

ŻYWOMIR DINEW

**Współrzędne reprezentatywne i geometria metryki
Bergmana**

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor:
Zbigniew Błocki

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Kraków 2010

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
Podziękowania	7
1. Preliminaria	7
1.1. Oznaczenia i konwencje	7
1.2. Definicje z zakresu Analizy Zespolonej	9
1.3. Definicje z zakresu Geometrii Różniczkowej	9
1.4. Definicje obiektów związanych z jądrem Bergmana	12
1.5. Holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana	15
1.6. Holomorficzna krzywizna bisekcyjna dla metryki Bergmana	17
1.7. Krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana	18
1.8. Krzywizna skalarna dla metryki Bergmana	20
1.9. Przypadek $n = 1$	21
1.10. Zupełność metryki $\tilde{\beta}$	21
2. Współrzędne reprezentatywne	22
2.1. Konstrukcja Kobayashiego	22
2.2. Konstrukcja Lu Qi-Kenga	25
2.3. Kilka uwag o iniektywności	31
3. Przypadek rozmaitości	33
4. Przykłady	48
4.1. Przykład pierwszy	49
4.2. Przykład drugi	68
4.3. Przykład trzeci	73
Literatura	78

WSTĘP

W 1921 roku Stefan Bergman¹ (zob. [Ber22],[Ber70]) wprowadził pojęcie funkcji jądrowej $K(z, \zeta)$, którą dziś nazywa się jądrem Bergmana. Funkcja ta zachowuje się bardzo specyficzenie względem odwzorowań biholomorficznych między obszarami, co umożliwiło konstrukcję licznych niezmienników biholomorfizmów. Dało to nadzieję na powodzenie programu klasyfikacji obszarów w \mathbb{C}^n , $n > 1$, na klasy obszarów biholomorficznie równoważnych, lub przynajmniej na znalezienie efektywnej metody pozwalającej stwierdzić, że dane dwa obszary nie są biholomorficznie równoważne. Inspiracją do wszczęcia takiego programu badawczego jest słynne twierdzenie uniformizacyjne, które mówi, że każda jednospójna powierzchnia Riemanna jest biholomorficzna z jednym z następujących trzech obiektów: kołem jednostkowym \mathbb{D} na płaszczyźnie zespolonej, płaszczyzną zespoloną \mathbb{C} lub sferą Riemanna $\mathbb{C}P^1$. Z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy, dzięki pracy licznych matematyków wiadomo, że sukces takiego programu jest utopią. Wiadomo w szczególności (zob. [BSW78]), że istnieje nieprzeliczalnie wiele parami niebiholomorficznych obszarów, z których każdy jest bardzo małą perturbacją kuli jednostkowej. Wiadomo też, że w przypadku $n > 1$ istotną rolę w tej kwestii odgrywa nie tylko topologia obszaru, lecz także geometria jego brzegu, w szczególności takie czynniki jak silna lub słaba pseudowypukłość (zob. [Bel81]), gładkość (zob. [Pin79]) i inne. W latach dwudziestych ubiegłego wieku teoria funkcji holomorficznych wielu zmiennych nie była jednak na tyle rozwinięta, aby można było taki stan rzeczy przewidzieć, jednakże dzięki próbom znalezienia pozytywnego rozwiązania problemu powstało wiele metod i technik, które do dziś znajdują zastosowanie również w kontekście innych, odległych problemów. Tak na przykład związana z jądrem Bergmana metryka - metryka Bergmana - stała się prototypem metryk kählerowskich na rozmaitościach - przedmiotu badań geometrii różniczkowej. Innym pomysłem Bergmana (zob. [Ber30]) były tak zwane współrzędne reprezentatywne (terminologia pochodzi z [Fuk63], gdzie teoria związana z tymi współrzędnymi została dalej rozwinięta). Współrzędne te były modelowane na współrzędnych geodezyjnych (normalnych) znanych z geometrii riemannowskiej. Pomysłem kryjącym się za wprowadzeniem tych współrzędnych była idea odwzorowania dowolnego obszaru na obszary "uniwersalne" (w terminologii Bergmana "Repräsentantenbereichen"), które służyłyby za pewien model. Istotnym problemem jednak, jak się okazało, jest fakt, że na ogół współrzędne reprezentatywne nie są określone globalnie. Inaczej mówiąc odwzorowanie na obszar reprezentatywny jest biholomorfizmem tylko pewnego otoczenia środka współrzędnych reprezentatywnych, globalnie zaś jest tylko odwzorowaniem meromorficznym wielu zmiennych. Jak zauważa Lu Qi-Keng w [Lu66], nie ma pewności nawet, że obraz odwzorowania generowanego przez współrzędne reprezentatywne jest w ogóle obszarem. Powstaje zatem pytanie o to, jakie są obiektywne korzyści z wprowadzania współrzędnych, które istnieją tylko lokalnie, podczas gdy na obszarach ograniczonych są dostępne "zwykłe" globalne współrzędne euklidesowe, które dodatkowo są "prostsze" w sensie, że wiele wzorów zapisanych we współrzędnych euklidesowych wygląda mniej skomplikowanie, z mniejszą ilością (krótszych) wyrazów. Odpowiedzi na powyższe pytanie jest co najmniej trzy.

- W 1966 roku, w [Lu66] Lu Qi-Keng wykorzystał właśnie współrzędne reprezentatywne do wykazania swojego słynnego twierdzenia - odpowiednika twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu w wielu wymiarach, lecz przy założeniu stałej holomorficznej krzywizny sekcyjnej.

¹Istnieją pewne wzmianki historyczne, że pierwszeństwo należy przyznać Bochnerowi. Idea jądra Bergmana pojawia się w jego pracy [Boc22].

- W przypadku niektórych klas obszarów² odwzorowania biholomorficzne stają się odwzorowaniami liniowymi, gdy ich składowe zapisze się we współrzędnych reprezentatywnych. Pozwala to na przykład wyznaczać grupy automorfizmów (odwzorowań biholomorficznych obszaru w siebie) tych obszarów. W przypadku ogólnych obszarów powyższe przedstawienie biholomorfizmów jako odwzorowań liniowych ma miejsce lokalnie (zob. [Fuk63], [Kra93], [Mok])

- W słynnym problemie rozszerzania odwzorowań biholomorficznych między obszarami o gładkim brzegu do dyfeomorfizmu między ich domknięciami pojawiają się (choć w sposób ukryty) współrzędne reprezentatywne (zob. [Web79]). Problem ten został rozwiązany najpierw przez Feffermana (zob. [Fef74]) w przypadku gdy obszary są klasy C^∞ i silnie pseudowypukłe. Po pewnym czasie prostszy dowód podał Webster (zob. [Web79]), jednakże jego argumenty zostały niebawem zastąpione jeszcze prostszym i działającym w ogólniejszej sytuacji dowodem Bella i Ligockiej (zob. [BL80]).

We wszystkich trzech wyżej wymienionych sytuacjach okazywało się, że “lokalność” obszaru istnienia współrzędnych reprezentatywnych nie jest przeszkodą do rozwiązania konkretnego problemu. W niniejszej pracy doktorskiej postaramy się częściowo odpowiedzieć na pytanie: Co to oznacza “lokalnie” w konkretnym kontekście geometrycznym. W szczególności udowodnimy

Twierdzenie 0.1. *Niech $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem, wyposażonym w metrykę Bergmana. Dla każdego $z_0 \in \Omega$, współrzędne reprezentatywne dla obszaru Ω o środku w punkcie z_0 są dobrze określone (a więc holomorficzne, bez osobliwości) w kuli geodezyjnej $\{z \in \Omega : dist_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2}\}$.*

Powyżej odległość $dist_\Omega$ to geodezyjna odległość względem metryki Bergmana.

Uwaga. Alternatywnie Twierdzenie 0.1 można wyrazić następująco: jądro Bergmana $K(\cdot, z_0)$ nie zeruje się w kuli geodezyjnej $\{z \in \Omega : dist_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2}\}$.

Twierdzenie to w szczególności wykazuje, że promień kuli geodezyjnej, w której współrzędne geodezyjne są dobrze określone, jest stałą uniwersalną, nie zależną ani od wymiaru, ani od obszaru Ω , ani od położenia punktu $z_0 \in \Omega$. Twierdzenie to zostanie udowodnione w podrozdziale 2.1.

Ponadto udowodnimy

Twierdzenie 0.2. *Niech $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, wyposażonym w metrykę Bergmana. Niech $c \in (-\infty, n + 1)$ będzie globalnym dolnym ograniczeniem krzywizny Ricciego metryki Bergmana. Dla dowolnego $z_0 \in \Omega$ odwzorowanie generowane przez współrzędne reprezentatywne*

$$z \rightarrow (w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z))^t$$

jest immersją w kuli geodezyjnej $\{z \in \Omega : dist_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{n+1-c}}\}$.

Udowodnimy też lokalną wersję Twierdzenia 0.2, przydatną w przypadku gdy krzywizna Ricciego metryki Bergmana nie jest ograniczona od dołu.

Twierdzenie 0.3. *Niech $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, wyposażonym w metrykę Bergmana. Niech $U \subset \Omega$ będzie zbiorem otwartym, dla którego $\inf_{\substack{z \in U \\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}}} \frac{Ric_{i\bar{j}}(z)X_i\bar{X}_j}{T_{i\bar{j}}(z)X_i\bar{X}_j} > c$. Dla*

²konkretnie np. w tak zwanych “reprezentatywnych obszarach” w sensie Lu Qi-Kenga, zob. [Lu84]

każdego $z_0 \in \Omega$ odwzorowanie

$$z \rightarrow (w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z))^t$$

jest immersją w zbiorze $U \cap \{z \in \Omega : \text{dist}_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{n+1-c}}\}$.

Twierdzenia te wskazują, że kontrolę obszaru immersyjności współrzędnych reprezentatywnych uzyskujemy tylko dzięki wiedzy o zachowaniu krzywizny Ricciego metryki Bergmana. Ich dowód przedstawimy w podrozdziale 2.2.

Iniektywność odwzorowania generowanego przez współrzędne reprezentatywne (która implikuje immersyjność (zob. np. [Ros82]), a więc Twierdzenie 0.2 i Twierdzenie 0.3) wydaje się być głębszym faktem, do wykazania którego metody tej pracy nie wydają się być dostatecznie silne. Wiadomo tylko, że również “lokalnie” iniektywność zachodzi. Mimo tego sama geometryczna kontrola “obszaru immersyjności” wydaje się być krokiem do przodu w lepszym zrozumieniu współrzędnych reprezentatywnych.

W następnej części tej pracy przeniesiemy wyniki poprzedniego rozdziału na rozmaitości zespolone. Rozpatrywanie jądra Bergmana dla funkcji jest zbyt restrykcyjne, gdyż dla wielu (np. zwartych) rozmaitości jedynymi funkcjami holomorficznymi są stałe. Dlatego też dokonamy modyfikacji definicji obiektów z poprzedniego rozdziału, przenosząc je na formy różniczkowe maksymalnego stopnia. Rozdział ten jest w dużej mierze poświęcony dowodom faktu, że przenoszenie teorii z \mathbb{C}^n na rozmaitości jest poprawne oraz analizie jakie dodatkowe założenia o rozmaitości muszą być spełnione, aby uzyskana teoria się nie trywializowała. W szczególności można rozpatrywać współrzędne reprezentatywne metryki Bergmana na niektórych rozmaitościach. W kontekście rozmaitości nie pojawiają się już powyższe wątpliwości o zasadność konstrukcji, gdyż globalne euklidesowe układy współrzędnych już nie występują. Co więcej, opisane zalety współrzędnych reprezentatywnych czynią ich wybór szczególnie uzasadnionym. Ponadto wykażemy następujące twierdzenie z zakresu geometrii rozmaitości

Twierdzenie 0.4. *Niech M będzie zespoloną zwartą rozmaitością dopuszczającą metrykę Bergmana. Wtedy $\text{diam}M \geq \frac{\pi}{2}$, gdzie średnica $\text{diam}M$ wzięta jest względem metryki Bergmana.*

Jak już zostało wspomniane, metryka Bergmana była modelem dla ogólniejszych metryk rozpatrywanych w geometrii różniczkowej. Pomimo tego wydaje się, że do dziś względnie mało wiadomo o geometrii jaką generuje sama metryka Bergmana. Wynika to oczywiście między innymi z faktu, że wzór na jądro (a więc i na metrykę) Bergmana w większości przypadków nie posiada prostej postaci explicite - dany jest jako suma szeregu funkcji, które stanowią bazę ortonormalną pewnej przestrzeni Hilberta. Niestety wyznaczenie takiej bazy możliwe jest (efektywnie) tylko dla specjalnych obszarów, które “posiadają dużo symetrii”. W ostatniej części zbadamy kilka aspektów geometrii zadanej przez metrykę Bergmana, podając trzy przykłady modelowane na geometrii pierścienia na płaszczyźnie

$$P_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}.$$

Pierwszy przykład posiada osobną historię:

Z punktu widzenia geometrii różniczkowej metryka Bergmana jest szczególną metryką kählerowską. Próbowano więc wyznaczać rozmaite oszacowania na różne krzywizny tej metryki. Niektóre oszacowania zależą od własności obszaru, inne mają charakter uniwersalny. Tak na przykład już Bergmanowi było wiadomo, że holomorficzna krzywizna sekcyjna metryki Bergmana jest nie większa niż 2 (fakt ten jako pierwszy udowodnił Fuks [Fuc37]).

Kobayashi w swojej przełomowej pracy [Kob59] wyraził przypuszczenie, że większość obszarów ograniczonych ma jednak ujemną holomorficzną krzywiznę sekcijną metryki Bergmana. Po pewnym czasie Lebed (zob. [Leb71]) wykazał, że gdy $n \geq 2$ stała 2 jest optymalna w następującym słabym sensie: Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony obszar U_ε , dla którego istnieje $z_0 \in U_\varepsilon$ i $X \in \mathbb{C}^n$ takie, że holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana w punkcie z_0 i kierunku X , $R_{U_\varepsilon}(z_0, X) > 2 - \varepsilon$. Istotny postęp w tej dziedzinie dokonał się dopiero niedawno. Wiadomo w szczególności, że stała 2 jest optymalna w mocnym sensie. Sprawa optymalności w wymiarze $n = 1$ pozostawała jednak otwarta. W tej pracy wykażemy, że (zob. też [Din09])

Twierdzenie 0.5. *Dla pierścienia na płaszczyźnie P_r zachodzą następujące równości*

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{P_r}(\sqrt{r}) &= -\infty \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} R_{P_r}(r^{\frac{3}{10}}) &= 2.\end{aligned}$$

W szczególności daje nam to słabą optymalność stałej 2 oraz brak uniwersalnego ograniczenia od dołu.

Ponadto wykorzystamy Twierdzenie 0.5 do konstrukcji ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, dla którego holomorficzna krzywizna sekcyjna metryki Bergmana jest rozbieżna w pewnym jego punkcie brzegowym. Konkretnie wykażemy

Twierdzenie 0.6. *Istnieje ograniczony obszar na płaszczyźnie Ω oraz punkt $\zeta \in \partial\Omega$ taki, że*

$$\begin{aligned}\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} R_\Omega(z) &= 2 \\ \liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} R_\Omega(z) &= -\infty.\end{aligned}$$

Dzięki faktowi, że różne krzywizny redukują się do tej samej krzywizny Gaussa, gdy wymiar wynosi 1, uzyskujemy wnioski nie tylko o holomorficzną krzywiznę sekcijną, lecz i o innych krzywiznach. W szczególności krzywizna Ricciego metryki Bergmana nie musi być ograniczona od dołu dla dowolnych obszarów co naturalnie wiąże ten wynik z Twierdzeniami 0.2 i 0.3.

Drugi przykład przytoczony jest w celu wykazania, że Twierdzenie 0.1 jest w pewnym sensie optymalne, mianowicie mamy

Twierdzenie 0.7. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony obszar Ω_ε taki, że istnieje $z_0 \in \Omega_\varepsilon$, dla którego $K(\cdot, z_0)$ posiada zero w kuli geodezyjnej $\{z \in \Omega_\varepsilon : \text{dist}_{\Omega_\varepsilon}(z, z_0) < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}$.*

W podobnym duchu utrzymana jest konstrukcja przykładu trzeciego, który wskazuje jak należy zmodyfikować Twierdzenia 0.2 i 0.3 aby oszacowanie promieni kul, które w nich występują również było optymalne.

Twierdzenie 0.8. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony obszar Ω_ε taki, że istnieje $z_0 \in \Omega_\varepsilon$, dla którego $z \rightarrow (w_1(z), z_2(z), \dots, w_n(z))^t$ nie jest immersją w całej kuli geodezyjnej*

$$\{z \in \Omega_\varepsilon : \tilde{\text{dist}}_{\Omega_\varepsilon}(z, z_0) < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}.$$

Odległość $\tilde{\text{dist}}$ jest tu odległością geodezyjną ale względem innej metryki, danej bardziej skomplikowanym wzorem. Metryka ta jest też zdecydowanie rzadziej spotykana w pracach matematycznych. Jednakże dzięki jej bliskim związkom z metryką Bergmana możemy użyć Twierdzenia 0.2 i 0.3.

Podziękowania. Pragnę wyrazić serdeczne podziękowania mojemu promotorowi Zbigniewowi Błockiemu za długoletnią opiekę naukową, wprowadzenie do tematyki i zaprezentowanie otwartych problemów, za wszelkie uwagi pod adresem niniejszej pracy na etapie jej powstawania jak i za cenione przez mnie fachowe i jednocześnie liberalne podejście do naszej współpracy.

Pragnę podziękować także pozostałym pracownikom katedry Analizy Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego, profesorom Józefowi Siciakowi, Markowi Jarnickiemu, Sławomirowi Kołodziejowi, Włodzimierzowi Zwonkowi oraz profesorom Wiesławowi Pleśniakowi i Armenowi Edigarianowi za trud włożony w przekazanie wiedzy w trakcie seminariów, wykładów i ćwiczeń, w których miałem szczęście uczestniczyć. Wiele inspirujących idei, o których po raz pierwszy usłyszałem w trakcie ww. zajęć, leży u podstaw tej pracy jak i przyczyniło się do ukierunkowania moich zainteresowań naukowych.

Nie może zabraknąć podziękowań dla mojego brata Sławomira, za wspólne stawianie pierwszych kroków w matematyce, dzielenie się pasją i liczne inspirujące dyskusje.

Wreszcie pragnę podziękować osobom, które miały istotny udział w ukształtowaniu mnie jako człowieka na różnych etapach mojego życia. Przede wszystkim moim rodzicom Danucie i Dymitrowi, dalszej rodzinie, nauczycielom Georgiemu Dimitrowowi i Stance Kunczewej, śp. ks. Marianowi Grądzielowi CR, prof. Nikołajowi Nikołowowi oraz szczególnie żonie Izabeli za oddanie, miłość i wsparcie we wszystkich trudach dnia codziennego.

Praca ta powstała przy pomocy grantu promotorskiego nr N N201 271235 Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

1. PRELIMINARIA

1.1. Oznaczenia i konwencje. Przez \mathbb{C}^n będziemy oznaczać n -wymiarową zespoloną przestrzeń wektorową z normą euklidesową.

Fakt, że obszar (zbiór otwarty i spójny) Ω jest ograniczony będziemy oznaczać przez $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$.

Uwaga. Założenie ograniczoności w większości twierdzeń tej pracy można zastąpić słabszymi założeniami, np. że obszar jest biholomorficzny z obszarem ograniczonym, lub zupełnie pominąć. Powodem rozpatrywania obszarów ograniczonych jest nie do końca rozwinięta teoria funkcji holomorficznych, całkowalnych z kwadratem na obszarach ogólnych (w tym nieograniczonych). W szczególności brak jest (w przypadku $n > 1$) charakteryzacji obszarów, dla których ww. przestrzeń funkcji holomorficznych i całkowalnych z kwadratem jest niezerowa. Nie można też (w sytuacji ogólnej) założyć, że składowe odwzorowania identycznościowego z_1, z_2, \dots, z_n , które zadają naturalny euklidesowy układ współrzędnych, należą do tej przestrzeni, co jest bardzo istotne w kilku miejscach tej pracy. Ponieważ intencją pracy nie jest szczegółowa analiza różnicy w teoriach w przypadkach ograniczonym i nieograniczonym, postanowiono dla uproszczenia rozpatrywać wyłącznie obszary ograniczone.

Przez $\sqrt{-1}$ będziemy oznaczać jednostkę urojoną i , notacja ta jest zgodna z powszechnie przyjętą w geometrii różniczkowej i ma na celu oszczędzenie indeksu “ i ” do wykorzystania w bardziej skomplikowanych wzorach.

Znaczek “ t ” przy wyrażeniu oznaczał będzie transponowanie.

Przez TrP będziemy oznaczać ślad macierzy P .

Przez $\partial\Omega$ będziemy oznaczać brzeg topologiczny obszaru Ω .

Dla ułatwienia zapisu stosować będziemy konwencję

$$K(z, z)_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} K(z, z) (= \frac{\partial}{\partial z} K(z, z), \text{ gdy } n = 1)$$

$$K(z, z)_{\bar{1}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} K(z, z) (= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} K(z, z), \text{ gdy } n = 1)$$

$$K(z, z)_{1\bar{1}} = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} K(z, z) (= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} K(z, z), \text{ gdy } n = 1)$$

itd.

Przez $Jac\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}$ będziemy oznaczać wyznacznik zespolonej macierzy Jacobiego odwzorowania g :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

Przez $O(f(r))$ będziemy oznaczać wyrażenie, które podzielone przez $f(r)$ jest ograniczone, gdy r dąży do 0, $r > 0$.

Przez $o(f(r))$ będziemy oznaczać wyrażenie, które podzielone przez $f(r)$ dąży do zera, gdy r dąży do 0, $r > 0$.

Przez $\mathcal{O}(\Omega)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji holomorficznycch n -zmiennych na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Zbiór $\mathcal{O}(\Omega)$ posiada naturalną strukturę przestrzeni wektorowej.

Przez $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$ będziemy oznaczać podprzestrzeń $\mathcal{O}(\Omega)$ złożoną z tych funkcji f , dla których

$$\int_{\Omega} |f|^2 d\lambda < \infty,$$

gdzie $d\lambda$ oznacza miarę Lebesgue'a w \mathbb{C}^n . Przestrzeń $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$ posiada strukturę zespolonej przestrzeni Hilberta z iloczynem skalarnym

$$L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) \times L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) \ni f, g \longrightarrow \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\lambda \in \mathbb{C}.$$

Przestrzeń tą będziemy nazywać przestrzenią funkcji holomorficznycch, całkowalnych z kwadratem na obszarze Ω .

Poprzez zwartą rozmaitość zawsze będziemy rozumieć rozmaitość bez brzegu, która jest topologicznie zwarta.

Poprzez $X(f)$, gdzie X jest wektorem z zespolonej przestrzeni stycznej do rozmaitości (zespolonej) M w punkcie $z_0 \in M$, będziemy rozumieć wyrażenie

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} \Big|_{z=z_0},$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial z_i}, i = 1..n$ są lokalnymi pochodnymi cząstkowymi, w lokalnych współrzędnych z , w otoczeniu punktu z_0 . Pochodne te tworzą bazę zespolonej przestrzeni stycznej do M w punkcie z_0 i $X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.

1.2. Definicje z zakresu Analizy zespolonej.

Definicja 1.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem o brzegu gładkim w punkcie $z_0 \in \partial\Omega$. Przestrzeń styczną w punkcie z_0 będziemy nazywać zespoloną, $n-1$ wymiarową przestrzeń wektorową (zawartą w \mathbb{C}^n), składającą się z tych wektorów X , dla których

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z_0) X_j = 0,$$

dla dowolnej gładkiej lokalnej funkcji definiującej ρ^3 . Zespoloną przestrzeń styczną do Ω w punkcie z_0 będziemy oznaczać przez $T_{z_0}^{\mathbb{C}}$.

