_j \geq 1$, zatem $\Delta_A u \geq 1$ dla $A \in \mathcal{A}$. ∎

Możemy teraz zdefiniować poszukiwany snop Richberga:

*Definicja.* Jeśli $\Omega$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$, to przez $\mathcal{F}(\Omega)$ oznaczmy zbiór wszystkich funkcji ściśle psh ciągłych $u$ na $\Omega$ takich, że dla $\Omega' \Subset \Omega$ istnieje $a \in (0,1)$ takie, że funkcja $au$ spełnia (6.3) w $\Omega'$.

**Propozycja 6.4**. *$\mathcal{F}$ jest snopem Richberga.*

*Dowód.* Definicja ma charakter lokalny, więc $\mathcal{F}$ jest snopem. Niech $u \in \mathcal{F}$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ i niech $a < 1$ będzie takie, że funkcja $au$ spełnia (6.3) na otoczeniu $\operatorname{supp}\varphi$. Żeby przekonać się, że $\mathcal{F}$ spełnia (1.1) wystarczy wziąć $b \in (a,1)$ oraz $\varepsilon_0 > 0$ takie, że $(1-b)u + \varepsilon\varphi \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ dla $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; wtedy $\Delta_A\left(\frac{a}{b}(u + \varepsilon\varphi)\right) \geq \Delta_A(au) \geq 1$ dla $A \in \mathcal{A}$.

Tak samo jak w dowodzie twierdzenia 3.10 można pokazać, że

$$\Delta_A \max\{u, v\} \geq 1_{\{u>v\}}\Delta_A u + 1_{\{u \leq v\}}\Delta_A v, \quad A \in \mathcal{A},$$

czyli $\mathcal{F}$ spełnia (1.2).

Niech $\Omega'$, $\Omega$, $\theta$ i $u$ będą takie jak w (1.3). Żeby pokazać, że $\mathcal{F}$ spełnia (1.3) postępujemy teraz tak jak w dowodzie propozycji 1.3. Dostaniemy lokalnie jednostajną zbieżność pochodnych cząstkowych $\partial^2 u_{\delta\theta}/\partial z_j \partial \overline{z}_k \longrightarrow \partial^2 u/\partial z_j \partial \overline{z}_k$, $\delta \downarrow 0$, na pewnym otoczeniu zbioru $\overline{\{\theta < 1\} \cap \Omega'}$ zaś poza tym otoczeniem $u_{\delta\theta} = u_\delta$ dla $\delta$ odpowiednio małego. Wystarczy teraz skorzystać z propozycji 6.3 i). ∎

*Dowód twierdzenia 6.2.* Na mocy propozycji 6.4, twierdzenia 1.4 oraz propozycji 6.3 iv) a) wystarczy pokazać, że istnieje $u \in \mathcal{F}(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ takie, że $u|_{\partial\Omega} = f$. Niech $v := u_\Omega(f, 2)$ będzie dane przez twierdzenie 6.1 a $\psi$ przez twierdzenie 1.7. Połóżmy $u := v + \psi$. Wtedy $u$ jest ściśle psh oraz, dzięki propozycji 6.3 iv) b), $\Delta_A u \geq \Delta_A v \geq 2^{1/n}$ dla $A \in \mathcal{A}$, co kończy dowód. ■

**Bibliografia**


[Bed] E. Bedford, *Survey of pluri-potential theory.* Several Complex Variables, Proc. of the Mittag-Leffler Inst., 1987-1988, J.E. Fornæss (ed.), Princeton Univ. Press, 1993.

[BT1] E. Bedford, B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation.* Invent. Math. 37 (1976), 1-44.

[BT2] E. Bedford, B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions.* Acta Math. 149 (1982), 1-41.

[Bło1] Z. Błocki, *Estimates for the complex Monge-Ampère operator.* Bull. Pol. Acad. Sci. 41 (1993), 151-157.

[Bło2] Z. Błocki, *On the $L^p$-stability for the complex Monge-Ampère operator.* Preprint, 1994.

[CP] U. Cegrell, L. Persson, *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator: Stability in* $\mathrm{L}^2$. Michigan Math. J. 39 (1992), 145-151.

[CLN] S. S. Chern, H. I. Levine, L. Nirenberg, *Intrinsic norms on a complex manifold.* Global Analysis, Univ. of Tokyo Press, 1969, 119-139..

[Dem] J.-P. Demailly, *Potential theory in several complex variables.* Preprint, 1989.

[Doo] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Grundl. d. math. Wiss. 262, Springer-Verlag, 1984.

[Gav] B. Gaveau, *Méthodes de contrôle optimal en analyse complexe. I. Résolution d'équations de Monge-Ampère .* J. Funct. Anal. 25 (1977), 391-411.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Grundl. d. math. Wiss. 244, Springer-Verlag, 1983.

[Hör1] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables.* North-Holland, 1990.

[Hör2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I.* Grundl. d. math. Wiss. 256, Springer-Verlag, 1990.

[KR] N. Kerzman, J.-P. Rosay, *Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut.* Math. Ann. 257 (1981), 171-184.

[Kli] M. Klimek, *Pluripotential theory.* Oxford Univ. Press, 1991.

[Koł] S. Kołodziej, *Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator.* Ukaże się w Ann. Pol. Math..

[LO] N. Levenberg, M.Okada, *On the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator.* Michigan Math. J. 40 (1993), 507-526.

[Łoj] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.* PWN, 1973.

[RT] J. Rauch, B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for the multidimensional Monge-Ampère equation.* Rocky Mountain Math. J. 7 (1977), 345-364.

[Rich] R. Richberg, *Stetige streng pseudokonvexe Funktionen.* Math. Ann. 175 (1968), 257-286.

[Rud] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$. Grundl. d. math. Wiss. 241, Springer-Verlag, 1980.

[Sib] N. Sibony, *Une classe de domaines pseudoconvexes.* Duke Math. J. 55 (1987), 299-319.

[Wal] J. B. Walsh, *Continuity of envelopes of plurisubharmonic functions.* J. Math. Mech. 18 (1968), 143-148.

**Indeks pojęć**