Definicja 1.2. Załóżmy, że obszar Ω jest obszarem o gładkim brzegu. Obszar Ω będziemy nazywać obszarem silnie pseudowypukłym, jeżeli dla każdego punktu z brzegu Ω istnieje gładka lokalna funkcja definiująca ρ , zdefiniowana na otoczeniu U taka, że

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) X_j \bar{X}_k > 0,$$

dla wszystkich $z \in \partial\Omega \cap U, X \in T_z^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Definicja 1.3. Obszar $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ nazwiemy hiperwypukłym, gdy istnieje ujemna funkcja plurisubharmoniczna h na Ω taka, że zbiory $\{z \in \Omega : h(z) < c\}$ są relatywnie zwarte w Ω , dla każdego $c < 0$.

Definicja 1.4. Ujemną funkcją Greena, dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$, o biegunie logarytmicznym w $z \in \Omega$, będziemy nazywać funkcję

$$G_{\Omega}(\cdot, z) := \sup\{f(\cdot) : f < 0, f \text{ jest subharmoniczna w } \Omega \text{ i } \lim_{\zeta \rightarrow z} (f(\zeta) - \log|\zeta - z|) < \infty\}.$$

Funkcja ta jest subharmoniczna w Ω i harmoniczna w $\Omega \setminus \{z\}$.

Uwaga. Gdy $\Omega \subset \mathbb{C}$, następująca równość równoważna jest hiperwypukłości

$$\lim_{\Omega \ni \zeta \rightarrow \partial\Omega} G_{\Omega}(\zeta, z) = 0,$$

dla każdego $z \in \Omega$.

Twierdzenie 1.5 (Rouché). Niech f i f_1 będą funkcjami holomorficznymi na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$. Niech $U \subset \Omega$ będzie jednospójnym obszarem o gładkim brzegu. Jeżeli $|f|_{|\partial U} > |f_1|_{|\partial U}$, to funkcje $f + f_1$ i f mają taką samą ilość zer (licząc z krotnościami) w obszarze U .

1.3. Definicje z zakresu Geometrii Różniczkowej.

Definicja 1.6. Metrykę $g_{p\bar{q}}$ (odwzorowanie przyporządkowujące każdemu punktowi z obszaru Ω zespolony iloczyn skalarny, którego macierz to $(g_{p\bar{q}})_{p,q=1..n}$) nazwiemy metryką kählerowską, jeżeli stowarzyszona z nią forma

$$\sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

³Okazuje się, że zespolona przestrzeń styczna nie zależy od wyboru lokalnej funkcji definiującej.

jest d zamknięta, gdzie d jest pełną różniczką. Tj.

$$d \left(\sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j \right) = 0$$

lub równoważnie

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z_i},$$

dla $i, j, k = 1..n$.

Definicja 1.7. Immersją nazwiemy odwzorowanie różniczkowalne f między rozmaitościami M i N lub między rozmaitością M , a przestrzenią nieskończenie wymiarową takie, że jego różniczka df jest stałego rzędu (macierz pochodnych cząstkowych jest stałego rzędu) na całej rozmaitości M , równego wymiarowi M . Jeżeli rząd różniczki jest równy wymiarowi M lokalnie to f nazwiemy lokalną immersją, a obszar $U \subset M$ na którym własność ta zachodzi nazwiemy obszarem immersyjności.

Definicja 1.8. Zanurzeniem nazwiemy odwzorowanie różniczkowalne f między rozmaitościami M i N lub między rozmaitością M , a przestrzenią nieskończenie wymiarową takie, że jest jednocześnie immersją i odwzorowaniem iniektywnym.

Definicja 1.9. Cofnięciem (z angielskiego "pullback") metryki $g_{i\bar{j}}$ na rozmaitości (lub przestrzeni nieskończenie wymiarowej) N poprzez immersję f między rozmaitością M i N , nazwiemy metrykę $h_{p\bar{q}}$ na M zdefiniowaną punktowo w następujący sposób

$$h_{p\bar{q}}(\xi) := f^* g_{i\bar{j}} = \sum_{i,j=1}^{\dim N} \frac{\partial f_j(z)}{\partial z_q} \Big|_{z=\xi} \overline{\frac{\partial f_i(z)}{\partial z_p} \Big|_{z=\xi}},$$

dla $p, q = 1, \dots, \dim M$.

Definicja 1.10. Zanurzeniem izometrycznym (lub izometrią) nazwiemy zanurzenie f między rozmaitościami M z metryką $h_{p\bar{q}}$ i N z metryką $g_{i\bar{j}}$ lub między rozmaitością M , a przestrzenią nieskończenie wymiarową (oba obiekty wyposażone w metryki) takim, że $h_{p\bar{q}}$ jest cofnięciem $g_{i\bar{j}}$ przez zanurzenie f .

Definicja 1.11. Powierzchnią Riemanna nazwiemy każdą jednowymiarową (wymiar zespolony) rozmaitość zespoloną.

Uwaga. Dowolna metryka na powierzchni Riemanna jest metryką kählerowską.

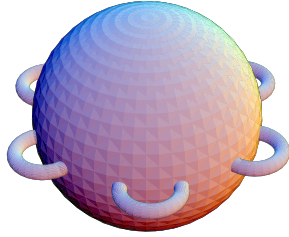
Definicja 1.12. (zob. [FK92]) Zwartą powierzchnię Riemanna będziemy nazywać hipereliptyczną, jeżeli jest ona dwukrotnym rozgałęzionym nakryciem sfery Riemanna $\mathbb{C}P^1$. Równoważnie hipereliptyczne powierzchnie Riemanna można zdefiniować jako te, które dopuszczają istnienie globalnej, niestałej funkcji meromorficznej o dokładnie dwóch biegunach jednokrotnych (lub o jednym biegunie, który jest dwukrotny).

Definicja 1.13. Powiemy, że zwarta powierzchnia Riemanna ma genus g , jeżeli jest ona homeomorficzna ze "sferą z doklejonymi g rączkami", obiektem w \mathbb{R}^3 , który można formalnie zdefiniować w następujący sposób. Jest to brzeg topologiczny ∂X , gdzie $X = B \cup T_1 \cup \dots \cup T_g$. Powyżej $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 < 1\}$ jest kulą jednostkową, a

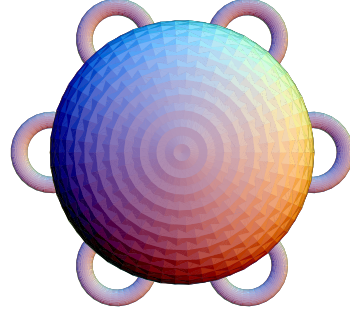
$$T_j := \left\{ \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{g} \right) + (R + r \cos v) \cos u, \sin \left(\frac{2j\pi}{g} \right) + (R + r \cos v) \sin u, r \sin v \right) \in \mathbb{R}^3 : \right.$$

$$u, v \in (0, 2\pi] \}, j = 1..g$$

jest obrazem odwzorowania parametryzującego torus. Parametry R i r są dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $r < R$ (aby torus "miał dziurę") i $2 \arccos \frac{2-(R+r)^2}{2} < \frac{2\pi}{g}$ (aby poszczególne torusy (rączki) nie nachodziły na siebie).



(a) widok z boku



(b) widok z góry

RYSUNEK 1. Sfera z g rączkami, dla $g = 6$

Twierdzenie 1.14. (zob. [FK92]) *Każda zwarta powierzchnia Riemanna, której genus $g = 2$ jest hiperliptyczna.*

Twierdzenie 1.15. (zob. [FK92]) *Niech M będzie zwartą powierzchnią Riemanna genusu g . M jest hiperliptyczna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje automorfizm $f : M \rightarrow M$ taki, że $f \circ f = id_M$ (automorfizm inwolucyjny) i f posiada dokładnie $2g + 2$ punkty stałe (tj. punkty $z_j \in M, j = 1..2g + 2$ takie, że $f(z_j) = z_j$). Jeżeli $\langle f \rangle$ jest grupą ze względu na operację składania (rzędu 2), generowaną przez automorfizm f , to rozgałęzione nakrycie można zrealizować jako rzutowanie kanoniczne $\pi : M \rightarrow M/\langle f \rangle \cong \mathbb{C}P^1$. Rozgałęzienia występują dokładnie w punktach stałych automorfizmu f .*

Definicja 1.16. Niech M będzie zwartą powierzchnią Riemanna genusu g . Dla każdego punktu $p \in M$ ciągiem lukowym Weierstrassa nazwiemy ciąg

$$1 = n_1 < n_2 < \dots < n_g < 2g, n_j \in \mathbb{N}, j = 1..g$$

liczb takich, że nie istnieje funkcja meromorficzna na M , holomorficzna na $M \setminus \{p\}$ i posiadająca biegun rzędu n_j w punkcie p . Dopelnienie ciągu lukowego, $\{1, \dots, 2g\} \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_g\}$ posiada strukturę addytywną, gdyż jeżeli funkcja f_1 ma biegun rzędu l_1 , a f_2 ma biegun rzędu l_2 , to $f_1 f_2$ ma biegun rzędu $l_1 + l_2$ w punkcie p . Ciąg lukowy jest ściśle zależny od punktu. Wagą punktu $p \in M$ nazwiemy liczbę $m_p = (n_1 - 1) + (n_2 - 2) + \dots + (n_g - g) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gdzie $\{n_j\}_{j=1}^g$ jest ciągiem lukowym w punkcie p . Powiemy, że punkt $p \in M$ jest punktem Weierstrassa, jeżeli $m_p > 0$.

Obserwacja 1. *Gdy M jest hiperliptyczną powierzchnią Riemanna genusu g , to punktów Weierstrassa jest dokładnie $2g + 2$. Są to punkty stałe automorfizmu inwolucyjnego z Twierdzenia 1.15. Ponadto w każdym punkcie Weierstrassa ciąg lukowy to $1, 3, 5, \dots, 2g - 1$, a więc jego waga to $\frac{g(g-1)}{2}$.*

Twierdzenie 1.17. (zob. [FK92]) Suma wszystkich wag $\sum_{p \in M} m_p = g(g^2 - 1)$. W szczególności punktów Weierstrassa na zwartej powierzchni Riemanna jest skończenie wiele, ponadto gdy $g > 1$, punkty Weierstrassa istnieją.

Twierdzenie 1.18 (Wersja twierdzenia Riemanna-Rocha). Niech M będzie zwartą powierzchnią Riemanna o genusie g . Zachodzi następująca równość

$$\dim L\left((z - z_0)^j\right) = \text{ord}\left((z - z_0)^j\right) + \dim \Omega\left((z - z_0)^j\right) - g + 1,$$

dla każdego $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gdzie $L\left((z - z_0)^j\right)$ jest przestrzenią wektorową wszystkich globalnych funkcji meromorficznych, holomorficznym poza $\{z_0\}$ i posiadających w z_0 biegun rzędu co najwyżej j , $\text{ord}\left((z - z_0)^j\right)$ jest rzędem wyrażenia $(z - z_0)^j$ i wynosi j , natomiast $\Omega\left((z - z_0)^j\right)$ jest przestrzenią wszystkich holomorficznym $(1, 0)$ -form na M posiadających w z_0 zero rzędu co najmniej j (czyli φ takich, że $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{\varphi^*(z)}{(z - z_0)^j} \right| < \infty$).

Uwaga. Formy z przestrzeni $\Omega\left((z - z_0)^j\right)$ mogą się zerować również w innych punktach powierzchni Riemanna M , natomiast funkcje meromorficzne z przestrzeni $L\left((z - z_0)^j\right)$ nie mogą mieć biegunów innych niż w punkcie z_0 .

1.4. Definicje obiektów związanych z jądrem Bergmana. Niech $z_0 \subset U \subset \subset \mathbb{C}^n$, $X, Y \in \mathbb{C}^n$. Wprowadźmy wielkości

$$(1.1) \quad J_{0,U}(z_0) := \sup\{|f(z_0)|^2 : f \in L^2 \cap \mathcal{O}(U), \int_U |f|^2 d\lambda \leq 1\}$$

$$J_{1,U}(z_0; X) := \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) X_j\right|^2 : f \in L^2 \cap \mathcal{O}(U),\right.$$

$$(1.2) \quad \left. \int_U |f|^2 d\lambda \leq 1, f(z_0) = 0\right\}$$

$$J_{2,U}(z_0; X, Y) := \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i}(z_0) X_j Y_i\right|^2 : f \in L^2 \cap \mathcal{O}(U),\right.$$

$$(1.3) \quad \left. \int_U |f|^2 d\lambda \leq 1, f(z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) = 0, j = 1..n\right\}$$

Obserwacja 2. Jeżeli $z_0 \in U \subset \Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$, to

$$\infty > J_{0,U}(z_0) \geq J_{0,\Omega}(z_0) > 0,$$

$$\infty > J_{1,U}(z_0; X) \geq J_{1,\Omega}(z_0; X) > 0$$

i

$$\infty > J_{2,U}(z_0; X, Y) \geq J_{2,\Omega}(z_0; X, Y) > 0,$$

dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Uwaga. Wynika to z faktu, że supremum brane jest po większej rodzinie.

Niech $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$. Jądro Bergmana obszaru Ω , $K(z, \zeta) = K_\Omega(z, \zeta)$ zdefiniowane jest następującą równością

$$(1.4) \quad K(z, \zeta) := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(z) \overline{\varphi_i(\zeta)}.$$

Szereg występujący w powyższej równości jest zbieżny lokalnie jednostajnie na zbiorze $(z, \zeta) \in \Omega \times \Omega$. Okazuje się, że definicja $K(z, \zeta)$ nie zależy od wyboru bazy φ .

Obserwacja 3. Zachodzi równość $K(z, \zeta) = \overline{K(\zeta, z)}$, w szczególności $K(z, z) \in \mathbb{R}_+$, dla $z \in \Omega$.

Obserwacja 4. $K(\cdot, \zeta) \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$, dla ustalonego $\zeta \in \Omega$. Z Obserwacji 3 wynika, że $K(z, \cdot)$ jest funkcją antyholomorficzną, dla ustalonego $z \in \Omega$.

Uwaga. Dla podkreślenia powyższego faktu, czasami w literaturze używa się notacji $K(z, \bar{\zeta})$.

Obserwacja 5. Jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , to zachodzi równość

$$K_U(z, \zeta) = K_\Omega(F(z), F(\zeta)) \text{Jac} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) (z) \overline{\text{Jac} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) (\zeta)}.$$

Obserwacja 6. Jeżeli $z \in \Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$, zachodzi następująca równość $K_\Omega(z, z) = J_{0,\Omega}(z)$.

Obserwacja 7. Jeżeli $U, \Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ są obszarami, to zachodzi następująca własność produktowa dla jądra Bergmana obszaru $\Omega \times U \subset \subset \mathbb{C}^{2n}$

$$K_{\Omega \times U}((z_1, z_2), (\zeta_1, \zeta_2)) = K_\Omega(z_1, \zeta_1) K_\Omega(z_2, \zeta_2).$$

Twierdzenie 1.19 (Ohsawy). (zob. [Ohs93]) Jeżeli Ω jest obszarem hiperwypukłym to

$$K(z, z) \rightarrow \infty,$$

gdzie $\Omega \ni z \rightarrow \partial\Omega$.

Z jądrem Bergmana związana jest następująca (1, 1)-forma różniczkowa.

$$(1.5) \quad \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n T_{i\bar{j}}(z) dz_i \wedge d\bar{z}_j := \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K(z, z) dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

$$(\text{Tzn. } T_{i\bar{j}}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K(\zeta, \zeta)|_{\zeta=z})$$

Przy naszych założeniach ($\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$) forma ta jest globalnie dodatnio określona, ponadto łatwo zauważyć, że jest to forma kählerowska z globalnym potencjałem ($\log K(z, z)$). Stowarzyszona z tą formą metryka $\sum_{i,j=1}^n T_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j$ nazwiemy metryką Bergmana.

Długość wektora $X \in \mathbb{C}^n$, względem tej metryki w punkcie $z \in \Omega$ to

$$(1.6) \quad \beta(z, X) = \beta_\Omega(z, X) := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n T_{i\bar{j}}(z) X_i \bar{X}_j},$$

Obserwacja 8. Podobnie jak w Obserwacji 5, jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , a $X \in \mathbb{C}^n$, to zachodzi równość:

$$\beta_U(z, X) = \beta_\Omega(F(z), F'X).$$

Obserwacja 9. Powyższa równość dowodzi, że odwzorowania biholomorficzne są izometriami rozmaitości kählerowskich - obszarów U i Ω , wyposażonych w metryki Bergmana.

Twierdzenie 1.20. (zob.[Die70],[Die73],[McN92] i [DH00]) Długość wektora $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, względem metryki Bergmana dla ograniczonego obszaru silnie pseudowypukłego Ω zachowuje się w następujący sposób przy brzegu

$$\lim_{\Omega \ni p \rightarrow \partial\Omega} \beta_U(p, X) = \infty.$$

Uwaga. W odróżnieniu od sytuacji w Twierdzeniu 1.19, teza Twierdzenia 1.20 nie zachodzi dla ogólnych obszarów hiperwypukłych. Kontrprzykładem jest np. obszar $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, przy wyborze wektora $X = (1, 0)^t$ i dążeniu $p = (0, z)$, $\mathbb{D} \ni z \rightarrow \partial\mathbb{D}$. Natomiast w sytuacji gdy wymiar $n = 1$, teza Twierdzenia 1.20 zachodzi również dla obszarów hiperwypukłych (zob. [PZ03]).

Obserwacja 10. Jeżeli $z \in \Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$, $X \in \mathbb{C}^n$, to

$$\beta^2(z, X) = \frac{J_{0,U}(z)}{J_{1,U}(z; X)}.$$

Długość krzywej kawałkami \mathcal{C}^1

$$\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in \Omega,$$

oznaczymy przez

$$(1.7) \quad \ell(\gamma) := \int_0^1 \beta(t, \gamma'(t)) dt$$

Odległość Bergmana pomiędzy dwoma punktami $z, \zeta \in \Omega$

$$(1.8) \quad \text{dist}_\Omega(z, \zeta) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ jest kawałkami } \mathcal{C}^1 \text{ krzywą taką, że } \gamma(0) = z, \gamma(1) = \zeta\}.$$

Odległość Bergmana jest rzeczywiście odległością i wyposaża obszar Ω w strukturę przestrzeni metrycznej.

Obserwacja 11. Jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , to zachodzi równość:

$$\text{dist}_U(z, \zeta) = \text{dist}_\Omega(F(z), F(\zeta)).$$

Niech $G(z) := \det(T_{i\bar{j}}(z))_{i,j=1..n}$. Wprowadźmy następującą formę różniczkową

$$(1.9) \quad \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n \tilde{T}_{i\bar{j}}(z) dz_i \wedge d\bar{z}_j := \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n \left((n+1)T_{i\bar{j}}(z) + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log G(z) \right) dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Powyższa forma jest także dodatnio określona (zob. np. [Lu08]) przy założeniu $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ oraz kählerowska, z potencjałem Kählera $\log(K(z, z)^{n+1}G(z))$. Nieco innej konstrukcji użyto w [Kat67]. Tak jak powyżej definiujemy długość wektora $\beta(z, X)$, długość krzywej $\tilde{\ell}(\gamma)$ i odległość $\tilde{\text{dist}}_\Omega(z, \zeta)$ względem tej nowej metryki kählerowskiej.

Obserwacja 12. powyższe obiekty zachowują się tak samo względem biholomorfizmów jak stosownie $\beta(z, X)$, $\ell(\gamma)$ i $\text{dist}_\Omega(z, \zeta)$.

Definicja 1.21. Dla obszaru $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$, $z_0 \in \Omega$ i $i = 1..n$,

$$w_i(z) = \sum_{j=1}^n T^{\bar{j}i}(z_0) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \log \frac{K(z, \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0},$$

gdzie $T^{\bar{j}i}(z_0)$ jest macierzą odwrotną do $(T_{i\bar{j}}(z))_{i,j=1..n}$, jest i -tą współrzędną reprezentatywną. Odwzorowanie $w : \Omega \ni z \rightarrow (w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z))^t \in \mathbb{C}^n$ nazwiemy odwzorowaniem generowanym przez współrzędne reprezentatywne.

Obserwacja 13. Ponieważ $\begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$ w punkcie z_0 redukuje się do macierzy jednostkowej I_n , w pewnym małym otoczeniu punktu z_0 odwzorowanie w będzie dobrze określoną immersją i iniekcją holomorficzną.

Obserwacja 14. Odwzorowanie w można dobrze (jednoznacznie) zdefiniować jako odwzorowanie holomorficzne (bez osobliwości) na całym Ω , poza zbiorem

$$W_{z_0} := \{z \in \Omega : K(z, z_0) = 0\}.$$

Logarytm nie powoduje potrzeby rozpatrzenia różnych gałęzi, gdyż poprzedzony jest on operacją różniczkowania.

Obserwacja 15. Odwzorowanie w jest immersją na całym Ω , poza zbiorem $W_{z_0} \cup \tilde{W}_{z_0}$, gdzie

$$\tilde{W}_{z_0} := \{z \in \Omega : \det\left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K(z, z_0)\right)_{i,j=1..n} = 0\}.$$

Obserwacja 16. Zbiory W_{z_0} i \tilde{W}_{z_0} są zbiorami analitycznym wymiaru co najwyżej $n - 1$.

Obserwacja 17. Gdy $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem jednospójnym to odwzorowanie $\frac{\sqrt{\pi K(z_0, z_0)}}{2} w_1$ (przy ustalonym $z_0 \in \Omega$) realizuje efektywnie biholomorfizm Ω na koło jednostkowe, przy czym $w_1(z_0) = 0$.

1.5. Holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana. Holomorficzna krzywizna sekcyjna dla ogólnej metryki kählerowskiej $g_{p\bar{q}}$ na obszarze $U \subset \mathbb{C}^n$, w punkcie $z \in U$ i w kierunku $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ jest dana następującym wzorem:

$$(1.10) \quad R_U^g(z, X) := \left(\sum_{p,q=1}^n g_{p\bar{q}} X_p \bar{X}_q \right)^{-2} \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{\bar{i}jkl} \bar{X}_i X_j X_k \bar{X}_l,$$

gdzie

$$R_{\bar{i}jkl} := -\frac{\partial^2 g_{j\bar{i}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + \sum_{r,s=1}^n g^{\bar{r}s} \frac{\partial g_{j\bar{r}}}{\partial z_k} \frac{\partial g_{s\bar{i}}}{\partial \bar{z}_l},$$

gdzie $g^{\bar{r}s}$ oznacza (r, s) -ty element macierzy odwrotnej do $g_{p\bar{q}}$. Wyrażenie w nawiasie w definicji R_U^g pełni funkcje normalizacyjne.

Obserwacja 18. Holomorficzna krzywizna sekcyjna nie zależy od długości wektora X , tylko od jego kierunku. Jest to więc wartość zależna tylko od wyboru płaszczyzny zespolonej

$$\{\lambda X : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

W przypadku gdy chcemy wyrazić holomorficzną krzywiznę sekcijną konkretnie dla metryki Bergmana, to za $g_{p\bar{q}}$ podstawiamy $\frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \log K(z, z)$. Przy takim wyborze będziemy opuszczać znaczek "g", pisząc $R_U(z, X)$, zamiast $R_U^g(z, X)$. Konwencja ta będzie obowiązywać również w przypadku pozostałych krzywizn, zdefiniowanych poniżej.

Twierdzenie 1.22. *Jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , to zachodzi równość*

$$R_U(z, X) = R_\Omega(F(z), F'X).$$

Twierdzenie 1.23 (Klembecka). *(zob. [Kle78], gdzie użyto innej notacji, stąd różnica w stałych) Holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana dla ograniczonego obszaru silnie pseudowypukłego Ω zachowuje się w następujący sposób przy brzegu*

$$\lim_{\Omega \ni p \rightarrow \partial\Omega} R_\Omega(p, X) = -\frac{2}{n+1}.$$

W szczególności granica nie zależy od kierunku X .

Twierdzenie 1.24 (Kima i Yu). *(zob. [KY96a]) Powyższe zachowanie R_Ω pozostaje bez zmian przy słabszych założeniach - gdy Ω jest obszarem silnie pseudowypukłym z brzegiem klasy \mathcal{C}^2 (tzn. zamiast zakładać gładkość lokalnej funkcji definiującej w Definicji 1.2 zakładamy tylko klasę \mathcal{C}^2).*

Twierdzenie 1.25 (Fuksa). *Holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana dla ograniczonego obszaru Ω w dowolnym punkcie $z \in \Omega$ i dla dowolnego kierunku $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ jest zawsze mniejsza niż 2.*

Następujący przykład pokazuje, że powyższe ograniczenie jest optymalne w słabym sensie

Przykład 1.26 (Lebeda). *(zob. [Leb71]) Dla obszaru*

$$\Omega_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, \dots, |z_{n-1}| < 1, |z_n| < h_\varepsilon(|z_{n-1}|)\},$$

gdzie

$$h_\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon^{-3}, & \text{jeżeli } 0 \leq r \leq \varepsilon \\ r^{-3}, & \text{jeżeli } \varepsilon \leq r \leq 1 \end{cases},$$

który jest ograniczony, zachodzi równość $R_{\Omega_\varepsilon}(0, (0, \dots, 0, 1, 0)^t) = 2 - \frac{6(3-2\varepsilon^2)^2}{(3-\varepsilon^4)(1-6\log(\varepsilon))}$. W szczególności

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_{\Omega_\varepsilon}(0, (0, \dots, 0, 1, 0)^t) = 2.$$

Następujący przykład pokazuje, że powyższe ograniczenie jest optymalne w mocnym sensie

Przykład 1.27 (Chena i Lee). *(zob. [CL09]) Obszar*

$$\Omega_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \operatorname{Im} z_3 > |z_1^4 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_2^4|^2\}$$

jest nieograniczony. Można jednak dobrać taki obszar Ω_2 ograniczony, gładki, pseudowypukły i zawierający zero, że $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ jest obszarem ograniczonym o gładkim brzegu. Zachodzi równość

$$\lim_{\Omega \ni p \rightarrow 0} R_\Omega(p, (1, 0, 0)^t) = 2,$$

pod warunkiem, że p dąży do brzegu w sposób niestyyczny.

Ponadto holomorficzna krzywizna sekcijna dla metryki Bergmana może być nieograniczona od dołu

Przykład 1.28 (Herborta). (zob. [Her07]) Niech $a, m \in \mathbb{N}$ będą takie, że $2a < m$. Obszar

$$\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2 + |z_2|^{2m} + |z_2 z_3|^{2a} + |z_3|^{2m} < 0\}$$

jest ograniczony i posiada gładki brzeg. Zachodzi na nim równość

$$\lim_{t \rightarrow 0} R_\Omega(t(1, 0, 0), (0, 1, 1)^t) = -\infty.$$

Zauważmy, że wszystkie powyższe przykłady podane są w przestrzeniach o wyższych wymiarach. W sytuacji $n = 1$ zachodzi

Obserwacja 19. *Jeżeli $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ jest obszarem z gładkim brzegiem, to holomorficzna krzywizna sekcijna dla metryki Bergmana obszaru Ω jest ograniczona od dołu oraz istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $R_\Omega < 2 - \varepsilon$, dla każdego punktu $z \in \Omega$. Dzieje się tak dlatego, że obszar o gładkim brzegu w \mathbb{C} jest silnie pseudowypukły (warunki są pusto spełnione), a zatem zachodzi Twierdzenie 1.23. Ponadto holomorficzna krzywizna sekcijna dla metryki Bergmana nie może osiągnąć wartości 2 ani wartości $-\infty$ w punkcie wewnętrznym obszaru (zob. wzór (1.11) poniżej).*

Prawdziwe jest też nieco ogólniejsze stwierdzenie

Obserwacja 20. *Jeżeli $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ jest obszarem skończenie spójnym, to holomorficzna krzywizna sekcijna dla metryki Bergmana obszaru Ω jest ograniczona od dołu oraz istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $R_\Omega < 2 - \varepsilon$, dla każdego punktu $z \in \Omega$.*

Uwaga. Dowód tego faktu przebiega w dwóch krokach. W pierwszym korzystamy z faktu, że jądro Bergmana (a więc i wszystkie skonstruowane przy jego pomocy obiekty) przedłużają się przez izolowane punkty brzegowe. Tak więc holomorficzna krzywizna sekcijna dla metryki Bergmana dla obszaru Ω jest zawężeniem holomorficznego krzywizny sekcijnej dla metryki Bergmana dla obszaru Ω_1 , powstałego z Ω poprzez "zaklejenie jednopunktowych dziur" (jest ich skończona ilość). Wynika stąd, że w jednopunktowych składowych brzegu obszaru Ω mamy stosowne ograniczenie. W ten sposób możemy założyć, że żadna składowa dopełnienia obszaru Ω nie jest jednopunktowa. Teraz wystarczy skorzystać z klasycznego twierdzenia, które mówi, że taki obszar jest biholomorficzny z obszarem o gładkim brzegu (zob. np. [Sib70]) i Twierdzenia 1.22.

Obserwacje te pozwalają lepiej zrozumieć istotę przykładu pierwszego z rozdziału 4.

Ponadto holomorficzna krzywizna sekcijna wyraża się następującym wzorem

$$(1.11) \quad R_U(z_0, X) := 2 - \frac{J_{0,U}(z_0) J_{2,U}(z_0; X, X)}{J_{1,U}(z_0; X)^2},$$

1.6. Holomorficzna krzywizna bisekcijna dla metryki Bergmana. Holomorficzna krzywizna bisekcijna (lub tylko krzywizna bisekcijna) jest pojęciem względnie młodym, pojawiło się ono w pracy [GK67]. Jak się jednak wkrótce okazało, jest to pojęcie bardzo ważne, przy czym rozmaite założenia o holomorficznym krzywiznie bisekcijnej niosą głębokie informacje o geometrii. Dzieje się tak dlatego, że holomorficzna krzywizna bisekcijna niesie więcej informacji niż holomorficzna krzywizna sekcijna.

Holomorficzna krzywizna bisekcijna dla metryki kählerowskiej $g_{p\bar{q}}$, wyraża się wzorem

$$(1.12) \quad \text{Bisec}_U^g(z, X, Y) := \left(\sum_{p,q=1}^n g_{p\bar{q}} X_p \bar{X}_q \right)^{-1} \left(\sum_{p,q=1}^n g_{p\bar{q}} Y_p \bar{Y}_q \right)^{-1} \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{i\bar{j}k\bar{l}} \bar{X}_i X_j Y_k \bar{Y}_l,$$

dla $z \in U \subset \subset \mathbb{C}^n$, $X, Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Obserwacja 21. Holomorphyzna krzywizna bisekcyjna nie zależy od długości wektorów X, Y , tylko od ich kierunków. Jest to więc wartość zależna tylko od wyboru płaszczyzn zespolonych $\{\lambda X : \lambda \in \mathbb{C}\}$ i $\{\lambda Y : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Obserwacja 22. Jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorphyznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , to zachodzi równość

$$\text{Bisec}_U(z, X, Y) = \text{Bisec}_\Omega(F(z), F'X, F'Y).$$

Obserwacja 23. Zachodzi równość

$$\text{Bisec}_U(z, X, X) = R_U(z, X),$$

w szczególności przykłady Lebeda, Chena i Lee oraz Herborta działają również w przypadku holomorphyznej krzywizny bisekcyjnej dla metryki Bergmana.

Autorstwo następującego wzoru przypisuje się Andrei Pagano (zob.[KK03]) w [Pag].

$$(1.13) \quad R_U(z_0, X, Y) := 2 - \frac{J_{0,U}(z_0) J_{2,U}(z_0; X, Y)}{J_{1,U}(z_0; X) J_{1,U}(z_0; Y)},$$

W szczególności stała 2, podobnie jak w przypadku holomorphyznej krzywizny sekcyjnej jest uniwersalnym ograniczeniem górnym dla holomorphyznej krzywizny bisekcyjnej dla metryki Bergmana.

1.7. Krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana. Krzywizna Ricciego dla metryki kählerowskiej $g_{p\bar{q}}$ dana jest następującym wzorem

$$(1.14) \quad \text{Ric}_U^g(z, X) := \left(\sum_{p,q=1}^n g_{p\bar{q}} X_p \bar{X}_q \right)^{-1} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n g^{\bar{i}j} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \right) X_k \bar{X}_l,$$

dla $z \in U \subset \subset \mathbb{C}^n$, $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Wyraz $\sum_{i,j=1}^n g^{\bar{i}j} R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ będziemy oznaczać przez $\text{Ric}_{k\bar{l}}^g$. Można go interpretować jako (k, l) -ty element pewnej $n \times n$ macierzy (macierzy współczynników formy Ricciego)

Obserwacja 24. Dokonując obliczeń można wykazać, że

$$\text{Ric}_U^g(z, X) = - \left(\sum_{p,q=1}^n g_{p\bar{q}} X_p \bar{X}_q \right)^{-1} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \log(\det(g_{j\bar{i}})_{i,j=1..n}) X_k \bar{X}_l.$$

Z krzywizną Ricciego metryki Bergmana stowarzyszona jest więc następująca $(1, 1)$ forma (por. wzór (1.9))

$$(1.15) \quad \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n \text{Ric}_{i\bar{j}}(z) dz_i \wedge d\bar{z}_j := -\sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log G(z) dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Obserwacja 25. Ograniczeniem górnym dla krzywizny Ricciego metryki Bergmana w punkcie $z \in \Omega$ jest największa (a dolnym najmniejsza) wartość własna macierzy

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log(\det T_{k\bar{l}})_{i,j=1..n}\right) (T_{p\bar{q}})_{p,q=1..n}^{-1}.$$

Obserwacja 26. Jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , to zachodzi równość

$$Ric_U(z, X) = Ric_\Omega(F(z), F'X).$$

Twierdzenie 1.29. (zob. [CY80],[Eng08]) Krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana dla ograniczonego obszaru silnie pseudowypukłego Ω zachowuje się w następujący sposób przy brzegu

$$\lim_{\Omega \ni p \rightarrow \partial\Omega} Ric_\Omega(p, X) = -1.$$

W szczególności granica nie zależy od kierunku X .

Ograniczeniem górnym dla krzywizny Ricciego jest $n + 1$ (zob. [Kob59]). Następujący przykład pokazuje, że jest to ograniczenie optymalne (w słabym sensie)

Przykład 1.30 (Kytmanowa i Lebeda). (zob. [Kyt73] dla $n = 2$ i [Leb74] dla $n \geq 2$) Niech

$$\Omega_a := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 2a, ||z_1|^4 - |z_2|^4| < 4, \\ ||z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_s|^2 < 2, s = 3, \dots, n\},$$

dla $a \in \mathbb{R}, a > 1$. W szczególności gdy $n = 2$ ostatnie $n - 2$ warunki nie występują.

Zachodzi równość

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \max_{X \in \mathbb{C}^n} Ric_{\Omega_a}(0, X) = \lim_{a \rightarrow \infty} \min_{X \in \mathbb{C}^n} Ric_{\Omega_a}(0, X) = n + 1.$$

Uwaga. Obszary Ω_a nie są pseudowypukłe, w [Leb74] znalezienie rodziny pseudowypukłych obszarów, wykazujących optymalność stałej $n + 1$ postawione jest jako problem otwarty. Oczywiście Twierdzenie 0.6 rozwiązuje ten problem w przypadku jednowymiarowym.

Inny przykład wykazujący optymalność podano w [Naz73].

Wyrażenie krzywizny Ricciego przy pomocy wielkości typu (1.1) - (1.3) jest możliwe, jednakże wzory wyglądają nieco sztucznie, gdyż same wyrażenia zależą od metryki.

Wprowadźmy wielkość

$$J_{3,U}(z_0; X) := \sup \left\{ X^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{i,j=1..n} \overline{T^{-1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{i,j=1..n}} \bar{X} : f \in L^2 \cap \mathcal{O}(U), \right. \\ \left. \int_U |f|^2 d\lambda \leq 1, f(z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) = 0, j = 1..n \right\}. \quad (1.16)$$

Uwaga. W przeciwieństwie do wielkości J_0, J_1 i J_2 , dla wielkości J_3 własność monotoniczności względem obszaru (z Obserwacji 2) nie zachodzi (zob. [KY96b]).

Zachodzi równość (zob. [KY96b])

$$Ric(z, X) = n + 1 - \frac{J_{3,U}(z; X)}{J_{1,U}(z; X)}.$$

Alternatywnie możemy się posłużyć następującym wzorem. Jeżeli e_1, \dots, e_n stanowią bazę ortonormalną (względem metryki $g_{p\bar{q}}$) w punkcie $z \in U$, a wektor X jest niezerowy to zachodzi wzór (zob. [GK67])

$$Ric_U^g(z, X) = Bisec_U^g(z, e_1, X) + \dots + Bisec_U^g(z, e_n, X).$$

Tak więc dostajemy wzór

$$Ric_U(z, X) = 2n - \sum_{j=1}^n \frac{J_{0,U}(z; X) J_{2,U}(z; X, e_j)}{J_{1,U}(z; X) J_{1,U}(z; e_j)}.$$

1.8. Krzywizna skalarna dla metryki Bergmana. Krzywizna skalarna dla metryki kählerowskiej dana jest wzorem

$$(1.17) \quad Scal_U^g(z) := \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} g^{\bar{j}\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}},$$

dla $z \in U \subset \subset \mathbb{C}^n$.

Obserwacja 27. Jeżeli $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między ograniczonymi obszarami U i Ω , to zachodzi równość

$$Scal_U(z) = Scal_\Omega(F(z)).$$

Twierdzenie 1.31. (zob. [Eng08]) Krzywizna skalarna dla metryki Bergmana dla ograniczonego obszaru silnie pseudowypukłego Ω zachowuje się w następujący sposób przy brzegu

$$\lim_{\Omega \ni p \rightarrow \partial\Omega} Scal_\Omega(p, X) = -n.$$

W szczególności granica nie zależy od kierunku X .

Przykład 1.32 (Kytmanowa i Lebeda). Przykład Kytmanowa i Lebeda działa także dla krzywizny skalarnej metryki Bergmana. W szczególności zachodzi równość

$$\lim_{a \rightarrow \infty} Scal_{\Omega_a}(0, X) = n(n+1),$$

co dowodzi optymalności stałej $n(n+1)$ (por. wzór (1.19) poniżej).

Wprowadźmy wielkość

$$(1.18) \quad J_{4,U}(z_0) := \sup \left\{ Tr \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{i,j=1..n} \overline{T^{-1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{i,j=1..n}} T^{-1} \right] : f \in L^2 \cap \mathcal{O}(U), \int_U |f|^2 d\lambda \leq 1, f(z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_0) = 0, j = 1..n \right\}.$$

Uwaga. Tak jak w przypadku wielkości J_3, J_4 nie posiada (na ogół) własności monotoniczności względem obszaru.

Zachodzi równość (zob. [KY96b])

$$(1.19) \quad Scal(z) = n(n+1) - \frac{J_{4,U}(z)}{J_{0,U}(z)}.$$

1.9. **Przypadek** $n = 1$. W przypadku gdy $n = 1$, zgodnie z obserwacjami na temat zależności tylko od kierunku i ponieważ w \mathbb{C} nie ma możliwości wyboru różnych kierunków, X oraz Y nie będą występować w wyrażeniach R_Ω , $Bisec_\Omega$ i Ric_Ω . Ponadto zachodzi

Obserwacja 28. *Gdy $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ to*

$$R_\Omega = Bisec_\Omega = Ric_\Omega = Scal_\Omega = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log K(z, z) \right)}{\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log K(z, z)},$$

co jest krzywizną Gaussa (przy konwencji, że operator Laplace'a Δ jest znormalizowany tak, aby $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$, inaczej, przy klasycznej definicji dostajemy różnicę o stałą) powierzchni z metryką

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log K(z, z).$$

Dlatego też będziemy w przypadku $n = 1$ używać określenia "krzywizna metryki Bergmana", bez konkretyzowania o którą z ww. krzywizn nam chodzi.

1.10. **Zupełność metryki $\tilde{\beta}$.** Zupełności danej metryki kählerowskiej (tj. własność - każdy ciąg Cauchy'ego względem odległości całkowitej względem danej metryki jest zbieżny) jest kluczową własnością. Dzięki bliskim związkom metryki $\tilde{\beta}$ z metryką Bergmana β , oraz prostym obserwacjom dostajemy

Twierdzenie 1.33. *Niech $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, dla którego metryka β jest zupełna i istnieje stała $C > 0$ taka, że krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana jest ograniczona od góry przez $n + 1 - C$. Wtedy metryka $\tilde{\beta}$ jest zupełna.*

Dowód. Z założenia

$$\tilde{\beta}^2(z, X) = \sum_{i,j=1}^n ((n+1)T_{i\bar{j}} - Ric_{i\bar{j}}) X_i \bar{X}_j \geq \sum_{i,j=1}^n C T_{i\bar{j}} X_i \bar{X}_j = C \beta^2(z, X).$$

Wiadomo, że gdy dana metryka jest zupełna, to zupełna jest też każda metryka nie mniejsza od niej. Ponadto zupełność metryki zachowuje się po przeskalowaniu. \square

Uwaga. Zupełność metryki Bergmana β była obiektem licznych badań, wiadomo w szczególności, że gdy Ω jest obszarem hiperwypukłym (zob. [BP98] i [Her99]) to β jest zupełna. Dzięki temu do udowodnienia zupełności $\tilde{\beta}$ zasadniczo potrzebna jest tylko znajomość zachowania krzywizny Ricciego metryki Bergmana

Zupełnie analogicznie dostajemy

Twierdzenie 1.34. *Niech $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, dla którego metryka $\tilde{\beta}$ jest zupełna i krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana jest ograniczona od dołu przez stałą C . Wtedy metryka β jest zupełna.*

i

Twierdzenie 1.35. *Niech $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem, dla którego istnieje stała $C > 0$ taka, że krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana jest ograniczona między stałymi*

$$-C < Ric_\Omega(z, X) < n + 1 - \frac{1}{C}.$$

Wtedy zupełność metryki $\tilde{\beta}$ jest równoważna zupełności metryki β .

2. WSPÓLRZĘDNE REPREZENTATYWNE

2.1. Konstrukcja Kobayashiego. Skończenie wymiarową przestrzenią rzutową $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, wymiaru n , nazwiemy przestrzeń ilorazową $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, gdzie \sim jest następującą relacją równoważności:

Niech $z, \zeta \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Punkty z, ζ są w relacji $z \sim \zeta$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że $z = \lambda\zeta$. Inaczej mówiąc klasami abstrakcji relacji \sim (a więc punktami $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$) są poszczególne proste zespolone z przestrzeni \mathbb{C}^{n+1} , przechodzące przez $\{0\}$. Tak wprowadzona przestrzeń rzutowa posiada strukturę rozmiatości zespolonej. Każdy punkt $[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ odpowiada prostej, która należy do któregoś ze zbiorów

$$U_j := \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_j \neq 0\} \cup \{0\}, j = 0..n.$$

Odwzorowanie

$$\pi_j : \mathbb{C}^{n+1} \ni (z_0, z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \in \mathbb{C}^n,$$

jest dobrze zdefiniowane na zbiorze U_j i stałe na prostej zespolonej

$$\{\lambda(z_0, z_1, \dots, z_n) : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset U_j,$$

z wyjątkiem punktu $\{0\}$. Prosta ta odpowiada klasie $[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, tak więc odwzorowanie π_j można poprawnie i jednoznacznie rozszerzyć na klasę $[z]$

$$\pi_j([z]) := \pi_j(z) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right),$$

dla dowolnego niezerowego punktu z z prostej, odpowiadającej klasie $[z]$. Odwzorowanie π_j zadaje mapę z otoczenia

$$\Omega_j := \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : z \in U_j\}$$

w \mathbb{C}^n . Tak więc $\left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)$ stanowią współrzędne lokalne punktu $[z]$ z rozmiatości $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ na podzbiorze Ω_j . Na rozmiatości $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ możemy zadać metrykę Fubiniiego-Studiego, która jest metryką stowarzyszoną z formą, która w Ω_j ma postać

$$\sum_{p,q=0}^n \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \log \left(1 + \frac{z_0 \bar{z}_0}{z_j \bar{z}_j} + \dots + \frac{z_{j-1} \bar{z}_{j-1}}{z_j \bar{z}_j} + \frac{z_{j+1} \bar{z}_{j+1}}{z_j \bar{z}_j} + \dots + \frac{z_n \bar{z}_n}{z_j \bar{z}_j} \right) dz_p \wedge d\bar{z}_q =$$

$$\sum_{p,q=0}^n \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \log(z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n) dz_p \wedge d\bar{z}_q,$$

a więc jest to forma globalna, niezależna od Ω_j .

Odległość geodezyjna względem tej metryki na rozmiatości $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ wynosi

$$\text{dist}([z], [\zeta]) = \arccos \frac{|z_0 \bar{\zeta}_0 + z_1 \bar{\zeta}_1 + \dots + z_n \bar{\zeta}_n|}{\sqrt{(z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n)(\zeta_0 \bar{\zeta}_0 + \zeta_1 \bar{\zeta}_1 + \dots + \zeta_n \bar{\zeta}_n)}},$$

gdzie (z_0, z_1, \dots, z_n) i $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ są dowolnymi niezerowymi punktami z prostych odpowiadających klasom $[z]$ i stosownie $[\zeta]$. Powyższa równość wyraża fakt, że "odległość Fubiniiego-Studiego to kąt między prostymi".

Analogiczne konstrukcje można przeprowadzić bez założenia skończoności wymiaru. Powstają jednak problemy ze zbieżnością szeregów w wyrażeniach. Np. poprawna definicja

$$\sum_{p,q=0}^n \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \log(z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots) dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

wymaga założenia, aby szereg

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j \bar{z}_j$$

był zbieżny. Okazuje się, że dla dowolnej przeliczalnie-wymiarowej zespolonej przestrzeni Hilberta powyższa konstrukcja może być poprawnie przeprowadzona. Zatem punkty

$$0 \neq z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \text{ i } 0 \neq \zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots),$$

gdzie z_i oraz ζ_j są współrzędnymi z i ζ w ustalonej bazie ortonormalnej, są w relacji \sim wtedy i tylko wtedy gdy $z = \lambda \zeta$, dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Przestrzeń H/\sim , dla ustalonej przestrzeni Hilberta H , nazwiemy projektywizacją H . Istnieje naturalne utożsamienie między powyższą przestrzenią, a przestrzenią rzutową $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Strukturę metryczną zadajemy przez formę

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log(z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots) dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Metrykę stowarzyszoną z tą formą będziemy nazywać metryką Fubinię-Studiego i oznaczać ją przez ω_{FS} . Odległość geodezyjna względem tej metryki to

$$(2.1) \quad dist([z], [\zeta]) = \arccos \frac{|\langle z, \zeta \rangle|}{\sqrt{\langle z, z \rangle \langle \zeta, \zeta \rangle}},$$

dla $z \in [z]$ i $\zeta \in [\zeta]$.

Uwaga. Tak jak w przypadku skończenie-wymiarowym, powyższy wzór jest niezależny od wyboru reprezentantów klas $[z]$ i $[\zeta]$.

Konstrukcja Kobayashiego (lub zanurzenie Kobayashiego, zob. [Kob59], choć wzmiankę o takiej konstrukcji znajdziemy też we wcześniejszej pracy [Boc47]) to holomorficzne zanurzenie obszaru Ω w nieskończenie-wymiarową przestrzeń rzutową - projektywizację przestrzeni Hilberta, będącej przestrzenią dualną (w sensie analizy funkcjonalnej) do przestrzeni Hilberta $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$ (czyli przestrzenią $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)'$). Konstrukcja Kobayashiego wygląda następująco. Ustalmy bazę ortonormalną $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, $\varphi_j \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$. Zanurzenie Kobayashiego to odwzorowanie $\iota_{K_0, \varphi}$, zdefiniowane przez

$$\Omega \ni z \rightarrow \iota_{K_0, \varphi}(z) = [(\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots)] = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z) \bar{\varphi}_j(\cdot) \right] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty.$$

Łatwo zauważyć, że

$$(2.2) \quad \iota_{K_0, \varphi}(z) = [\langle \circ, K(\cdot, z) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)}].$$

Konstrukcja ta jest niezwykle ważna, ze względu na następujące twierdzenie (zob. [Kob59], [Bło])

Twierdzenie 2.1. *Zanurzenie Kobayashiego jest izometrią z (Ω, β) w ($\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \omega_{FS}$). Równoważnie, cofnięcie $\iota_{K_0, \varphi}^* \omega_{FS}$ standardowej metryki Fubinię-Studiego na $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ jest dokładnie metryką Bergmana obszaru Ω .*

Powyższe twierdzenie, w połączeniu ze wzorem na odległość w przestrzeni rzutowej (2.1) daje nam następującą nierówność (zob. [Bł05] lub [Bł] i Proposition 4.1.6 tamże):

$$(2.3) \quad \text{dist}_\Omega(z, \zeta) \geq \arccos \frac{|K(z, \zeta)|}{\sqrt{K(z, z)K(\zeta, \zeta)}},$$

ponieważ

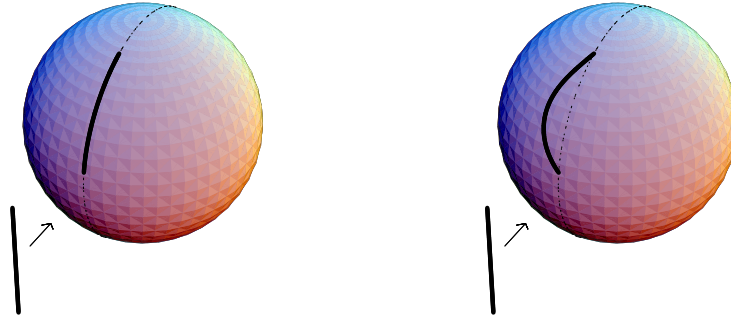
$$\begin{aligned} \langle \langle \circ, K(\cdot, z) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)}, \langle \circ, K(\cdot, \zeta) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)} \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)'} &= K(z, \zeta), \\ \langle \langle \circ, K(\cdot, z) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)}, \langle \circ, K(\cdot, z) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)} \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)'} &= K(z, z) \end{aligned}$$

i

$$\langle \langle \circ, K(\cdot, \zeta) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)}, \langle \circ, K(\cdot, \zeta) \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)} \rangle_{L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)'} = K(\zeta, \zeta).$$

Nierówność ta wyraża fakt, że zanurzenie izometryczne nie zwiększa odległości geodezyjnej.

Uwaga. Równość w słabej nierówności (2.3) nie musi zachodzić. Równość miałaby miejsce, gdyby odległość geodezyjna z (Ω, β) była zachowana w obrazie poprzez $\iota_{K_0, \varphi}$ (tzn. $\iota_{K_0, \varphi}$ zachowywałaby nie tylko długości krzywych ale i odległości między ich końcami). Oznaczałoby to, że obraz każdej geodezyjnej w metryce β jest geodezyjną w metryce ω_{FS} (takie zanurzenia nazywane są całkowicie geodezyjnymi, zob. [Kli82]).



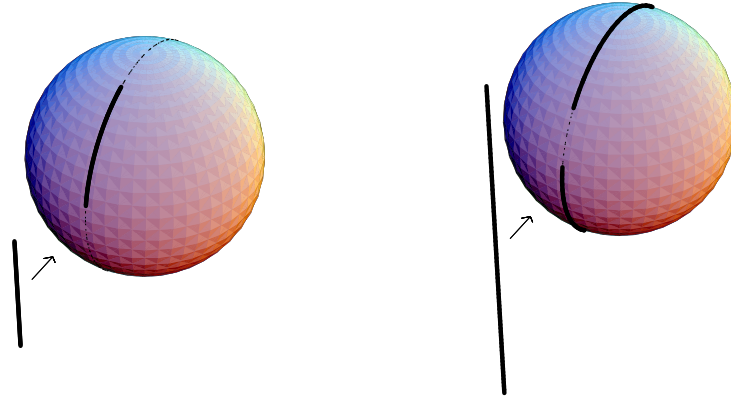
(a) Zanurzenie izometryczne odcinka w sferę, które jest całkowicie geodezyjne (b) Zanurzenie izometryczne odcinka w sferę, które nie jest całkowicie geodezyjne

RYSUNEK 2. Zanurzenia izometryczne odcinka w sferę

Ponadto obraz końca geodezyjnej, rozpoczynającej się w danym punkcie $z \in \Omega$ nie może przekroczyć tzw. "cut locus" (tj. zbioru punktów, po przekroczeniu których geodezyjne przestają być drogami minimalizującymi odległość, zob. [Kli82]) obrazu punktu z , $\iota_{K_0, \varphi}(z)$ w $(\mathbb{C}P^\infty, \omega_{FS})$.

Ze względu na to, że są to bardzo restrykcyjne założenia co do $\iota_{K_0, \varphi}$, naturalne jest pytanie na ile nierówność (2.3), a zatem i Twierdzenie 0.1 są optymalne. Odpowiedzi udziela Twierdzenie 0.7.

Wykorzystując nierówność (2.3), Twierdzenie 0.1 wynika natychmiast, gdyż $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.



(a) Zanurzenie, które nie przekracza "cut locus" obrazu jednego końca (b) Zanurzenie, które przekracza "cut locus" obrazu jednego końca, a zatem odległość między obrazami końców nie pokrywa się z długością krzywej

RYSUNEK 3. Całkowicie geodezyjne zanurzenia izometryczne odcinka w sferę

2.2. Konstrukcja Lu Qi-Kenga. Konstrukcja Lu Qi-Kenga (lub zanurzenie Lu Qi-Kenga) jest w pewnym sensie analogią zanurzenia Kobayashiego, jednakże docelowa rozmaitość (przestrzeń) jest inna.

Niech $V := \{(v_1, \dots, v_k) \in \overbrace{\mathbb{C}^m \times \dots \times \mathbb{C}^m}^k : v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = 0\}$, $k \leq m$, będzie zbiorem wszystkich k -tek wektorów z \mathbb{C}^m , które są liniowo zależne (a zatem nie generują podprzestrzeni wymiaru k). Skończenie wymiarowym Grassmanianem, k -wymiarowych podprzestrzeni zespolonych \mathbb{C}^m nazwiemy przestrzeń ilorazową $\overbrace{\mathbb{C}^m \times \dots \times \mathbb{C}^m}^k \setminus V / \sim$, gdzie dwa zestawy $(v_1, \dots, v_k), (q_1, \dots, q_k) \in \overbrace{\mathbb{C}^m \times \dots \times \mathbb{C}^m}^k$ są w relacji \sim ,

$$(v_1, \dots, v_k) \sim (q_1, \dots, q_k) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (v_1, \dots, v_k) = (q_1, \dots, q_k)P,$$

dla pewnej nieosobliwej zespolonej $k \times k$ macierzy P . Klasami abstrakcji relacji \sim są poszczególne k -wymiarowe podprzestrzenie liniowe \mathbb{C}^m , a przestrzeń ilorazowa posiada strukturę rozmaitości zespolonej.

Tak zdefiniowaną rozmaitość będziemy oznaczać przez $F(k, m)$. Wymiar zespolony tej rozmaitości wynosi $k(m - k)$. Łatwo zauważyć, że $F(1, n + 1) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Zanurzeniem Plückera nazwiemy odwzorowanie, które n -wymiarowej przestrzeni wektorowej, rozpiętej przez wektory $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^m$, $n \leq m$, przypisuje element $[v_1 \wedge \dots \wedge v_n] \in P(\Lambda^n \mathbb{C}^m) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$, gdzie $P(\Lambda^n \mathbb{C}^m)$ jest projektywizacją n -tej potęgi zewnętrznej $\Lambda^n \mathbb{C}^m$. Odwzorowanie to będziemy oznaczać przez $\iota_{Plü}$. Można udowodnić, że

$$\iota_{Plü} : F(n, m) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$$

jest zanurzeniem.

Niech H będzie przeliczalnie-wymiarową zespoloną przestrzenią Hilberta. Będziemy ją utożsamiać z \mathbb{C}^∞ w następujący sposób. Ustalmy bazę ortonormalną e_0, e_1, \dots przestrzeni H . Dla każdego

$$(2.4) \quad H \ni z = \sum_{j=0}^{\infty} z_j e_j \rightarrow (z_0, z_1, \dots) \in \mathbb{C}^\infty,$$

utożsamia j -tą współrzędną rozwinięcia w bazie ortonormalnej z j -tą współrzędną \mathbb{C}^∞ .

Możemy teraz, analogicznie jak powyżej, zdefiniować obiekt $F(n, \infty)$, nieskończenie wymiarowy Grassmanian n -wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni Hilberta.

Ze względu na (2.4), założeniem, które będziemy pomijać poniżej jest, że gdy

$$(2.5) \quad p = \left[\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{F}(n, \infty), \text{ to } \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}|^2 < \infty, i = 1..n,$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza klasę względem relacji \sim , a macierz $(p_{ij})_{i=1..n, j=1..\infty}$ reprezentuje podprzestrzeń liniową generowaną przez wektory $(p_{i1}, p_{i2}, \dots)^t, i = 1..n$.

Na $F(n, \infty)$ występuje struktura metryczna, tzw. metryka Fubiniiego-Studiego dla Grassmanianu $\tilde{\omega}_{FS}$, której nie należy mylić z ω_{FS} . Metryka ta jest metryką stowarzyszoną z formą

$$Tr((I_n + ZZ^*)^{-1} dZ \wedge (I + Z^*Z)^{-1} dZ^*),$$

we współrzędnych lokalnych Z Grassmanianu (zob. [Ber97]), gdzie " \wedge " oznacza iloczyn zewnętrzny macierzy, tj. $(q_{ij})_{i=1..k, j=1..l} \wedge (r_{pq})_{p=1..l, q=1..m} = (\sum_{j=1}^l q_{ij} \wedge r_{jq})_{i=1..k, q=1..m}$.

Można udowodnić, że $\tilde{\omega}_{FS}$ jest cofnięciem poprzez zanurzenie Plückera ($m = \infty$) metryki ω_{FS} na $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$,

$$(2.6) \quad \tilde{\omega}_{FS} = \iota_{Pl\ddot{u}}^* \omega_{FS}.$$

Jest to prawie natychmiastowe uogólnienie stosownego wyniku dla przestrzeni skończenie wymiarowych, niemniej jednak, ze względu na to, że dowód ten nie występuje w literaturze, poniżej go przedstawimy. W przypadku skończenie-wymiarowym dowód można znaleźć w [Lei61], Satz 7.

Bez straty ogólności (jest to założenie, które wyłącznie upraszcza notację, nie wchodząc w szczegóły możemy to założyć, ze względu na tranzytywność automorfizmów Grassmanianu oraz niezmienniczość metryki $\tilde{\omega}_{FS}$ względem tych automorfizmów, zob. [Ber97]) można założyć, że $p \in \mathbb{F}(n, \infty)$ należy do zbioru $\mathbb{F}(n, \infty)$, dla którego macierz reprezentująca p ,

$$\left(\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots \end{pmatrix} \right), \text{ dla } p = \left[\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots \end{pmatrix} \right],$$

ma własność, że pierwszy $n \times n$ minor, $\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ jest nieosobliwy. Faktem jest, że każda macierz reprezentująca klasę p posiada tą własność. Niech

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_{1n+1} & p_{1n+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{nn+1} & p_{nn+2} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Macierz, powstała z zapisania obok siebie bloków (I_n, Z) reprezentuje p , co więcej taka reprezentacja jest jedyna. Będziemy mówić, że Z jest lokalną współrzędną p w otoczeniu

klasy $\left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \right]$.

Zanurzenie Plückera odwzorowuje przestrzeń wektorową, rozpiętą przez wektory $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^\infty$ w element $[v_1 \wedge \cdots \wedge v_n] \in P(\Lambda^n \mathbb{C}^\infty) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. W lokalnych współrzędnych można to zapisać jako

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & z_{11} & z_{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & z_{n1} & z_{n2} & \cdots \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{F}(n, \infty)} \rightarrow [(e_1 + z_{11}e_{n+1} + z_{12}e_{n+2} + \cdots) \wedge \cdots \wedge (e_n + z_{n1}e_{n+1} + z_{n2}e_{n+2} + \cdots)]_{P(\Lambda^n \mathbb{C}^\infty)} =$$

$$\left[e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \sum'_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_n) \neq \\ (-n+1, -(n-1)+1, \dots, 0)}} \det \begin{pmatrix} z_{1j_1} & \cdots & z_{1j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{nj_1} & \cdots & z_{nj_n} \end{pmatrix} e_{j_1+n} \wedge \cdots \wedge e_{j_n+n} \right],$$

gdzie zakładamy, że $\begin{pmatrix} z_{1-n} & \cdots & z_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n-n} & \cdots & z_{n0} \end{pmatrix} = I_n$.

Isomorfizm $P(\Lambda^n \mathbb{C}^\infty) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ jest zrealizowany poprzez uporządkowanie leksykograficzne

$$\tilde{e}_s = e_{j_1(s)+n} \wedge e_{j_2(s)+n} \wedge \cdots \wedge e_{j_n(s)+n}.$$

Ponieważ $\tilde{e}_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, lokalną współrzędną obrazu p w $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ będzie

$$\sum_{s=1}^{\infty} \det \begin{pmatrix} z_{1j_1(s)} & \cdots & z_{1j_n(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{nj_1(s)} & \cdots & z_{nj_n(s)} \end{pmatrix} \tilde{e}_s.$$

Metryka Fubiniego-Studiego ω_{FS} to metryka stowarzyszona z $\partial\bar{\partial} \log(1+WW^*)$ (gwiazdka oznacza tu i niżej macierz sprzężoną i transponowaną), dla $W = (w_1, w_2, \dots)$ - lokalnej współrzędnej $w = [(1, w_1, w_2, \dots)]$ prostej o kierunku $\tilde{e}_0 + \sum_{s=1}^{\infty} w_s \tilde{e}_s$ w \mathbb{C}^∞ .

Metryka w punkcie, będącym obrazem (I_n, Z) jest stowarzyszona z

$$\partial\bar{\partial} \log \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} z_{1j_1(s)} & \cdots & z_{1j_n(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{nj_1(s)} & \cdots & z_{nj_n(s)} \end{pmatrix} \right|^2 \right),$$

co na mocy klasycznego twierdzenia Cauchy'ego-Bineta jest równe $\partial\bar{\partial}\log\det(I+ZZ^*)$ (problem ze zbieżnością tu nie występuje, ze względu na założenie (2.5)).

Skorzystamy ze znanych wzorów wyrażających pochodną wyznacznika i macierzy odwrotnej (zob. np. [MN99]).

$$\bar{\partial}\det A = \det A \operatorname{Tr}(A^{-1}\bar{\partial}A), \quad (\text{wzór Jacobiego})$$

$$(2.7) \quad \partial A^{-1} = -A^{-1}(\partial A)A^{-1}.$$

Przekształcając dalej, dostajemy

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\log(\det(I+ZZ^*)) &= \partial \frac{\det(I+ZZ^*) \operatorname{Tr}((I_n+ZZ^*)^{-1}\bar{\partial}(I_n+ZZ^*))}{\det(I+ZZ^*)} = \\ \partial \operatorname{Tr}((I_n+ZZ^*)^{-1}ZdZ^*) &= \operatorname{Tr}(-(I_n+ZZ^*)^{-1}(\partial(I_n+ZZ^*))(I_n+ZZ^*)^{-1}ZdZ^* + \\ &+ (I_n+ZZ^*)^{-1}dZ \wedge dZ^*) = \operatorname{Tr}((I_n+ZZ^*)^{-1}dZ \wedge (I-Z^*(I_n+ZZ^*)^{-1}Z)dZ^*). \end{aligned}$$

To co pozostało do udowodnienia to równość

$$I - Z^*(I_n + ZZ^*)^{-1}Z = (I + Z^*Z)^{-1}$$

Mnożąc przez $I + Z^*Z$ dostajemy

$$\begin{aligned} (I - Z^*(I_n + ZZ^*)^{-1}Z)(I + Z^*Z) &= I + Z^*Z - Z^*(I_n + ZZ^*)^{-1}(Z + ZZ^*Z) = \\ I + Z^*Z - Z^*(I_n + ZZ^*)^{-1}(I_n + ZZ^*)Z &= I + Z^*Z - Z^*Z = I, \end{aligned}$$

Stąd

$$\operatorname{Tr}(I_n + ZZ^*)^{-1}dZ \wedge (I + Z^*Z)^{-1}dZ^* = \partial\bar{\partial}\log\det(I + ZZ^*),$$

co dowodzi (2.6).

Niech przestrzenią Hilberta H będzie przestrzeń $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$. Ustalmy bazę ortonormalną $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ tej przestrzeni. Zanurzenie Lu Qi-Kenga jest zdefiniowane jako

$$\iota_{Lu,\varphi} : \Omega \ni z \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \left(\begin{array}{cccccc} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \varphi_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_n} & \varphi_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_n} & \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} & \cdots \end{array} \right) \Big|_z \end{array} \right] \in \mathbb{F}(n, \infty).$$

W [Lu08] udowodniono, że przy założeniu, że $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, odwzorowanie to jest rzeczywiście zanurzeniem oraz że cofnięciem metryki Fubinięgo-Studiego dla Grassmanianu jest

$$(2.8) \quad \iota_{Lu,\varphi}^* \tilde{\omega}_{FS} = (n+1)T_{i\bar{j}} - Ric_{i\bar{j}},$$

gdzie Ric to tensor Riccięgo metryki Bergmana (a zatem jest tożsama z metryką $\tilde{\beta}(\cdot, \circ)$).

Korzystając z (2.6) i (2.8) dostajemy

$$(2.9) \quad (n+1)T_{i\bar{j}} - Ric_{i\bar{j}} = \iota_{Lu,\varphi}^* \iota_{Pl\ddot{u}}^* \omega_{FS}.$$

Korzystając ze wzoru (2.1) na odległość geodezyjną w $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ dostajemy, podobnie jak w (2.3), następującą główną nierówność (zob. [Din10])

Twierdzenie 2.2. Niech $z, \zeta \in \Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$. Zachodzi nierówność

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & \text{dist}(z, \zeta) \geq \\ & \arccos \frac{|\langle \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(z), \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(\zeta) \rangle|}{\sqrt{\langle \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(z), \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(z) \rangle \langle \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(\zeta), \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(\zeta) \rangle}} \\ & = \arccos \frac{\left| \det \left(K(z, \zeta)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K(z, \zeta) \right)_{i,j=1..n} \right|}{\sqrt{\det(K(z, z)^2 T_{ij}^-(z))_{i,j=1..n} \det(K(\zeta, \zeta)^2 T_{ij}^-(\zeta))_{i,j=1..n}}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\pi : L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) / \sim \cong \mathbb{C} \mathbb{P}^\infty.$$

Dowód. Na mocy wzoru (2.9) $\iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}$ jest izometrycznym odwzorowaniem Ω z metryką $\tilde{\beta}$ w $\mathbb{C} \mathbb{P}^\infty$ z metryką Fubiniiego-Studiego. Jest to też zanurzenie, ponieważ zarówno $\iota_{Pl\ddot{u}}$ jak i $\iota_{Lu, \varphi}$ są zanurzeniami. Wreszcie iloczyn skalarny nie zależy od wyboru konkretnego elementu ze zbioru $\pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(\xi)$ (por. z Uwagą, następującą po wzorze (2.1)). Daje nam to dowód nierówności w powyższym twierdzeniu. Aby wykazać równość (2.10) zauważmy, że można wybrać

$$\pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu, \varphi}(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \det F_s(\xi) \tilde{e}_s,$$

gdzie $F_s(\xi)$ jest stosownym minorem macierzy

$$F(\xi) := \begin{pmatrix} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \varphi_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_n} & \varphi_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_n} & \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} & \cdots \end{pmatrix} \Big|_{\xi}.$$

Zatem

$$\left\langle \sum_{s=0}^{\infty} \det F_s(z) \tilde{e}_s, \sum_{s=0}^{\infty} \det F_s(\zeta) \tilde{e}_s \right\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \det F_s(z) \overline{\det F_s(\zeta)},$$

co z twierdzenia Cauchy'ego-Bineta wynosi

$$\det(F(z)F(\zeta)^*).$$

Z drugiej strony p, q -ty element macierzy

$$\begin{aligned} (F(z)F(\zeta)^*)_{pq} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\varphi_j(z) \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_p}(z) - \varphi_k(z) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_p}(z) \right) \overline{\left(\varphi_j(\zeta) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \zeta_q}(\zeta) - \varphi_k(\zeta) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \zeta_q}(\zeta) \right)} = \\ &= \sum_{0 \leq j < k < \infty} \left(\varphi_j(z) \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_p}(z) - \varphi_k(z) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_p}(z) \right) \overline{\left(\varphi_j(\zeta) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \zeta_q}(\zeta) - \varphi_k(\zeta) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \zeta_q}(\zeta) \right)} = \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(\zeta)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_p}(z) \overline{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \zeta_q}(\zeta)} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_p}(z) \overline{\varphi_j(\zeta)} \varphi_k(z) \overline{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \zeta_q}(\zeta)}, \end{aligned}$$

co na mocy wzoru (1.4) wynosi

$$K(z, \zeta) \frac{\partial^2 K(\cdot, \circ)}{\partial z_p \partial \bar{\zeta}_q}(z, \zeta) - \frac{\partial K(\cdot, \circ)}{\partial z_p}(z, \zeta) \frac{\partial K(\cdot, \circ)}{\partial \bar{\zeta}_q}(z, \zeta) = K^2(z, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{\zeta}_q} \log K(\cdot, \circ) \Big|_{\cdot=z, \circ=\zeta}.$$

Analogicznie

$$\langle \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu,\varphi}(\xi), \pi^{-1} \circ \iota_{Pl\ddot{u}} \circ \iota_{Lu,\varphi}(\xi) \rangle = \det(K(\xi, \xi)^2 T_{i\bar{j}}(\xi))_{i,j=1..n},$$

dla $\xi = z, \zeta$. □

We wzorze na w_i z Definicji 1.21 czynnik $T^{\bar{j}i}(z_0)$ pełni funkcje normalizacyjne i nie ma wpływu na liniową niezależność dw_i . Stąd wynika, że

$$z \rightarrow (w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z))^t$$

jest immersją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$z \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \log \frac{K(z, \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0}, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \log \frac{K(z, \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_n} \log \frac{K(z, \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0} \right)^t$$

jest immersją. Wyznacznik macierzy Jacobiego powyższego odwzorowania to

$$(2.11) \quad \det \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \log \frac{K(z, \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0} \right)_{i,j=1..n} = \det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K(z, \zeta) \Big|_{\zeta=z_0} \right)_{i,j=1..n}.$$

Porównując (2.10) i (2.11) można łatwo zauważyć, że zbiory zer wyznaczników są takie same, natomiast zbiory punktów osobliwych mogą się różnić. Stąd dla ustalonego z_0 najbliższy punkt z , dla którego $\frac{\partial(w_1(z), \dots, w_n(z))}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = 0$ musi spełniać na mocy powyższej obserwacji i Twierdzenia 2.2 warunek

$$(2.12) \quad \tilde{dist}(z, z_0) \geq \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Twierdzenia 0.2 i 0.3 są już natychmiastową konsekwencją, ponieważ gdy c jest ograniczeniem dolnym krzywizny Ricciego metryki Bergmana to kula

$$\left\{ z \in \Omega : \tilde{dist}_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2} \right\} \supset \left\{ z \in \Omega : dist_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{n+1-c}} \right\}.$$

Odnotujmy, że ten sam wniosek możliwy jest do osiągnięcia poprzez bezpośrednie wyliczenie odległości geodezyjnej na Grasmanianie, bez korzystania z zanurzenia Plückera, jednakże byłoby to zdecydowanie bardziej skomplikowane od strony technicznej, zob. [Ber97] gdzie zamieszczono szkic postępowania w przypadku skończenie-wymiarowym.

W odniesieniu do wspomnianej potencjalnej różnicy w zbiorach osobliwych wykażemy następujące proste twierdzenie

Twierdzenie 2.3. *Niech W_{z_0} będzie zbiorem z Obserwacji 14, a \tilde{W}_{z_0} zbiorem z Obserwacji 15. Jeżeli $n > 1$, zachodzi zawieranie $W_{z_0} \subset \tilde{W}_{z_0}$.*

Dowód. Kwestią prostych rachunków jest

$$\det \left(K(z, z_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K(z, \zeta) \Big|_{\zeta=z_0} \right)_{i,j=1..n} = \det \left(K(z, z_0) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} K(z, \zeta) \Big|_{\zeta=z_0} - \frac{\partial}{\partial z_i} K(z, z_0) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K(z, \zeta) \Big|_{\zeta=z_0} \right)_{i,j=1..n}.$$

Gdy $z \in W_{z_0}$ redukuje się to do

$$\det \left(-\frac{\partial}{\partial z_i} K(z, z_0) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K(z, \zeta) \Big|_{\zeta=z_0} \right)_{i,j=1..n} = 0,$$

ponieważ macierz, jako iloczyn kolumny i wiersza, jest rzędu 1. \square

Tak więc potencjalne osobliwości różniczki odwzorowania $z \rightarrow (w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z))^t$ nie wystąpią bliżej punktu z_0 niż punkty w których psuje się immersja.

2.3. Kilka uwag o iniektywności. Niech $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$. Ponieważ iniektywność odwzorowania holomorficznego pociąga za sobą immersywność, to obszar na którym może wystąpić iniektywność odwzorowania

$$z \rightarrow (w_1(z), w_2(z), \dots, w_n(z))^t$$

zawiera się w $\Omega \setminus (W_{z_0} \cup \tilde{W}_{z_0})$. Oczywiście obszar ten, w odróżnieniu od obszaru immersywności nie musi być określony jednoznacznie. Jest jednak sens szukać takiego zbioru w postaci kuli geodezyjnej względem metryki Bergmana o środku w z_0 . Postaramy się dokonać pewnych obserwacji na temat tej kuli, jednakże nie rozstrzygając jak duży może być jej promień.

Lemat 2.4. *Dla punktów z' i $z'' \in \Omega$ zachodzi*

$$(w_1(z'), w_2(z'), \dots, w_n(z')) = (w_1(z''), w_2(z''), \dots, w_n(z''))$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i} \log K(z', \zeta)|_{\zeta=z_0} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i} \log K(z'', \zeta)|_{\zeta=z_0},$$

dla każdego $i = 1..n$.

Dowód. Zapiszmy pierwszą równość w notacji macierzowej. Mamy

$$T^{-1}(z_0) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \log \frac{K(z', \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_n} \log \frac{K(z', \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0} \right)^t =$$

$$T^{-1}(z_0) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \log \frac{K(z'', \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_n} \log \frac{K(z'', \zeta)}{K(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0} \right)^t.$$

Mnożąc obie strony lewostronnie przez odwracalną macierz $T(z_0)$, oraz skracając występujące po obu stronach wyrazy $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_n} \log K(\zeta, \zeta)|_{\zeta=z_0}$ dostajemy tezę \square

Skorzystamy z istnienia specjalnej bazy ortonormalnej dla $L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega)$ (zob. [Ber47], [Lu08])

$$\begin{aligned} & \varphi_0 \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) : \varphi_0(z_0) \in \mathbb{R}_+ \\ & \varphi_1 \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) : \varphi_1(z_0) = 0, \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1(z)|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+ \\ & \varphi_2 \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) : \varphi_2(z_0) = 0, \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_2(z)|_{z=z_0} = 0, \frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_2(z)|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+ \\ & \quad \vdots \\ & \varphi_n \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) : \varphi_n(z_0) = 0, \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_n(z)|_{z=z_0} = 0, \\ & \quad \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \varphi_n(z)|_{z=z_0} = 0, \frac{\partial}{\partial z_n} \varphi_n(z)|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+ \\ & \varphi_{n+1} \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) : \varphi_{n+1}(z_0) = 0, \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_{n+1}(z)|_{z=z_0} = 0, \end{aligned}$$

$$\dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \varphi_{n+1}(z)|_{z=z_0} = 0, \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1} \varphi_{n+1}(z)|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+$$

itd. dla uporządkowania leksykograficznego (\prec), jeżeli m -tym elementem w tym porządku jest wielowskaźnik $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ to

$$\varphi_m \in L^2 \cap \mathcal{O}(\Omega) : D^{\alpha'} \varphi_m(z)|_{z=z_0} = 0, \forall \alpha' \prec \alpha, D^\alpha \varphi_m(z)|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+,$$

gdzie $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Obserwacja 29. *Tak zdefiniowana funkcja φ_0 zeruje się dokładnie na zbiorze W_{z_0}*

Dowód. Wyrażając $K(z, z_0)$ w tej bazie (zob. wzór (1.4)) otrzymujemy, że

$$K(z, z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z_0)} = \varphi_0(z) \overline{\varphi_0(z_0)}.$$

□

Ponieważ założyliśmy, że ograniczymy się do zbioru $\Omega \setminus (W_{z_0} \cup \tilde{W}_{z_0})$, funkcja φ_0 nie będzie się zerować. Tak więc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i} \log K(z', \zeta)|_{\zeta=z_0} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i} \log K(z'', \zeta)|_{\zeta=z_0}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overline{\varphi_0(z') \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_0(z)|_{z=z_0} + \dots + \varphi_i(z') \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_i(z)|_{z=z_0}}{\varphi_0(z') \varphi_0(z_0)} = \frac{\overline{\varphi_0(z'') \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_0(z)|_{z=z_0} + \dots + \varphi_i(z'') \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_i(z)|_{z=z_0}}{\varphi_0(z'') \varphi_0(z_0)}.$$

Skracamy obustronnie pierwsze składniki sumy oraz wymnażamy przez powtarzający się czynnik $\varphi_0(z_0)$. Przenosząc wszystko na jedną stronę dostajemy następujący układ równań

$$\begin{cases} \overline{\frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1(z)|_{z=z_0} \left(\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')} - \frac{\varphi_1(z'')}{\varphi_0(z'')} \right)} = 0 \\ \vdots \\ \overline{\frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_1(z)|_{z=z_0} \left(\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')} - \frac{\varphi_1(z'')}{\varphi_0(z'')} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_i(z)|_{z=z_0} \left(\frac{\varphi_i(z')}{\varphi_0(z')} - \frac{\varphi_i(z'')}{\varphi_0(z'')} \right)} = 0 \\ \vdots \\ \overline{\frac{\partial}{\partial z_n} \varphi_1(z)|_{z=z_0} \left(\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')} - \frac{\varphi_1(z'')}{\varphi_0(z'')} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial z_n} \varphi_n(z)|_{z=z_0} \left(\frac{\varphi_n(z')}{\varphi_0(z')} - \frac{\varphi_n(z'')}{\varphi_0(z'')} \right)} = 0 \end{cases}$$

Macierz współczynników tego układu jest macierzą trójkątną, a więc wyznacznik to iloczyn

$$\overline{\frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1(z)|_{z=z_0}} \dots \overline{\frac{\partial}{\partial z_n} \varphi_n(z)|_{z=z_0}} \in \mathbb{R}_+.$$

Macierz jest więc nieosobliwa, skąd

$$\left(\frac{\varphi_1(z')}{\varphi_0(z')}, \frac{\varphi_2(z')}{\varphi_0(z')}, \dots, \frac{\varphi_n(z')}{\varphi_0(z')} \right) = \left(\frac{\varphi_1(z'')}{\varphi_0(z'')}, \frac{\varphi_2(z'')}{\varphi_0(z'')}, \dots, \frac{\varphi_n(z'')}{\varphi_0(z'')} \right),$$

a więc współrzędne jednorodne w $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ są takie same.

Ostatecznie mamy

Obserwacja 30. *Odwzorowanie generowane przez współrzędne reprezentatywne jest iniektywne na podzbiorze $U \subset \Omega$ wtedy i tylko wtedy gdy iniektywne na U jest odwzorowanie $\pi \circ \iota_{K_o, \varphi}$, gdzie π jest projekcją $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n : [(x_0, x_1, x_2, \dots)] \rightarrow [(x_0, x_1, \dots, x_n)]$.*

Uwaga. Projekcja π nie jest zdefiniowana poprawnie w całym $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Ponieważ jednak obraz $\Omega \setminus (W_{z_0} \cup \bar{W}_{z_0})$ poprzez $\iota_{K_o, \varphi}$ znajduje się w otoczeniu $[(1, 0, 0, \dots)]$, dla którego $x_0 \neq 0$, złożenie $\pi \circ \iota_{K_o, \varphi}$ jest poprawnie zdefiniowane.

3. PRZYPADEK ROZMAITOŚCI

Niech M będzie n -wymiarową rozmaiutością zespoloną. Przestrzeń holomorficznycch form maksymalnego stopnia oznaczmy przez $H^0(M, K_M)$. Na tą przestrzeń można też patrzeć jako na przestrzeń globalnych sekcji wiązki kanonicznej K_M rozmaiutości M . Ograniczymy się do podprzestrzeni $H_{(2)}^0(M, K_M) = H^0(M, K_M) \cap L^2(M, K_M)$, holomorficznycch form maksymalnego stopnia, całkwalnych z kwadratem tzn.

$$H_{(2)}^0(M, K_M) = \{f \in H^0(M, K_M) : \sqrt{-1}^{n^2} \int_M f \wedge \bar{f} < \infty\}.$$

Przestrzeń $H_{(2)}^0(M, K_M)$ można wyposażyć w iloczyn skalarny

$$H_{(2)}^0(M, K_M) \times H_{(2)}^0(M, K_M) \ni f, g \rightarrow \sqrt{-1}^{n^2} \int_M f \wedge \bar{g} \in \mathbb{C}.$$

Ten iloczyn skalarny zadaje na $H_{(2)}^0(M, K_M)$ strukturę przestrzeni Hilberta, która może się okazać skończonego wymiaru. Zauważmy, że jeżeli M jest rozmaiutością zwartą to

$$H_{(2)}^0(M, K_M) \equiv H^0(M, K_M)$$

i $H_{(2)}^0(M, K_M)$ jest skończenie-wymiarowa. Niech $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ będzie bazą ortonormalną $H_{(2)}^0(M, K_M)$. Jądro Bergmana dla form to forma

$$K = \sqrt{-1}^{n^2} \sum_{j \geq 0} \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_j.$$

Stałą $\sqrt{-1}^{n^2}$, będziemy pomijać, aby nie obciążać dodatkowo notacji, nie ma ona znaczenia dla dalszych rozważań.

We współrzędnych lokalnych można zapisać

$$K(z, \zeta) = K^*(z, \zeta) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n,$$

gdzie $K^*(z, \zeta)$ jest funkcją zdefiniowaną lokalnie na rozmaiutości. Natomiast następująca (1, 1)-forma różniczkowa

$$(3.1) \quad \partial \bar{\partial} \log K^*(z, z)$$

jest zdefiniowana globalnie, co łatwo zauważyć, wyrażając $K(z, \zeta)$ w różnych współrzędnych lokalnych.

Powiemy, że rozmaiutość M posiada metrykę Bergmana, jeżeli forma (3.1) jest globalnie ściśle dodatnia. Przy takich założeniach, metryką Bergmana będzie metryka stowarzyszona z formą (3.1). Można więc zdefiniować $T_{i\bar{j}}(z)$, $\beta(z, X)$, pod warunkiem, że X należy do przestrzeni stycznej rozmaiutości M w punkcie z , $dist_M(z, \zeta)$, $Ric_{i\bar{j}}$, $\tilde{\beta}(z, X)$ (z powyższym założeniem o wektorze X), oraz $\tilde{dist}_M(z, \zeta)$, podobnie jak w przypadku obszaru w \mathbb{C}^n , z

zastrzeżeniem, że funkcja K^* jest określona tylko lokalnie ($\tilde{\beta}(z, \cdot)$ jest nieujemnie określona (zob. [Kob59]), a więc a priori jest tylko pseudometryką, a \tilde{dist}_M - pseudoodległością).

Założmy, że M posiada metrykę Bergmana. Mając do dyspozycji "gwiazdkowane" odpowiedniki funkcji w \mathbb{C}^n , łatwo zauważyć, że współrzędne reprezentatywne również mogą być zdefiniowane, co najmniej lokalnie (w obszarze definicji mapy). Rozpatrzmy pokrycie rozmaitości M zbiorami otwartymi $\{U_i\}$, wpisane w obszary definicji map. Niech $z_0 \in U_1$ będzie ustalone. Po ewentualnym dokonaniu zawężenia, możemy tak uporządkować zbiory $U_i \times U_1$ aby stanowiły pokrycie $M \times U_1$ oraz aby w każdym $U_i \times U_1$, $K(z, \zeta)$ mogła być wyrażona przez

$$K(z, \zeta) = K_{U_i}^*(z, \zeta) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n.$$

W przecięciu $U_i \times U_1 \cap U_j \times U_1$ zmiana współrzędnych $(z, \zeta) \xrightarrow{(\tilde{z}(\cdot), id)} (\tilde{z}(z), \zeta)$ daje

$$K_{U_j}^*(\tilde{z}(z), \zeta) \frac{\partial(\tilde{z}(z)_1, \dots, \tilde{z}(z)_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = K_{U_i}^*(z, \zeta).$$

Dla każdego $s \in \{1..n\}$ dostajemy

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_s} \log K_{U_i}^*(z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_s} \log \left(K_{U_j}^*(\tilde{z}(z), \zeta) \frac{\partial(\tilde{z}(z)_1, \dots, \tilde{z}(z)_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_s} \log K_{U_j}^*(\tilde{z}, \zeta).$$

Stąd wynika, że wyrażenia

$$w_l(z) = \sum_{k=1}^n T^{\bar{k}l}(z_0) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k} \log \frac{K_{U_i}^*(z, \zeta)}{K_{U_1}^*(\zeta, \zeta)} \Big|_{\zeta=z_0}, \quad l = 1..n$$

sklejają się do funkcji globalnych. Macierz $T^{\bar{k}l}(z_0)$ jest dobrze określona dzięki założeniu, że M posiada metrykę Bergmana. Tak jak w przypadku obszarów w \mathbb{C}^n , jedyną obstrukcją dla zdefiniowania globalnej funkcji holomorficzej, jaka może się pojawić przy powyższej konstrukcji, jest możliwość, aby $K_{U_i}(z, z_0)$ zerowała się dla pewnego z (co jest oczywiście niezależne od zbioru U_i , reprezentujące K wyrażenie będzie się zerować dla każdego U_j , $z \in U_j$). Podsumowując dostajemy następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.1. *Na zespolonej rozmaitości M , posiadającej metrykę Bergmana można określić współrzędne reprezentatywne $w_l, l = 1, \dots, n$, o środku w $z_0 \in M$, które są poprawnie zdefiniowanymi funkcjami holomorficznymi na $M \setminus W_{z_0}$, gdzie*

$$W_{z_0} := \{z \in M : K^*(z, z_0) = 0\}.$$

Odnotujmy, że współrzędne reprezentatywne dla metryki Bergmana na rozmaitościach były już wcześniej badane w [Dav77], jednakże tam użyto jądra Bergmana dla funkcji, zamiast jądra Bergmana dla form. Założenie to istotnie ogranicza zakres rozpatrywanych rozmaitości, przykładowo każda rozmaitość zwarta jest w ten sposób eliminowana z rozważań.

Od tej chwili konwencją będzie, że f^* jest współczynnikiem lokalnym $(n, 0)$ - formy

$$f(z) = f^*(z) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

W lokalnym układzie współrzędnych z_1, \dots, z_n

W odróżnieniu od sytuacji w ograniczonych obszarach w \mathbb{C}^n , M niekoniecznie posiada metrykę Bergmana. Warunki konieczne i wystarczające, aby M posiadała metrykę Bergmana są następujące:

- Dla każdego $z \in M$ istnieje $f \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ taka, że $f^*(z) \neq 0$ (warunek A.1 w [Kob59]).

- Dla każdego $z \in M$ i dla każdego wektora X z zespolonej przestrzeni stycznej do M w punkcie z istnieje $g \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ taka, że $g^*(z) = 0$ i $X(g^*)(z) \neq 0$ (warunek A.2 w [Kob59]).

Warunek A.2 jest równoważny następującemu warunkowi

- Dla każdego $z \in M$ i dla ustalonej bazy $X_i, i = 1..n$ zespolonej przestrzeni stycznej do M w punkcie z istnieją $g_i \in H_{(2)}^0(M, K_M), i = 1, \dots, n$ takie, że $g_i^*(z) = 0$ i $X_i(g_i^*)(z) \neq 0$ (warunek A.2').

Warunki te są trudne do bezpośredniego sprawdzenia w przypadku abstrakcyjnej rozmaitości zespolonej, jednakże oczywiste jest, że w przypadku rozmaitości zwartej warunkiem koniecznym, aby M posiadała metrykę Bergmana jest aby wymiar przestrzeni $H^0(M, K_M)$, zwany też $(n, 0)$ - liczbą Hodge'a $h^{n,0}(M)$ lub genusiem geometrycznym, spełniał

$$h^{n,0}(M) \geq n + 1.$$

Liczby Hodge'a są wyliczone dla wielu zwartych rozmaitości zespolonych w niskich wymiarach, tak więc kryterium to pozwala szybko wyeliminować wiele z nich, jako kandydatów do posiadania metryki Bergmana.

Okazuje się (zob. [Kob59]), że A.1 i A.2 są również koniecznymi i wystarczającymi warunkami, aby $\iota_{K_0, \varphi}$ (po stosownej modyfikacji definicji) była immersją (sam warunek A.1 jest konieczny i wystarczający, aby odwzorowanie Kobayashiego było dobrze zdefiniowane), podczas gdy aby było ono iniekcją potrzebny jest inny warunek:

- Dla dowolnych dwóch punktów $z, z_0 \in M$ i ustalonych lokalnych współrzędnych wokół z i stosownie z_0 istnieje $h \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ taka, że $h^*(z) = 0$ i $h^*(z_0) \neq 0$ (warunek A.3 w [Kob59]).

Ustalmy bazę ortonormalną $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ przestrzeni $H_{(2)}^0(M, K_M)$ i lokalny układ współrzędnych wokół punktu $\xi \in M$. Przez

$$F_\varphi(\xi) := \begin{pmatrix} \varphi_0^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z_1} - \varphi_1^* \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z_1} & \varphi_0^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z_1} - \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z_1} & \varphi_1^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z_1} - \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \varphi_0^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z_n} - \varphi_1^* \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z_n} & \varphi_0^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z_n} - \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z_n} & \varphi_1^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z_n} - \varphi_2^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z_n} & \dots \end{pmatrix} \Big|_\xi,$$

będziemy oznaczać macierz, która reprezentuje klasę abstrakcji $\iota_{Lu, \varphi}(\xi)$, co posłuży za definicję odwzorowania $\iota_{Lu, \varphi}$ w przypadku rozmaitości (a priori nie wiadomo czy taka definicja jest poprawna).

Obserwacja 31. *Macierz $F_\varphi(\xi)$ jest macierzą wymiaru $n \times \binom{\dim H_{(2)}^0(M, K_M)}{2}$.*

Aby przeprowadzić konstrukcję Lu Qi-Kenga na rozmaitości (odnotujmy, że docelowy Grassmanian może być skończenie-wymiarowy), najpierw należy sprawdzić czy nie jest ona uzależniona od faktu, że w \mathbb{C}^n mamy globalne współrzędne (nie jest to całkowicie oczywiste, ponieważ we wzorze na $\iota_{Lu, \varphi}$ występują pochodne cząstkowe).

Lemat 3.2. *Odwzorowanie $\iota_{Lu, \varphi}$ nie zależy od lokalnych holomorficznych zmian współrzędnych.*

Dowód. Niech

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}) d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_n = \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}(z)) \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \varphi_j^*(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

gdzie z lewej strony mamy przedstawienie formy φ_j w lokalnym układzie współrzędnych \tilde{z} , a z prawej we współrzędnych z . Oczywiście równość ta ma miejsce wyłącznie na przecięciu obszarów istnienia współrzędnych \tilde{z} i z .

Teraz

$$\begin{aligned} & \varphi_j^*(z) \frac{\partial \varphi_k^*(z)}{\partial z_s} - \varphi_k^*(z) \frac{\partial \varphi_j^*(z)}{\partial z_s} = \\ & \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}(z)) \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z}(z)) \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)}{\partial z_s} - \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z}(z)) \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}(z)) \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)}{\partial z_s} = \\ & \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}(z)) \sum_{m=1}^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_k^*}{\partial \tilde{z}_m} \frac{\partial \tilde{z}_m}{\partial z_s} - \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z}(z)) \sum_{m=1}^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_j^*}{\partial \tilde{z}_m} \frac{\partial \tilde{z}_m}{\partial z_s}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \left(\varphi_j^*(z) \frac{\partial \varphi_k^*(z)}{\partial z_s} - \varphi_k^*(z) \frac{\partial \varphi_j^*(z)}{\partial z_s} \right)_{\substack{s=1..n \\ j < k}} = \\ & \text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{z}_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{z}_1}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} \left(\tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_s} - \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_s} \right)_{\substack{s=1..n \\ j < k}} \end{aligned}$$

i klasy abstrakcji macierzy

$$\left(\varphi_j^*(z) \frac{\partial \varphi_k^*(z)}{\partial z_s} - \varphi_k^*(z) \frac{\partial \varphi_j^*(z)}{\partial z_s} \right)_{\substack{s=1..n \\ j < k}}$$

i

$$\left(\tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_s} - \tilde{\varphi}_k^*(\tilde{z}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j^*(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}_s} \right)_{\substack{s=1..n \\ j < k}}$$

są takie same, ponieważ $\text{Jac} \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{z}_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{z}_1}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$ jest nieosobliwa. \square

Dzięki Lematowi 3.2 wiemy jak macierz $F_\varphi(\xi)$ zmieniła by się przy wyborze innego układu lokalnych współrzędnych, tak więc potrzeba rozpatrywania danych lokalnie nie jest przeszkodą w konstrukcji Lu Qi-Kenga. Obstrukcje mogą się jednak pojawić z innego kierunku.

Wnikliwa analiza [Lu08] daje nam konieczne i wystarczające warunki, aby $\iota_{Lu,\varphi}$ było dobrze zdefiniowane:

Twierdzenie 3.3. *Klasa abstrakcji $[F_\varphi(z)]$ jest poprawnie zdefiniowanym obrazem punktu z w Grassmanianie $\mathbb{F} \left(n, \binom{\dim H_{(2)}^0(M, K_M)}{2} \right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy łącznie spełnione są następujące dwa warunki*

- Dla każdego $z \in M$ istnieje $f \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ taka, że $f^*(z) \neq 0$ (czyli dokładnie warunek A.1 powyżej).

- Dla każdego $z \in M$ istnieją $f_1, \dots, f_n \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ takie, że $f_i^*(z) = 0, i = 1..n$ i $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_n^*}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1^*}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial f_n^*}{\partial z_n} \end{pmatrix}$ jest nieosobliwa w punkcie z (warunek B.1).

Uwaga. Pomimo że macierz w warunku B.1 zależy od wyboru lokalnych współrzędnych, to własność bycia macierzą nieosobliwą jest od tego wyboru niezależna. Tak więc warunek B.1 jest poprawnie zadany.

Dowód. Wystarczy udowodnić twierdzenie dla ustalonego punktu $z \in M$. Kowymiar przestrzeni form z $H_{(2)}^0(M, K_M)$ takich, że $f^*(z) = 0$, wynosi co najwyżej 1 i jest równy 1 wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi warunek A.1. Stąd wynika konieczność zachodzenia warunku A.1, gdyż inaczej $F_\varphi(z)$ jest macierzą zerową. Niech $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $H_{(2)}^0(M, K_M)$ taką, że $\phi_0^*(z) = c \neq 0$ i $\phi_j^*(z) = 0$, dla $j > 0$. Baza $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ występująca w definicji $\iota_{Lu, \varphi}$ powstaje z bazy $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ poprzez przekształcenie unitarne.

$$\begin{aligned} & \varphi_i^*(z) \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z_s}(z) - \varphi_j^*(z) \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial z_s}(z) = \\ & \sum_{p \geq 0} \langle \varphi_i, \phi_p \rangle \phi_p^*(z) \frac{\partial \sum_{q \geq 0} \langle \varphi_j, \phi_q \rangle \phi_q^*}{\partial z_s}(z) - \sum_{p \geq 0} \langle \varphi_j, \phi_p \rangle \phi_p^*(z) \frac{\partial \sum_{q \geq 0} \langle \varphi_i, \phi_q \rangle \phi_q^*}{\partial z_s}(z) = \\ & \langle \varphi_i, \phi_0 \rangle \phi_0^*(z) \frac{\partial \sum_{q \geq 0} \langle \varphi_j, \phi_q \rangle \phi_q^*}{\partial z_s}(z) - \langle \varphi_j, \phi_0 \rangle \phi_0^*(z) \frac{\partial \sum_{q \geq 0} \langle \varphi_i, \phi_q \rangle \phi_q^*}{\partial z_s}(z) = \\ & \frac{\partial \sum_{q \geq 0} (\langle \varphi_i, \phi_0 \rangle \langle \varphi_j, \phi_q \rangle - \langle \varphi_j, \phi_0 \rangle \langle \varphi_i, \phi_q \rangle) \phi_q^*}{\partial z_s}(z). \end{aligned}$$

Macierz $F_\varphi(z) = cE_\phi(z)H_{\varphi, \phi}$, gdzie

$$E_\phi(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z_1} & \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_1} & \frac{\partial \phi_2^*}{\partial z_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z_n} & \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_n} & \frac{\partial \phi_2^*}{\partial z_n} & \dots \end{pmatrix} \Big|_z$$

jest macierzą $n \times \dim H_{(2)}^0(M, K_M)$, natomiast

$$H_{\varphi, \phi} := \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle \langle \varphi_1, \phi_0 \rangle - \langle \varphi_1, \phi_0 \rangle \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \varphi_i, \phi_0 \rangle \langle \varphi_j, \phi_0 \rangle - \langle \varphi_j, \phi_0 \rangle \langle \varphi_i, \phi_0 \rangle & \dots \\ \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle \langle \varphi_2, \phi_1 \rangle - \langle \varphi_2, \phi_0 \rangle \langle \varphi_0, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_i, \phi_0 \rangle \langle \varphi_j, \phi_1 \rangle - \langle \varphi_j, \phi_0 \rangle \langle \varphi_i, \phi_1 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

jest macierzą $\dim H_{(2)}^0(M, K_M) \times \binom{\dim H_{(2)}^0(M, K_M)}{2}$, której (q, ij) -ty element to

$$\langle \varphi_i, \phi_0 \rangle \langle \varphi_j, \phi_q \rangle - \langle \varphi_j, \phi_0 \rangle \langle \varphi_i, \phi_q \rangle.$$

Oczywiście pierwszy wiersz macierzy $H_{\varphi, \phi}$ jest zerowy, skąd jej rząd to co najwyżej $\dim H_{(2)}^0(M, K_M) - 1$ (lub właściwie mówiąc: wymiar kojądra operatora danego przez $H_{\varphi, \phi}$ wynosi co najmniej 1, gdyż może zachodzić sytuacja $\dim H_{(2)}^0(M, K_M) = \infty$).

Z drugiej strony

$$H_{\varphi, \phi} = A_{\varphi, \phi} B_{\varphi, \phi},$$

gdzie

$$A_{\varphi,\phi} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \phi_0 \rangle & \langle \varphi_2, \phi_0 \rangle & \cdots \\ \langle \varphi_0, \phi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \phi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \phi_1 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

a

$$B_{\varphi,\phi} = \begin{pmatrix} -\langle \varphi_1, \phi_0 \rangle & -\langle \varphi_2, \phi_0 \rangle & \cdots & 0 & \cdots \\ \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle & 0 & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & -\langle \varphi_j, \phi_0 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \langle \varphi_i, \phi_0 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

tnz ij - ta kolumna macierzy $B_{\varphi,\phi}$ to

$$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_i, \underbrace{-\langle \varphi_j, \phi_0 \rangle, 0, \dots, 0}_j, \langle \varphi_i, \phi_0 \rangle, 0, \dots \right)^t.$$

Ponieważ φ jest bazą i $\phi_0 \neq 0$, istnieje l takie, że $\langle \varphi_l, \phi_0 \rangle \neq 0$. Podmacierz złożona z $0l, 1l, \dots, (l-1)l, l(l+1), l(l+2), \dots$ -tych kolumn macierzy $B_{\varphi,\phi}$ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} -\langle \varphi_l, \phi_0 \rangle & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\langle \varphi_l, \phi_0 \rangle & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\langle \varphi_l, \phi_0 \rangle & 0 & 0 & \cdots \\ \langle \varphi_0, \phi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_{l-1}, \phi_0 \rangle & -\langle \varphi_{l+1}, \phi_0 \rangle & -\langle \varphi_{l+2}, \phi_0 \rangle & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle \varphi_l, \phi_0 \rangle & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \langle \varphi_l, \phi_0 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Jest to macierz o wymiarach $\dim H_{(2)}^0(M, K_M) \times (\dim H_{(2)}^0(M, K_M) - 1)$, która jednak jest ewidentnie maksymalnego rzędu, co widać po usunięciu l -tego wiersza.

Ponadto macierz $A_{\varphi,\phi}$, jako macierz zmiany bazy, jest maksymalnego rzędu, tak więc macierz $H_{\varphi,\phi}$ jest rzędu dokładnie $\dim H_{(2)}^0(M, K_M) - 1$ (lub właściwiej, wymiar kojądra operatora $H_{\varphi,\phi}$ wynosi dokładnie 1).

Macierz $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n^*}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1^*}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial f_n^*}{\partial z_n} \end{pmatrix}$ z warunku B.1 przedstawiamy jako

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n^*}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1^*}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial f_n^*}{\partial z_n} \end{pmatrix} = E_\phi(z)K_{f,\phi},$$

gdzie

$$K_{f,\phi} := \begin{pmatrix} \langle f_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle f_n, \phi_0 \rangle \\ \langle f_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle f_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Formy $f_i, i = 1..n$ ze względu na warunek B.1 należą do przestrzeni rozpiętej przez ϕ_1, ϕ_2, \dots . Wynika stąd, że $\phi_0 \perp f_i, i = 1..n$ i pierwszy wiersz macierzy $K_{f,\phi}$ jest zerowy. Teraz widzimy, że warunek B.2 jest równoważny ze stwierdzeniem, że

$$\text{rank}E_\phi(z) = n \text{ i } \text{rank}K_{f,\phi} = n$$

jak również jest równoważny ze stwierdzeniem, że

$$\text{rank}E'_\phi(z) = n \text{ i } \text{rank}K'_{f,\phi} = n,$$

gdzie $E'_\phi(z)$ jest macierzą $n \times (H_{(2)}^0(M, K_M) - 1)$ powstałą z $E_\phi(z)$ poprzez usunięcie pierwszej kolumny, a $K'_{f,\phi}$ powstaje z $K_{f,\phi}$ poprzez usunięcie pierwszego (zerowego) wiersza.

Z drugiej strony $K_{f,\phi}$ jest macierzą współczynników form f_i (rozpatrywanych jako elementy przestrzeni Hilberta) w bazie ϕ_0, ϕ_1, \dots i jej rząd wynosi n wtedy i tylko wtedy, gdy f_1, \dots, f_n są liniowo niezależne. Gdyby jednak formy te były liniowo zależne to natychmiast widzimy, że nie byłby dla tego wyboru spełniony warunek B.1. Ostatecznie mamy, że warunek B.1 zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy $E'_\phi(z)$ wynosi n .

Wracając do macierzy $F_\varphi(z)$ widzimy, kolejną równoważność zdań

- Odwzorowanie $\iota_{Lu,\varphi}$ jest dobrze określone w punkcie z
- Macierz $F_\varphi(z)$ jest rzędu n
- Macierz $E_\phi(z)$ jest rzędu $n, c \neq 0$ i obraz odwzorowania liniowego, danego przez macierz $H_{\varphi,\phi}$, zawiera podprzestrzeń, na której $E_\phi(z)$ jest izomorfizmem. W języku algebry liniowej

$$\text{Im}H_{\varphi,\phi} / \text{Im}H_{\varphi,\phi} \cap \text{Ker}E_\phi(z) = \text{Dom}E_\phi(z) / \text{Ker}E_\phi(z) = \text{coim}E_\phi(z).$$

- Macierz $E'_\phi(z)$ jest rzędu $n, c \neq 0$ obraz odwzorowania liniowego, danego przez macierz $H'_{\varphi,\phi}$, gdzie $H'_{\varphi,\phi}$ jest macierzą $H_{\varphi,\phi}$ z usuniętym pierwszym (zerowym) wierszem, zawiera podprzestrzeń, na której $E'_\phi(z)$ jest izomorfizmem.

- Macierz $E'_\phi(z)$ jest rzędu n i $c \neq 0$. Ostatnia równoważność wynika z faktu, wykazanego powyżej, że $H'_{\varphi,\phi}$ jest maksymalnego rzędu.

Ostatecznie widzimy, że łączne spełnienie warunków B.1 i A.1 jest równoważne poprawnej definicji $\iota_{Lu,\varphi}$. \square

Obserwacja 32. Z warunku B.1 wynika warunek A.2', a zatem i A.2. Jeżeli $\iota_{Lu,\varphi}$ jest dobrze określonym odwzorowaniem to $\iota_{Ko,\varphi}$ jest immersją.

Dowód. Pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial z_i}, i = 1..n$ tworzą bazę. Skoro macierz z warunku B.1 jest nieosobliwa to istnieje $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $\frac{\partial f_{j_1}^*}{\partial z_1} \neq 0$. Tak samo istnieje $j_2 \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $\frac{\partial f_{j_2}^*}{\partial z_2} \neq 0$ itd. \square

Immersywność odwzorowania $\iota_{Lu,\varphi}$ przy założeniu warunków A.1 i B.1 scharakteryzowana jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.4. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby poprawnie zdefiniowane odwzorowanie $\iota_{Lu,\varphi}$ było globalną immersją jest*

• Dla każdego $z \in M$ istnieją $g_1, \dots, g_{\frac{n(n+1)}{2}} \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ (niektóre z nich być może tożsamościowo zero) takie, że $g_i^*(z) = 0, i = 1.. \frac{n(n+1)}{2}, dg_i^* = 0, i = 1.. \frac{n(n+1)}{2}$ w punkcie z oraz $n \times \frac{n^2(n+1)}{2}$ macierz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 g_1^*}{\partial z_n \partial z_1} & \frac{\partial^2 g_2^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 g_2^*}{\partial z_n \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 g_{\frac{n(n+1)}{2}}^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 g_{\frac{n(n+1)}{2}}^*}{\partial z_n \partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_1^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 g_1^*}{\partial z_n \partial z_n} & \frac{\partial^2 g_2^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 g_2^*}{\partial z_n \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 g_{\frac{n(n+1)}{2}}^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 g_{\frac{n(n+1)}{2}}^*}{\partial z_n \partial z_n} \end{pmatrix}$$

jest rzędu n w punkcie z (warunek B.2).

Dowód. Wystarczy udowodnić twierdzenie dla ustalonego punktu $z \in M$. Fundamentalnym faktem udowodnionym w [Lu08] jest, że $\iota_{Lu,\varphi}$ jest immersją lub nie w punkcie z niezależnie od wyboru bazy ortonormalnej φ (natomiast przy zmianie bazy, zmienia się obraz punktu z). Przedstawiony tam dowód nie korzysta z założeń, że rozumowanie przeprowadzane jest w obszarach w \mathbb{C}^n , a jedynie ze struktury przestrzeni Hilberta oraz transformacji Grassmanianu, zatem przenosi się na przypadek rozmaitości. Dalsze rozumowanie przeprowadzimy dla specjalnej bazy ortonormalnej ϕ_0, ϕ_1, \dots , dla której $\phi_0^*(z) = c \neq 0, \phi_i^*(z) = 0, i > 0$,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n^*}{\partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial \phi_n^*}{\partial z_n} \end{pmatrix} \Big|_z \neq 0, d\phi_i^*|_z = 0, i > n \text{ i } \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi_j^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 \phi_j^*}{\partial z_n \partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi_j^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 \phi_j^*}{\partial z_n \partial z_n} \end{pmatrix} \Big|_z = 0, \text{ dla dostatecznie dużych } j.$$

Baza taka istnieje na mocy założonych warunków A.1 i B.1.

Za [Lu08], mamy

$$F_\phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_0^* \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_1} - \phi_1^* \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z_1} & \phi_0^* \frac{\partial \phi_2^*}{\partial z_1} - \phi_2^* \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z_1} & \phi_1^* \frac{\partial \phi_2^*}{\partial z_1} - \phi_2^* \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \phi_0^* \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_n} - \phi_1^* \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z_n} & \phi_0^* \frac{\partial \phi_2^*}{\partial z_n} - \phi_2^* \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z_n} & \phi_1^* \frac{\partial \phi_2^*}{\partial z_n} - \phi_2^* \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_n} & \dots \end{pmatrix} \Big|_z,$$

co po spemutowaniu kolumn daje

$$\begin{pmatrix} \phi_0^*(z) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_1}(z) & \dots & \phi_0^*(z) \frac{\partial \phi_n^*}{\partial z_1}(z) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots \\ \phi_0^*(z) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_n}(z) & \dots & \phi_0^*(z) \frac{\partial \phi_n^*}{\partial z_n}(z) & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że obraz punktu z poprzez $\iota_{Lu,\phi}$ trafia do podzbioru Grassmanianu, dla którego $n \times n$ minor powstały z 01, 02, ..., 0n - tych kolumn jest nieosobliwy. Oznaczmy przez

$$P_\phi(\xi), \text{ macierz } \begin{pmatrix} \phi_0^*(\xi) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_1}(\xi) & \dots & \phi_0^*(\xi) \frac{\partial \phi_n^*}{\partial z_1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0^*(\xi) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z_n}(\xi) & \dots & \phi_0^*(\xi) \frac{\partial \phi_n^*}{\partial z_n}(xi) \end{pmatrix}.$$

We współrzędnych lokalnych Grassmanianu mamy

$$\iota_{Lu,\phi}(\xi) = P_\phi(\xi)^{-1} F_\phi''(\xi),$$

gdzie $F_\phi''(\xi)$ powstaje z macierzy $F_\phi(\xi)$ poprzez usunięcie 01, 02, ..., 0n - tych kolumn. Oczywiście równość taka zachodzi tylko w otoczeniu punktu z , dla którego $P_\phi(\xi)$ jest nieosobliwa.

$$\frac{\partial \iota_{Lu,\phi}}{\partial z_j} = \frac{\partial P_\phi(\xi)^{-1} F_\phi''(\xi)}{\partial z_j},$$

co na mocy wzoru (2.7) wynosi

$$P_\phi(\xi)^{-1} \frac{\partial F_\phi''(\xi)}{\partial z_j} - P_\phi(\xi)^{-1} \frac{\partial P_\phi}{\partial z_j} P_\phi(\xi)^{-1} F_\phi''(\xi).$$

W punkcie z redukuje się to do

$$(3.2) \quad P_\phi(z)^{-1} \frac{\partial F_\phi''}{\partial z_j}(z).$$

Pochodne cząstkowe $\iota_{Lu,\phi}$ we współrzędnych lokalnych tworzą tensor rzędu 3. Aby uprościć notację przedstawmy macierz F_ϕ'' jako macierz F_ϕ''' wymiaru $1 \times n$ ($(\dim H_{(2)}^0(M, K_M) - n)$), zapisując kolejno w jednym wierszu transponowane kolumny macierzy F_ϕ'' . Umożliwia to zapisanie tensora pochodnych cząstkowych jako macierzy dwuwymiarowej.

Immersywność $\iota_{Lu,\phi}$ jest równoważna stwierdzeniu, że rząd macierzy

$$c \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\phi'''_{11}}{\partial z_1} & \frac{\partial F_\phi'''_{12}}{\partial z_1} & \frac{\partial F_\phi'''_{13}}{\partial z_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial F_\phi'''_{11}}{\partial z_n} & \frac{\partial F_\phi'''_{12}}{\partial z_n} & \frac{\partial F_\phi'''_{13}}{\partial z_n} & \dots \end{pmatrix} \Big|_z$$

wynosi n . Wynika to z postaci (3.2) jak i z faktu, że P_ϕ^{-1} jest macierzą nieosobliwą.

Odnajmy, że

$$\frac{\partial F_\phi'''_{1p}}{\partial z_s} = \frac{\partial \left(\phi_i^* \frac{\partial \phi_j^*}{\partial z_l} - \phi_j^* \frac{\partial \phi_i^*}{\partial z_l} \right)}{\partial z_s},$$

dla i, j, l odpowiadających $1p$ -temu wyrazowi w macierzy F_ϕ''' . Jest to równe

$$\phi_i^* \frac{\partial^2 \phi_j^*}{\partial z_l \partial z_s} - \phi_j^* \frac{\partial^2 \phi_i^*}{\partial z_l \partial z_s},$$

co może być różne od zera w punkcie z tylko w przypadku, gdy $i = 0, 0 < j \leq n + \frac{n(n+1)}{2}$, gdyż wymiar przestrzeni form $h \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ takich, że

$$h^*(z) = 0, dh^*_z = 0, \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_n \partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_n \partial z_n} \end{pmatrix} \Big|_z \neq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

jest nie większy niż $\frac{n(n+1)}{2}$ (tłumaczy to dlaczego wystarczy rozpatrywać $\frac{n(n+1)}{2}$ form g). Jednakże pary $ij = 01, 02, \dots, 0n$ nie występują, gdyż kolumny o tych numerach zostały usunięte z F_ϕ .

Ostatecznie po spermutowaniu kolumn dostajemy

$$\left(\begin{array}{cccccc} \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \cdots & \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_n \partial z_1} & \cdots & \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \cdots & \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_n \partial z_1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \cdots & \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_n \partial z_n} & \cdots & \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \cdots & \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial z_n \partial z_n} & 0 & \cdots \end{array} \right) \Big|_z$$

Będziemy używać postaci blokowych macierzy. Dla dowolnej formy $h \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ niech

$$\text{Hess}(h^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_n \partial z_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_1 \partial z_n} & \cdots & \frac{\partial^2 h^*}{\partial z_n \partial z_n} \end{pmatrix}$$

oznacza macierz drugich pochodnych funkcji h^* .

Macierz którą transformujemy ma postać

$$c(\text{Hess}(\phi_{n+1}^*) \quad \text{Hess}(\phi_{n+2}^*) \quad \text{Hess}(\phi_{n+3}^*) \quad \cdots),$$

która to macierz ma być rzędu n . Oczywiście bloki $\text{Hess}(\phi_q^*)$, dla $q > n + \frac{n(n+1)}{2}$ są tożsamościowo zerowe.

Ostatecznie immersywność $\iota_{Lu, \phi}$ w punkcie z jest równoważna ze stwierdzeniem, że macierz

$$\left(\text{Hess}(\phi_{n+1}^*) \quad \cdots \quad \text{Hess} \left(\phi_{n + \frac{n(n+1)}{2}}^* \right) \right)$$

jest rzędu n .

Kładąc $g_i = \phi_{i+n}$ widzimy, że z immersywności $\iota_{Lu, \phi}$ w punkcie z (a więc z immersywności $\iota_{Lu, \varphi}$ w punkcie z) wynika warunek B.2.

W drugą stronę, macierz z warunku B.2 ma postać

$$\begin{pmatrix} \text{Hess}(g_1^*) & \text{Hess}(g_2^*) & \cdots & \text{Hess} \left(g_{\frac{n(n+1)}{2}}^* \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, \phi_0 \rangle I_n & \langle g_2, \phi_0 \rangle I_n & \cdots \\ \langle g_1, \phi_1 \rangle I_n & \langle g_2, \phi_1 \rangle I_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Oczywiście $\text{Hess}(\phi_q^*)$, dla $q > n + \frac{n(n+1)}{2}$, tak jak wyżej są blokami zerowymi, a ponadto

$$\langle g_i, \phi_j \rangle = 0, \quad \text{dla } j \leq n,$$

co wynika z warunku B.2.

Zachodzi więc równość

$$\begin{pmatrix} \text{Hess}(g_1^*) & \text{Hess}(g_2^*) & \cdots & \text{Hess} \left(g_{\frac{n(n+1)}{2}}^* \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Hess}(\phi_{n+1}^*) & \cdots & \text{Hess} \left(\phi_{n + \frac{n(n+1)}{2}}^* \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle g_1, \phi_{n+1} \rangle I_n & \cdots & \langle g_{\frac{n(n+1)}{2}}, \phi_{n+1} \rangle I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_1, \phi_{n + \frac{n(n+2)}{2}} \rangle I_n & \cdots & \langle g_{\frac{n(n+1)}{2}}, \phi_{n + \frac{n(n+2)}{2}} \rangle I_n \end{pmatrix}.$$

Z warunku B.2 mamy, że macierz ta jest rzędu n , a więc i macierz

$$\left(\text{Hess}(\phi_{n+1}^*) \cdots \text{Hess} \left(\phi_{n+\frac{n(n+1)}{2}}^* \right) \right)$$

jest rzędu n , co daje nam immersywność $\iota_{Lu,\phi}$ (i $\iota_{Lu,\varphi}$). □

Twierdzenie 3.5. *Koniecznym i wystarczającym warunkiem aby poprawnie zdefiniowane odwzorowanie $\iota_{Lu,\varphi}$ było iniekcją jest*

• *Dla każdej pary różnych punktów $z, \zeta \in M$, z ustalonymi lokalnymi układami współrzędnych wokół z i ζ oraz dla każdej nieosobliwej $n \times n$ macierzy $(p_{ij})_{i,j=1..n}$ istnieją $f, g \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ takie, że*

$$\left(f^*(z) \frac{\partial g^*}{\partial z_i}(z) - g^*(z) \frac{\partial f^*}{\partial z_i}(z) \right)_{i=1..n} \neq (p_{ij})_{i,j=1..n} \left(f^*(\zeta) \frac{\partial g^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) - g^*(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right)_{j=1..n},$$

jako wektory (warunek B.3)

(Co nie wyklucza możliwości, że dla pewnych (nie wszystkich) i , i -te składowe tych wektorów mogą być sobie równe).

Dowód. Konieczność:

Założmy, że warunek B.3 nie zachodzi, czyli istnieją $z \neq \zeta \in M$ oraz istnieje nieosobliwa $n \times n$ macierz $(p_{ij})_{i,j=1..n}$ taka, że dla wszystkich $f, g \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ zachodzi

$$\left(f^*(z) \frac{\partial g^*}{\partial z_i}(z) - g^*(z) \frac{\partial f^*}{\partial z_i}(z) \right)_{i=1..n} = (p_{ij})_{i,j=1..n} \left(f^*(\zeta) \frac{\partial g^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) - g^*(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right)_{j=1..n},$$

W szczególności równość ta zachodzi przy wyborze $f = \varphi_l, g = \varphi_s$, gdzie $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ jest bazą z konstrukcji Lu Qi-Kenga. Dostajemy

$$F_\varphi(z) = (p_{ij})_{i,j=1..n} F_\varphi(\zeta),$$

gdyż równość zachodzi dla każdej kolumny. Z definicji więc $\iota_{Lu,\varphi}(z) = \iota_{Lu,\varphi}(\zeta)$.

Dostateczność:

Założmy niewprost, że warunek B.3 zachodzi i $\iota_{Lu,\varphi}$ nie jest iniekcją. Istnieją więc $z \neq \zeta \in M$ takie, że $\iota_{Lu,\varphi}(z) = \iota_{Lu,\varphi}(\zeta)$, tzn. istnieje nieosobliwa macierz $(p_{ij})_{i,j=1..n}$ taka, że

$$F_\varphi(z) = (p_{ij})_{i,j=1..n} F_\varphi(\zeta),$$

przy ustalonych lokalnych układach współrzędnych wokół z i ζ , co w szczególności oznacza, że

$$\left(\varphi_l^*(z) \frac{\partial \varphi_s^*}{\partial z_i}(z) - \varphi_s^*(z) \frac{\partial \varphi_l^*}{\partial z_i}(z) \right)_{i=1..n} = (p_{ij})_{i,j=1..n} \left(\varphi_l^*(\zeta) \frac{\partial \varphi_s^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \varphi_s^*(\zeta) \frac{\partial \varphi_l^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right)_{j=1..n}, \quad l, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dla tak wybranych z, ζ i $(p_{ij})_{i,j=1..n}$ wybierzmy f i g z warunku B.3. Z jednej strony

$$\left(f^*(z) \frac{\partial g^*}{\partial z_i}(z) - g^*(z) \frac{\partial f^*}{\partial z_i}(z) \right)_{i=1..n} \neq (p_{ij})_{i,j=1..n} \left(f^*(\zeta) \frac{\partial g^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) - g^*(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right)_{j=1..n}.$$

Z drugiej, możemy wyrazić $f = \sum_{s \geq 0} \alpha_s \varphi_s$ i $g = \sum_{k \geq 0} \beta_k \varphi_k$, gdzie $\alpha_s = \langle f, \varphi_s \rangle, \beta_k = \langle g, \varphi_k \rangle$.

$$\begin{aligned}
& \left(f^*(z) \frac{\partial g^*}{\partial z_i}(z) - g^*(z) \frac{\partial f^*}{\partial z_i}(z) \right)_{i=1..n} = \\
& \left(\sum_{s \geq 0} \alpha_s \varphi_s^*(z) \frac{\partial \sum_{k \geq 0} \beta_k \varphi_k^*(z)}{\partial z_i} - \sum_{k \geq 0} \beta_k \varphi_k^*(z) \frac{\partial \sum_{s \geq 0} \alpha_s \varphi_s^*(z)}{\partial z_i} \right)_{i=1..n} = \\
& \left(\sum_{s,k \geq 0} \alpha_s \beta_k \left(\varphi_s^*(z) \frac{\partial \varphi_k^*(z)}{\partial z_i} - \varphi_k^*(z) \frac{\partial \varphi_s^*(z)}{\partial z_i} \right) \right)_{i=1..n} = \\
& (p_{ij})_{i,j=1..n} \left(\sum_{s,k \geq 0} \alpha_s \beta_k \left(\varphi_s^*(\zeta) \frac{\partial \varphi_k^*(\zeta)}{\partial z_i} - \varphi_k^*(\zeta) \frac{\partial \varphi_s^*(\zeta)}{\partial z_i} \right) \right)_{i=1..n} = \\
& (p_{ij})_{i,j=1..n} \left(f^*(\zeta) \frac{\partial g^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) - g^*(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right)_{j=1..n}.
\end{aligned}$$

Uzyskaliśmy sprzeczność. □

Przy założeniu immersywności $\iota_{Lu,\varphi}$, izometryczność $\iota_{Lu,\varphi}$ pomiędzy $(M, \tilde{\beta})$, a $\left(\mathbb{F} \left(n, \binom{\dim H_{(2)}^0(M, K_M)}{2} \right), \tilde{\omega}_{FS} \right)$ dowodzi się tak samo jak w [Lu08]. Naturalnie zanurzenia Plückera nie trzeba modyfikować. Dostajemy

Twierdzenie 3.6. *Niech M będzie zespoloną rozmaitością, spełniającą warunki A.1, B.1 i B.2. wtedy*

$$\iota_{Plü,\varphi} \circ \iota_{Lu,\varphi} : (M, \tilde{\beta}) \rightarrow \left(\mathbb{CP} \left(\binom{\dim H_{(2)}^0(M, K_M)}{2} \right)^{-1}, \omega_{FS} \right)$$

zachowuje długości krzywych.

Zbadamy teraz relacje pomiędzy odwzorowaniami $\iota_{Ko,\varphi}$ i $\iota_{Lu,\varphi}$. Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.7. *Niech M będzie zespoloną rozmaitością wymiaru $n > 1$, dla której odwzorowanie $\iota_{Lu,\varphi}$ jest dobrze zdefiniowane, a odwzorowanie $\iota_{Ko,\varphi}$ jest iniekcją. Wtedy również odwzorowanie Lu Qi-Kenga, $\iota_{Lu,\varphi}$, jest iniekcją.*

Dowód. Dzięki Obserwacji 32 wiemy, że zachodzi warunek A.2.

Ustalmy punkty $z, \zeta \in M$ i nieosobliwą macierz $(p_{ij})_{i,j=1..n}$. Wystarczy znaleźć f i g spełniające B.3. Weźmy pod uwagę warunek B.1 w punkcie z . Istnieje nieosobliwy 2×2 minor $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_p^*}{\partial z_r} & \frac{\partial f_q^*}{\partial z_s} \\ \frac{\partial f_p^*}{\partial z_s} & \frac{\partial f_q^*}{\partial z_r} \end{pmatrix}$, $p \neq q$, $r \neq s$ macierzy z warunku B.1. Możemy zatem znaleźć (zespolone) stałe A, B takie, że $A \frac{\partial f_p^*}{\partial z_r}(z) + B \frac{\partial f_q^*}{\partial z_r}(z) = 0$ i $A \frac{\partial f_p^*}{\partial z_s}(z) + B \frac{\partial f_q^*}{\partial z_s}(z) = 1$. Niech $f = Af_p + Bf_q$. Zachodzi równość $f^*(z) = 0$ i $\frac{\partial f^*}{\partial z_r}(z) = 0$, $\frac{\partial f^*}{\partial z_s}(z) = 1$. Dla $f^*(\zeta)$ istnieją dwie możliwości dające dwa przypadki.

W przypadku gdy $f^*(\zeta) \neq 0$ można znaleźć (dzięki warunkowi A.2) $g \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ takie, że $g^*(\zeta) = 0$ i $X(g^*)(\zeta) \neq 0$, gdzie $X = (p_{r1}, p_{r2}, \dots, p_{rn})^t$. i -ta składowa wektora z lewej strony wyrażenia z warunku B.3 jest równa 0 dla $i = r$, a z prawej strony wynosi

$$\sum_{j=1}^n p_{rj} f^*(\zeta) \frac{\partial g^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) = f^*(\zeta) X(g^*)(\zeta) \neq 0.$$

W przypadku $f^*(\zeta) = 0$ można znaleźć (dzięki warunkowi A.3) $g \in H_{(2)}^0(M, K_M)$ taką, że $g^*(\zeta) = 0$ i $g^*(z) \neq 0$. Tak więc

$$f^*(z) \frac{\partial g^*}{\partial z_s}(z) - g^*(z) \frac{\partial f^*}{\partial z_s}(z) = -g^*(z) \neq 0.$$

Oraz

$$\sum_{j=1}^n p_{sj} \left(f^*(\zeta) \frac{\partial g^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) - g^*(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial \zeta_j}(\zeta) \right) = \sum_{j=1}^n p_{sj} 0 = 0.$$

□

Przyjrzyjmy się sytuacji $n = 1$ i zwartym powierzchniom Riemanna. Znanym faktem jest, że w tej sytuacji

$$\dim H^0(M, K_M) = \dim H_{(2)}^0(M, K_M) = h^{1,0}(M) = g,$$

gdzie g jest genusem M . Ustalmy punkt $z_0 \in M$. Wybierzmy specjalną bazę ortonormalną przestrzeni $H_{(2)}^0(M, K_M)$, wzorowaną na bazie z rozdziału 2.3.

$$\varphi_0 \in H_{(2)}^0(M, K_M) : \varphi_0^*(z_0) \in \mathbb{R}_+.$$

Taka forma zawsze istnieje, zob. [Lew69].

$$\begin{aligned} \varphi_1 \in H_{(2)}^0(M, K_M) : \varphi_1^*(z_0) = 0, \frac{\partial \varphi_1^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \dots \\ \dots, \frac{\partial^{m_1-1} \varphi_1^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \frac{\partial^{m_1} \varphi_1^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Ścisłym odpowiednikiem specjalnej bazy funkcji w obszarach w \mathbb{C}^n , byłyby sytuacja, gdy $m_1 = 1$. W warunkach zwartej powierzchni Riemanna może się jednak okazać, że takiej formy φ_1 , prostopadłej do φ_0 nie znajdziemy. Z drugiej strony wystąpi (najmniejsza) liczba

$$m \in \mathbb{N} : \frac{\partial^{m'} \varphi_1^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \text{ dla } m' < m, \frac{\partial^m \varphi_1^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+$$

i $\varphi_1 \perp \varphi_0$. Kładziemy $m_1 = m$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 \in H_{(2)}^0(M, K_M) : \varphi_2^*(z_0) = 0, \frac{\partial \varphi_2^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \dots \\ \dots, \frac{\partial^{m_1} \varphi_2^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \dots, \frac{\partial^{m_2-1} \varphi_2^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \frac{\partial^{m_2} \varphi_2^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Ponownie może się okazać, że $m_2 - m_1 > 1$.

⋮

$$\begin{aligned} \varphi_{g-1} \in H_{(2)}^0(M, K_M) : \varphi_{g-1}^*(z_0) = 0, \frac{\partial \varphi_{g-1}^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \dots \\ \dots, \frac{\partial^{m_{g-1}-1} \varphi_{g-1}^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \frac{\partial^{m_{g-1}} \varphi_{g-1}^*(z)}{\partial z \dots \partial z} \Big|_{z=z_0} \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Z każdym punktem $z_0 \in M$ możemy więc skojarzyć ciąg

$$0 = m_0 < m_1 < \dots < m_{g-1}$$

liczb całkowitych i nieujemnych, występujący w powyższej konstrukcji.

Obserwacja 33. *Przestrzeń holomorficzných (1, 0)-form zierujących się w punkcie z_0 do rzędu co najmniej j jest wymiaru $g - \min\{i : m_i \geq j\}$.*

Dowód. Przestrzeń ta jest rozpięta przez formy $\varphi_{\min\{i:m_i \geq j\}}, \dots, \varphi_{g-1}$. □

Twierdzenie 3.8. *Niech $n_1 < n_2 < \dots < n_g$ będzie ciągiem lukowym Weierstrassa w punkcie z_0 . Wtedy ciąg $m_0 < m_1 < \dots < m_{g-1}$ dla punktu z_0 , zdefiniowany powyżej to*

$$m_s = n_{s+1} - 1, s = 0 \dots g - 1.$$

Dowód. Z twierdzenia Riemanna-Rocha wiemy, że

$$\begin{aligned} \dim L((z - z_0)^0) = \text{ord}((z - z_0)^0) + \dim \Omega((z - z_0)^0) - g + 1 = \\ 0 + g - \min\{i : m_i \geq 0\} - g + 1. \end{aligned}$$

Wiemy, że $m_0 = 0$, więc powyższe wyrażenie wynosi $0 + g - 0 - g + 1 = 1$, co odpowiada faktowi, że jedynymi funkcjami holomorficznymi (meromorficznymi rzędu 0) są stałe.

$$\begin{aligned} \dim L((z - z_0)^1) = \text{ord}((z - z_0)^1) + \dim \Omega((z - z_0)^1) - g + 1 = \\ 1 + g - \min\{i : m_i \geq 1\} - g + 1 = 1 + g - 1 - g + 1 = 1, \end{aligned}$$

co odpowiada faktowi, że M nie dopuszcza funkcji meromorficzných, holomorficzných poza $\{z_0\}$, posiadających biegun rzędu 1 w punkcie z_0 (stąd $n_1 = 1$, por. Definicja 1.16).

Łatwo się przekonać, że rozpisując twierdzenie Riemanna-Rocha dla $(z - z_0)^j$ dla $j < m_1 + 1$ cały czas będziemy dostawać $\dim L((z - z_0)^j) = j$, co oznacza, że M dopuszcza funkcję meromorficzną, holomorficzną poza $\{z_0\}$, posiadającą biegun rzędu dokładnie j w punkcie z_0 .

Dla $j = m_1 + 1$ mamy

$$\begin{aligned} \dim L((z - z_0)^{m_1+1}) = \text{ord}((z - z_0)^{m_1+1}) + \dim \Omega((z - z_0)^{m_1+1}) - g + 1 = \\ m_1 + 1 + g - \min\{i : m_i \geq m_1 + 1\} - g + 1 = m_1 + 1 + g - 2 - g + 1 = m_1. \end{aligned}$$

Skoro więc $\dim L((z - z_0)^{m_1+1}) = \dim L((z - z_0)^{m_1})$ to funkcja meromorficzna, holomorficzna poza $\{z_0\}$, posiadająca biegun rzędu dokładnie $m_1 + 1$ w punkcie z_0 nie istnieje, więc $n_2 = m_1 + 1$.

Podobnie

$$\begin{aligned} \dim L((z - z_0)^{m_j}) = \text{ord}((z - z_0)^{m_j}) + \dim \Omega((z - z_0)^{m_j}) - g + 1 = \\ m_j + g - \min\{i : m_i \geq m_j\} - g + 1 = m_j + g - j - g + 1 = m_j - j + 1 \end{aligned}$$

i

$$\dim L((z - z_0)^{m_j+1}) = \text{ord}((z - z_0)^{m_j+1}) + \dim \Omega((z - z_0)^{m_j+1}) - g + 1 =$$

$$m_j + 1 + g - \min\{i : m_i \geq m_j + 1\} - g + 1 = m_j + 1 + g - (j + 1) - g + 1 = m_j - j + 1.$$

Stąd $\dim L((z - z_0)^{m_j}) = \dim L((z - z_0)^{m_j+1})$ i nie istnieje funkcja meromorficzna, holomorficzna poza $\{z_0\}$, posiadająca biegun rzędu dokładnie $m_j + 1$ w punkcie z_0 . Tak więc $m_j + 1$ będzie jedną z liczb n_1, \dots, n_g . Zważywszy na kolejność mamy $n_{j+1} = m_j + 1$. \square

Wyrażmy teraz $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log K^*(z, z)$ w skonstruowanej specjalnej bazie. Istnieją dwa przypadki.

Gdy $m_1 = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log K^*(z, z)|_{z=z_0} = \\ & \frac{\varphi_0^*(z_0) \overline{\varphi_0^*(z_0)} \left(\frac{\partial \varphi_0^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \frac{\overline{\partial \varphi_0^*(z)}}{\partial z} \Big|_{z=z_0} + \frac{\partial \varphi_1^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \frac{\overline{\partial \varphi_1^*(z)}}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \right) - \varphi_0^*(z_0) \frac{\partial \varphi_0^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \overline{\varphi_0^*(z_0) \frac{\partial \varphi_0^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0}}}{(\varphi_0^*(z_0) \overline{\varphi_0^*(z_0)})^2} \\ & = \frac{\left| \frac{\partial \varphi_1^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \right|^2}{|\varphi_0^*(z_0)|^2} > 0. \end{aligned}$$

Gdy $m_1 > 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log K^*(z, z)|_{z=z_0} = \\ & \frac{\varphi_0^*(z_0) \overline{\varphi_0^*(z_0)} \frac{\partial \varphi_0^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \frac{\overline{\partial \varphi_0^*(z)}}{\partial z} \Big|_{z=z_0} - \varphi_0^*(z_0) \frac{\partial \varphi_0^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \overline{\varphi_0^*(z_0) \frac{\partial \varphi_0^*(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0}}}{(\varphi_0^*(z_0) \overline{\varphi_0^*(z_0)})^2} = 0. \end{aligned}$$

Z drugiej strony $m_1 > 1$ oznacza, że $n_2 > 2$, a więc M dopuszcza funkcję meromorficzną o jednym biegunie w punkcie z_0 , rzędu 2. Stąd dostajemy

Twierdzenie 3.9 (Lewittesa, zob. [Lew69], gdzie “Bergman metric” oznacza co innego niż nasza definicja metryki Bergmana). *Zwarta powierzchnia Riemanna dopuszcza metrykę Bergmana wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest hiperliptyczna.*

W wyższych wymiarach wyników na temat istnienia metryki Bergmana jest bardzo mało, zob. [CZ02].

Przykład 3.10. Dla zwartej powierzchni Riemanna o genusie 2 odwzorowanie Kobayashiego jest dobrze zdefiniowane, a konstrukcji Lu Qi-Kenga nie da się przeprowadzić.

Dowód. Warunek A.1 zachodzi dla każdej zwartej powierzchni Riemanna, zatem $\iota_{K_o, \varphi}$ jest dobrze zdefiniowane. Ciąg lukowy Weierstrassa w każdym z sześciu punktów Weierstrassa to

$$1, 3,$$

więc $m_1 = 2$ i oznacza to, że każda forma $f \in H_{(2)}^0(M, K_M)$, która się zeruje w danym punkcie Weierstrassa z_0 , dodatkowo spełnia $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0$. Nie jest więc spełniony warunek B.1. \square

Uwaga. Z Twierdzenia 1.14 wynika, że rozmaitość z powyższego przykładu jest zwartą hiperliptyczną powierzchnią Riemanna, a zatem z Twierdzenia 3.9 wiemy, że odwzorowanie Kobayashiego nie jest globalną immersją. Immersyjność popsuje się dokładnie w sześciu punktach Weierstrassa.

Przykład 3.11. Na nie-hipereliptycznej zwartej powierzchni Riemanna o genusie 3 odwzorowanie Kobayashiego jest globalną immersją, natomiast odwzorowanie Lu Qi-Kenga nie jest immersją, a punkty w których występuje obstrukcja to dokładnie punkty Weierstrassa, których jest od 12 do 24.

Dowód. Skoro powierzchnia nie jest hipereliptyczna, z Twierdzenia 3.9 wiemy, że metryka Bergmana istnieje, a zatem $\iota_{K_o, \varphi}$ jest immersją.

Z Twierdzenia 1.17 i Definicji 1.16 wiemy, że możliwymi konfiguracjami są

- 24 punkty Weierstrassa i w każdym z nich ciąg lukowy ma postać

$$1, 2, 4,$$

- i punktów Weierstrassa z ciągiem lukowym $1, 2, 4$ i $\frac{24-i}{2}$ z ciągiem lukowym $1, 2, 5$, dla $i = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$. Pierwszy przypadek jest przypadkiem generycznym (zob. [KK77], gdzie podano konkretne przykłady takich powierzchni Riemanna). Widzimy, że każda forma $f \in H_{(2)}^0(M, K_M)$, która się zeruje w danym punkcie Weierstrassa z_0 i $\frac{\partial f^*}{\partial z}|_{z=z_0} = 0$, dodatkowo spełnia $\frac{\partial^2 f^*}{\partial z \partial \bar{z}}|_{z=z_0} = 0$, zatem nie jest spełniony warunek B.2. \square

W związku z możliwością poprawnego zdefiniowania odwzorowań Kobayashiego i Lu Qi-Kenga na rozmaitościach, przenoszą się tam również Twierdzenia 0.1 i 0.2. Teraz już łatwo podać dowód Twierdzenia 0.4.

Dowód. Ustalmy punkt $z_0 \in M$. Jeżeli $\text{diam}M < \frac{\pi}{2}$, to M jest zawarta w kuli geodezyjnej $\{z \in M : \text{dist}_M(z, z_0) < \frac{\pi}{2}\}$, a zatem w_1 jest globalnie zdefiniowaną niestałą funkcją holomorficzną, która oczywiście nie może istnieć. \square

4. PRZYKŁADY

Wspólną cechą trzech poniższych przykładów jest analiza pierścienia $P_r \subset \mathbb{C}$. Podsumujmy wiedzę na temat jądra Bergmana dla P_r .

Twierdzenie 4.1 (zob. np. [JP93]). *Jądro Bergmana dla pierścienia P_r na płaszczyźnie, $K_{P_r}(z, \zeta)$, które będzie skrótowo oznaczane przez K , dane jest wzorem*

$$(4.1) \quad K = -\frac{1}{\pi z \bar{\zeta} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2+2j}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^2} + \frac{r^{2j}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^2} \right).$$

Bezpośrednim skutkiem tego twierdzenia są wzory

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{\pi z^2 \bar{\zeta} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{2r^{2+2j} \bar{\zeta}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^3} + \frac{2r^{4j} \bar{\zeta}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^3} \right) \\ K_{\bar{1}} &= \frac{1}{\pi z \bar{\zeta}^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{2r^{2+2j} z}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^3} + \frac{2r^{4j} z}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^3} \right) \\ K_{11} &= -\frac{2}{\pi z^3 \bar{\zeta} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{2+2j} \bar{\zeta}^2}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^4} + \frac{6r^{6j} \bar{\zeta}^2}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^4} \right) \\ K_{\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{2}{\pi z \bar{\zeta}^3 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{2+2j} z^2}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^4} + \frac{6r^{6j} z^2}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1\bar{1}} &= -\frac{1}{\pi z^2 \bar{\zeta}^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{2+2j} z \bar{\zeta}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^4} - \frac{2r^{2+2j}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6r^{6j} z \bar{\zeta}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^4} + \frac{2r^{4j}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^3} \right) \\
K_{11\bar{1}} &= \frac{2}{\pi z^3 \bar{\zeta}^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{24r^{2+2j} z \bar{\zeta}^2}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^5} + \frac{12r^{2+2j} \bar{\zeta}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{24r^{8j} z \bar{\zeta}^2}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^5} + \frac{12r^{6j} \bar{\zeta}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^4} \right) \\
K_{1\bar{1}\bar{1}} &= \frac{2}{\pi z^2 \bar{\zeta}^3 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{24r^{2+2j} z^2 \bar{\zeta}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^5} + \frac{12r^{2+2j} z}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{24r^{8j} z^2 \bar{\zeta}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^5} + \frac{12r^{6j} z}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^4} \right) \\
K_{11\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{4}{\pi z^3 \bar{\zeta}^3 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{120r^{2+2j} z^2 \bar{\zeta}^2}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^6} - \frac{96r^{2+2j} z \bar{\zeta}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^5} \right. \\
&\quad \left. + \frac{12r^{2+2j}}{(-r^{2+2j} + z \bar{\zeta})^4} + \frac{120r^{10j} z^2 \bar{\zeta}^2}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^6} + \frac{96r^{8j} z \bar{\zeta}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^5} + \frac{12r^{6j}}{(1 - r^{2j} z \bar{\zeta})^4} \right).
\end{aligned}$$

4.1. Przykład pierwszy. W tej części przeanalizujemy dokładnie zachowanie krzywizny metryki Bergmana dla pierścienia. Pierwsze wzmianki o globalnym zachowaniu tej krzywizny pojawiły się już w [Sui72].

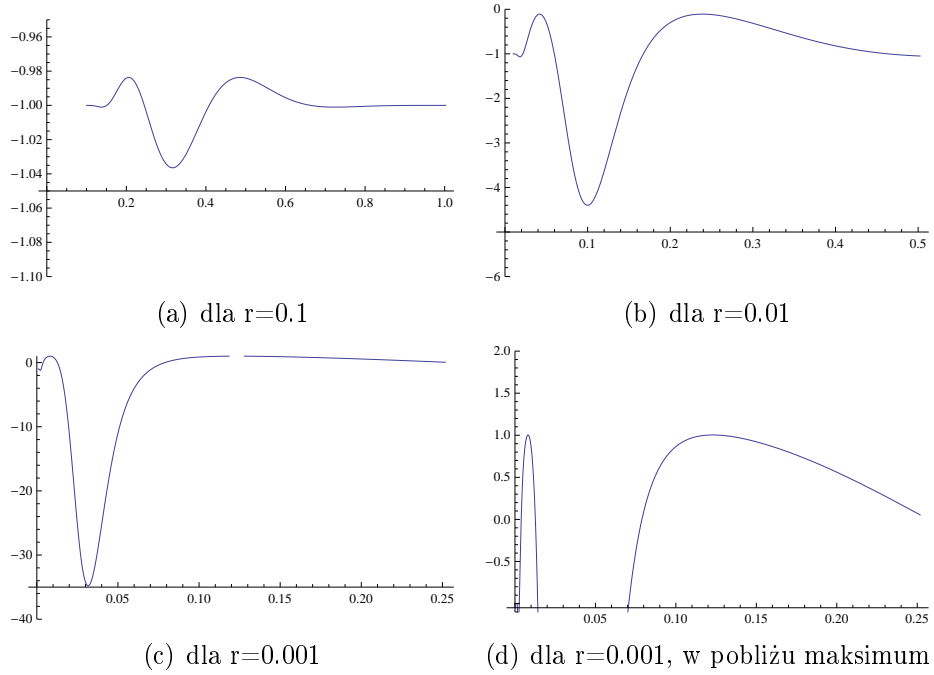
Ponieważ pierścień ma gładki brzeg, z twierdzenia Klembecka (zob. Twierdzenie 1.23) wynika, że

$$\lim_{P_r \ni z \rightarrow \partial P_r} R_{P_r}(z) = -1.$$

Gdy $r \rightarrow 0^+$, obszary P_r będą wyczerpywać dysk jednostkowy z usuniętym środkiem $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, dlatego też można się spodziewać, że odpowiadające różnym r krzywizny metryki Bergmana będą dążyć do krzywizny metryki Bergmana obszaru $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, która jest równa krzywiznie całego koła jednostkowego \mathbb{D} (stała -1). (W przypadku jądra Bergmana jest to teza twierdzenia Ramadanova, zob. [Ram67]). Przypuszczenie to jest słuszne, jednakże zbieżność jest tylko lokalnie jednostajna (a nie jednostajna). Co więcej, numeryczne eksperymenty wskazują, że globalne maksimum krzywizny metryki Bergmana zbliża się do 2, wraz z dążeniem r do 0 oraz globalne minimum zdaje się być nieograniczone.

Wykresy umieszczone poniżej prezentują zachowanie krzywizny, gdy zostanie ona zawężona do odcinka $(r, 1) \subset \mathbb{R}$, dla różnych wyborów r (na krzywiznę pierścienia patrzymy jak na funkcję z P_r o wartościach rzeczywistych, tak więc zawężenie będzie funkcją z odcinka w $(-\infty, 2)$).

Wspomniane eksperymenty numeryczne, będące tylko heurystyką, zostaną potwierdzone analitycznie poprzez dowód Twierdzenia 0.5. Naszym pierwszym celem jest podanie bardzo technicznego, lecz całkowicie ścisłego dowodu tego twierdzenia. Znacznie prostszy dowód został podany przez Zwonka, zob. [Zwo]. Uzyskał on ponadto pełną charakteryzację granicznego



RYSUNEK 4. Wykres krzywizny pierścienia P_r , zawężonej do odcinka $(r,1)$

zachowania krzywizny R_{P_r} , dla wszystkich potęg r (nie tylko $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{10}$ jak w naszym przypadku). Konkretnie zachodzi

Twierdzenie 4.2. *Dla pierścienia na płaszczyźnie P_r zachodzą następujące równości*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{P_r}(r^\alpha) = 2, \text{ dla } \alpha \in (0, 1/3] \cup [2/3, 1)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{P_r}(r^\alpha) = -\infty, \text{ dla } \alpha \in (1/3, 2/3).$$

Następnie wykorzystując Twierdzenie 0.5 skonstruujemy przykład, dowodzący Twierdzenie 0.6. W tym celu wykorzystamy znaną (pojawiającą się np. w [Cat89] lub [Her03]) technikę lokalizacyjną, która jest mocno związana z geometrią obszaru.

Oznaczmy przez $S := \left(-\frac{K_{\bar{1}}K_1}{K^2} + \frac{K_{1\bar{1}}}{K}\right)$. Wykorzystując Obserwację 28, przedstawimy krzywiznę metryki Bergmana dla pierścienia R_{P_r} , przy pomocy kolejnych pochodnych jądra Bergmana K , zawężonych do $z = \zeta$, jako

$$R_{P_r}(z) = \sum_{j=1}^{24} A_j(z),$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4 K_{\bar{1}}^3 K_1^3}{K^6 S^3}, & A_2 &= -\frac{2 K_{\bar{1}} K_{1\bar{1}} K_1^3}{K^5 S^3}, & A_3 &= -\frac{8 K_{\bar{1}}^2 K_1^2 K_{1\bar{1}}}{K^5 S^3}, \\ A_4 &= \frac{2 K_{1\bar{1}} K_1^2 K_{1\bar{1}}}{K^4 S^3}, & A_5 &= \frac{4 K_{\bar{1}} K_1 K_{1\bar{1}}^2}{K^4 S^3}, & A_6 &= \frac{6 K_{\bar{1}}^2 K_1^2}{K^4 S^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_7 &= -\frac{2K_{\bar{1}\bar{1}}K_1^2}{K^3S^2}, & A_8 &= -\frac{8K_{\bar{1}}K_1K_{1\bar{1}}}{K^3S^2}, & A_9 &= \frac{2K_{\bar{1}\bar{1}}^2}{K^2S^2}, \\
A_{10} &= \frac{2K_{\bar{1}}K_1^2K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^4S^3}, & A_{11} &= -\frac{2K_1K_{\bar{1}\bar{1}}K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^3S^3}, & A_{12} &= \frac{2K_1K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^2S^2}, \\
A_{13} &= -\frac{2K_{\bar{1}}^3K_1K_{11}}{K^5S^3}, & A_{14} &= \frac{K_{\bar{1}}K_{\bar{1}\bar{1}}K_1K_{11}}{K^4S^3}, & A_{15} &= \frac{2K_{\bar{1}}^2K_{\bar{1}\bar{1}}K_{11}}{K^4S^3}, \\
A_{16} &= -\frac{2K_{\bar{1}}^2K_{11}}{K^3S^2}, & A_{17} &= \frac{K_{11}K_{\bar{1}\bar{1}}}{K^2S^2}, & A_{18} &= -\frac{K_{\bar{1}}K_{1\bar{1}\bar{1}}K_{11}}{K^3S^3}, \\
A_{19} &= \frac{2K_{\bar{1}}^2K_1K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^4S^3}, & A_{20} &= -\frac{K_{\bar{1}\bar{1}}K_1K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^3S^3}, & A_{21} &= -\frac{2K_{\bar{1}}K_{\bar{1}\bar{1}}K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^3S^3}, \\
A_{22} &= \frac{2K_{\bar{1}}K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^2S^2}, & A_{23} &= \frac{K_{1\bar{1}\bar{1}}K_{1\bar{1}\bar{1}}}{K^2S^3}, & A_{24} &= -\frac{K_{1\bar{1}\bar{1}}}{KS^2}.
\end{aligned}$$

Bezpośrednimi rachunkami, korzystając ze wzoru (4.1) i następujących po nim wzorów, sprawdzamy, że przy specjalnym wyborze $\zeta = z = \sqrt{r} \in \mathbb{R}_+$, $r < \sqrt{r} < 1$ dostajemy

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{\pi r \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2j}}{(-r^{1+2j} + 1)^2} + \frac{r^{2j}}{(1 - r^{2j+1})^2} \right) \\
K_1 = K_{\bar{1}} &= \frac{1}{\pi r^{\frac{3}{2}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2r^{\frac{1}{2}+4j}}{(-r^{1+2j} + 1)^3} - \frac{2r^{-\frac{1}{2}+2j}}{(1 - r^{2j+1})^3} \right) \\
K_{11} = K_{\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{2}{\pi r^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{1+2j}}{(-r^{1+2j} + 1)^4} + \frac{6r^{2j-1}}{(1 - r^{2j+1})^4} \right) \\
K_{\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{1}{\pi r^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{1+6j}}{(-r^{1+2j} + 1)^4} + \frac{2r^{4j}}{(-r^{1+2j} + 1)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6r^{2j-1}}{(1 - r^{1+2j})^4} - \frac{2r^{2j-1}}{(1 - r^{2j+1})^3} \right) \\
K_{1\bar{1}\bar{1}} = K_{\bar{1}\bar{1}\bar{1}} &= \frac{2}{\pi r^{\frac{5}{2}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{24r^{\frac{3}{2}+8j}}{(-r^{1+2j} + 1)^5} + \frac{12r^{\frac{1}{2}+6j}}{(-r^{1+2j} + 1)^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{24r^{2j-\frac{3}{2}}}{(1 - r^{1+2j})^5} + \frac{12r^{2j-\frac{3}{2}}}{(1 - r^{2j+1})^4} \right) \\
K_{\bar{1}\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{4}{\pi r^3 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{120r^{10j+2}}{(-r^{1+2j} + 1)^6} + \frac{96r^{1+8j}}{(-r^{1+2j} + 1)^5} \right. \\
&\quad \left. + \frac{12r^{6j}}{(-r^{1+2j} + 1)^4} + \frac{120r^{2j-2}}{(1 - r^{2j+1})^6} - \frac{96r^{2j-2}}{(1 - r^{2j+1})^5} + \frac{12r^{2j-2}}{(1 - r^{2j+1})^4} \right).
\end{aligned}$$

Wszystkie powyższe szeregi są lokalnie jednostajnie zbieżne w kole jednostkowym oraz wszystkie wyrazy są postaci $f(\sqrt{r})$, gdzie f jest funkcją \mathbb{R} -analityczną (z wyjątkiem początkowych wyrazów, które w niektórych przypadkach mają osiowości). Dlatego suma każdego z powyższych szeregów jest postaci $F(\sqrt{r})$ + część osiowita, gdzie F jest funkcją \mathbb{R} -analityczną, można więc zapisać:

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{\pi r \log(r^2)} + \pi^{-1} (2 + 4r + 8r^2 + O(r^3)) \\
K_1 = K_{\bar{1}} &= \frac{1}{\pi r^{\frac{3}{2}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \left(\frac{-2}{\sqrt{r}} - 4\sqrt{r} - 8r^{\frac{3}{2}} + O(r^{\frac{5}{2}}) \right) \\
K_{11} = K_{\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{2}{\pi r^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \left(\frac{6}{r} + 24 + O(r) \right) \\
K_{1\bar{1}} &= -\frac{1}{\pi r^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \left(\frac{4}{r} + 20 + 64r + O(r^2) \right) \\
K_{11\bar{1}} = K_{\bar{1}\bar{1}\bar{1}} &= \frac{2}{\pi r^{\frac{5}{2}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \left(-\frac{12}{r^{\frac{3}{2}}} - \frac{72}{\sqrt{r}} + O(r^{\frac{1}{2}}) \right) \\
K_{11\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{4}{\pi r^3 \log(r^2)} + \pi^{-1} \left(\frac{36}{r^2} + \frac{288}{r} + O(C) \right).
\end{aligned}$$

Uwaga. W powyższym zapisie zawsze potęgi r w wyrazie $\frac{1}{\pi r^\alpha \log(r^2)}$ i w $O(r^\beta)$ są w następującej relacji

$$(\dagger) \quad \alpha + \beta \geq 3.$$

Udowodnimy teraz, że możemy się pozbyć wyrazów "O"we wzorach reprezentujących wyrażenia $A_j(\sqrt{r})$, $j = 1, \dots, 24$, przy powyższej notacji.

Lemat 4.3. Niech $A_j^*(\sqrt{r})$ będzie wyrażeniem $A_j(\sqrt{r})$, z usuniętymi wyrazami zawierającymi "O". Zachodzą równości

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A_j(\sqrt{r}) - A_j^*(\sqrt{r}) = 0, j = 1, \dots, 24.$$

Dowód. Rozpatrzmy najpierw wyrażenie $\left(-\frac{K_{\bar{1}}K_1}{K^2} + \frac{K_{1\bar{1}}}{K}\right)$. Mamy

$$S = -\frac{K_{\bar{1}}K_1}{K^2} + \frac{K_{1\bar{1}}}{K} = \frac{K_{1\bar{1}}K - K_1K_{\bar{1}}}{K^2} =$$

Licznik tego wyrażenia to

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi^2} \left(-\frac{1}{r^2 \log(r^2)} + \frac{4}{r} + 20 + 64r + O(r^2) \right) \left(-\frac{1}{r \log(r^2)} + 2 + 4r + 8r^2 + O(r^3) \right) \\
&\quad - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}} \log(r^2)} + \frac{-2}{\sqrt{r}} - 4\sqrt{r} - 8r^{\frac{3}{2}} + O(r^{\frac{5}{2}}) \right)^2,
\end{aligned}$$

a mianownik

$$\frac{1}{\pi^2} \left(-\frac{1}{r \log(r^2)} + 2 + 4r + 8r^2 + O(r^3) \right)^2.$$

Możemy się pozbyć stałych $\frac{1}{\pi^2}$. Wymnażając nawiasy w liczniku dostajemy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^3 \log(r^2)} \left[448 \log(r^2) r^6 + 352 \log(r^2) r^5 + 8 \log(r^2) O(r^2) r^5 + 16 \log(r^2) O(r^{\frac{5}{2}}) r^{9/2} \right. \\
&\quad \left. + 192 \log(r^2) r^4 + 4 \log(r^2) O(r^2) r^4 + 64 \log(r^2) O(r^3) r^4 + 8 \log(r^2) O(r^{\frac{5}{2}}) r^{7/2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\log(r^2) O(r^{\frac{5}{2}})^2 r^3 + 40 \log(r^2) r^3 + 2 \log(r^2) O(r^2) r^3 + 20 \log(r^2) O(r^3) r^3 \\
& + \log(r^2) O(r^2) O(r^3) r^3 - 56r^3 + 4 \log(r^2) O(r^{\frac{5}{2}}) r^{5/2} + 4 \log(r^2) r^2 - O(r^2) r^2 \\
& \quad + 4 \log(r^2) O(r^3) r^2 - 16r^2 - 2O(r^{\frac{5}{2}}) r^{3/2} - O(r^3) r - 2r \Big].
\end{aligned}$$

Każdy wyraz, zawierający "O" jest rzędu $O(r^4)$, tak więc również ich suma jest rzędu $O(r^4)$. Grupując osobny wyrazy zawierające i niezawierające "O" dostajemy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^3 \log(r^2)} (448 \log(r^2) r^6 + 352 \log(r^2) r^5 + 192 \log(r^2) r^4 + 40 \log(r^2) r^3 \\
& \quad - 56r^3 + 4 \log(r^2) r^2 - 16r^2 - 2r + O(r^4)).
\end{aligned}$$

Wyciągając r przed nawias dostajemy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2 \log(r^2)} (448 \log(r^2) r^5 + 352 \log(r^2) r^4 + 192 \log(r^2) r^3 + 40 \log(r^2) r^2 \\
& \quad - 56r^2 + 4 \log(r^2) r - 16r - 2 + O(r^3)).
\end{aligned}$$

W tym miejscu widoczne staje się dlaczego $\alpha + \beta = 4$, a nie 3 w rozwinięciach K , K_1 , $K_{\bar{1}}$ i $K_{1\bar{1}}$ powyżej.

Uzyskane wyrażenie zapisujemy jako

$$\frac{1}{r^2 \log(r^2)} (-2 + Q(r) + O(r^3)),$$

gdzie $Q(r)$ jest sumą wszystkich składników sumy w nawiasie, poza -2 i $O(r^3)$. Oczywiście $Q(r)$ jest rzędu $O(r \log(r^2))$.

Mianownik transformuje się do

$$\frac{1}{r^2 (\log(r^2))^2} (-1 + 2r \log(r^2) + 4r^2 \log(r^2) + 8r^3 \log(r^2) + r \log(r^2) O(r^3))^2.$$

Ostatecznie

$$(4.2) \quad S = \frac{r \log(r^2) (-2 + Q(r) + O(r^3))}{(-1 + 2r \log(r^2) + 4r^2 \log(r^2) + 8r^3 \log(r^2) + r \log(r^2) O(r^3))^2}.$$

Po przeprowadzeniu elementarnych algebraicznych przekształceń dostajemy

$$\begin{aligned}
& A_j(\sqrt{r}) = \\
& \frac{\pm 1 (-2 + Q(r) + O(r^3))^{-p_j} \prod_{i=1}^{m_j} (a_0^{ij} + a_1^{ij} r^{\alpha_1^{ij}} \log(r^2) + \dots + a_{k(ij)}^{ij} r^{\alpha_{k(ij)}^{ij}} \log(r^2) O(r^{\gamma_{k(ij)}^{ij}}))}{(r \log(r^2))^{p_j} \prod_{i=1}^{n_j} (b_0^{ij} + b_1^{ij} r^{\beta_1^{ij}} \log(r^2) + \dots + b_{s(ij)}^{ij} r^{\beta_{s(ij)}^{ij}} \log(r^2) O(r^{\delta_{s(ij)}^{ij}}))}.
\end{aligned}$$

Powyżej p_j jest potęgą, z jaką S występuje we wzorze na A_j , tzn. $p_j = 2$, dla $j = 6, 7, 8, 9, 12, 16, 17, 22, 24$, a w pozostałych przypadkach $p_j = 3$. Liczby α_l^{ij} i β_l^{ij} , dla ustalonych i, j formują ciągi (indeksowane przez l) składające się z $k(ij)$, względnie $s(ij)$ dodatnich liczb wymiernych, które są rosnące dla $1 \leq l \leq k(ij) - 1$, względnie $1 \leq l \leq s(ij) - 1$. W szczególności taki zapis ma wyrażenie, którego kwadrat to mianownik wyrażenia S ,

$$-1 + 2r \log(r^2) + 4r^2 \log(r^2) + 8r^3 \log(r^2) + r \log(r^2) O(r^3).$$

Notacja $k(ij)$ i $s(ij)$ ma na celu podkreślenie faktu, że długość każdego ciągu zależy również od i i j . Liczby a_l^{ij} i b_l^{ij} są pewnymi (całkowitymi) stałymi. Wreszcie $\alpha_{k(ij)}^{ij} + \gamma_{k(ij)}^{ij} \geq 3$ i

$\beta_{s(ij)}^{ij} + \delta_{s(ij)}^{ij} \geq 3$, ze względu na (†). Dalej dokonamy zmiany oznaczeń $k(ij)$ i $s(ij)$ na k i s , jednakże cały czas będziemy pamiętać, że zależą one od i oraz j .

Licznik wyrażenia $A_j(\sqrt{r}) - A_j^*(\sqrt{r})$, nie biorąc pod uwagę wspólnego mianownika $\frac{\pm 1}{(r \log(r^2))^{p_j}}$, to

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{m_j} \left(a_0^{ij} + \sum_{l=1}^{k-1} a_l^{ij} r^{\alpha_l^{ij}} \log(r^2) + a_k^{ij} r^{\alpha_k^{ij}} \log(r^2) O(r^{\gamma_k^{ij}}) \right) \times \\ & \quad \prod_{i=1}^{n_j} \left(b_0^{ij} + \sum_{l=1}^{s-1} b_l^{ij} r^{\beta_l^{ij}} \log(r^2) \right) \times (-2 + Q(r))^{p_j} \\ & - \prod_{i=1}^{n_j} \left(b_0^{ij} + \sum_{l=1}^{s-1} b_l^{ij} r^{\beta_l^{ij}} \log(r^2) + b_s^{ij} r^{\beta_s^{ij}} \log(r^2) O(r^{\delta_s^{ij}}) \right) \times \\ & \quad \prod_{i=1}^{m_j} \left(a_0^{ij} + \sum_{l=1}^{k-1} a_l^{ij} r^{\alpha_l^{ij}} \log(r^2) \right) \times (-2 + Q(r) + O(r^3))^{p_j} \end{aligned}$$

i widzimy, że po wymnożeniu nawiasów wszystkie wyrażenia niezawierające “ O ” redukują się nawzajem. Pozostałe wyrażenia są rzędu $O(r^3 \log(r))$, ze względu na (†), a więc ich suma także jest rzędu $O(r^3 \log(r))$.

Mianownik to

$$\begin{aligned} & (r \log(r^2))^{p_j} \prod_{i=1}^{n_j} \left(b_0^{ij} + \sum_{l=1}^{s-1} b_l^{ij} r^{\beta_l^{ij}} \log(r^2) + b_s^{ij} r^{\beta_s^{ij}} \log(r^2) O(r^{\delta_s^{ij}}) \right) \times \\ & \quad \prod_{i=1}^{n_j} \left(b_0^{ij} + \sum_{l=1}^{s-1} b_l^{ij} r^{\beta_l^{ij}} \log(r^2) \right) \times (-2 + Q(r))^{p_j} \times (-2 + Q(r) + O(r^3))^{p_j}, \end{aligned}$$

co jest rzędu dokładnie $(r \log(r^2))^{p_j}$, tj. jest rzędu $O((r \log(r^2))^{p_j})$ ale nie jest rzędu $o((r \log(r^2))^{p_j})$, ponieważ żadne b_0^{ij} nie jest zerem, $\beta_l^{ij} > 0$ oraz $\beta_s^{ij} + \delta_s^{ij} \geq 3 > 0$, z czego wynika, że iloraz

$$\frac{O(r^3 \log(r))}{(r \log(r^2))^{p_j}} = \frac{O(r^3 \log(r))}{r^3 \log(r)} \frac{r^3 \log(r)}{(r \log(r^2))^{p_j}}$$

dąży do 0. □

Obserwacja 34. Przy okazji udowodniliśmy (we wzorze (4.2)), że

$$T_{1\bar{1}P_r}(\sqrt{r}) = S \approx -2r \log(r^2).$$

Wyrazy A_j^* mogą być asymptotycznie oszacowane w następujący sposób:

$$\begin{aligned} A_{23}^*(\sqrt{r}) & \approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{7}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{30}{r \log(r^2)} \\ A_{21}^*(\sqrt{r}) & \approx \frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{6}{r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{22}{r \log(r^2)} \\ A_{20}^*(\sqrt{r}) & \approx \frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{11}{2r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{18}{r \log(r^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{19}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{5}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{14}{r \log(r^2)} \\
A_{18}^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{11}{2r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{18}{r \log(r^2)} \\
A_{15}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{9}{2r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{13}{r \log(r^2)} \\
A_{14}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{4}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{21}{2r \log(r^2)} \\
A_{13}^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{7}{2r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{8}{r \log(r^2)} \\
A_{11}^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{6}{r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{22}{r \log(r^2)} \\
A_{10}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{5}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{14}{r \log(r^2)} \\
A_5^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{5}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{16}{r \log(r^2)} \\
A_4^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{9}{2r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{13}{r \log(r^2)} \\
A_3^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{8}{r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{24}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{20}{r \log(r^2)} \\
A_2^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{7}{2r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{8}{r \log(r^2)} \\
A_1^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{3}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^2 (\log(r^2))^3} - \frac{6}{r \log(r^2)},
\end{aligned}$$

gdzie za każdym razem

$$A_j^*(\sqrt{r}) \approx \frac{a_j}{r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{b_j}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{c_j}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{d_j}{r \log(r^2)}$$

powinno być odczytywane jako

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A_j^*(\sqrt{r}) r^3 (\log(r^2))^3 = a_j, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(A_j^*(\sqrt{r}) - \frac{a_j}{r^3 (\log(r^2))^3} \right) r^2 (\log(r^2))^2 = b_j,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(A_j^*(\sqrt{r}) - \frac{a_j}{r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{b_j}{r^2 (\log(r^2))^2} \right) r^2 (\log(r^2))^3 = c_j,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(A_j^*(\sqrt{r}) - \frac{a_j}{r^3 (\log(r^2))^3} - \frac{b_j}{r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{c_j}{r^2 (\log(r^2))^3} \right) r \log(r^2) = d_j.$$

Pozostałe wyrazy mają następujące rozwinięcia asymptotyczne

$$\begin{aligned}
A_{24}^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{11}{r \log(r^2)} \\
A_{22}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{r^2 (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r \log(r^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{17}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^2(\log(r^2))^2} - \frac{6}{r \log(r^2)} \\
A_{16}^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{2r^2(\log(r^2))^2} + \frac{5}{r \log(r^2)} \\
A_{12}^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^2(\log(r^2))^2} - \frac{8}{r \log(r^2)} \\
A_9^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{1}{2r^2(\log(r^2))^2} - \frac{4}{r \log(r^2)} \\
A_8^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{2}{r^2(\log(r^2))^2} + \frac{12}{r \log(r^2)} \\
A_7^*(\sqrt{r}) &\approx \frac{1}{2r^2(\log(r^2))^2} + \frac{5}{r \log(r^2)} \\
A_6^*(\sqrt{r}) &\approx -\frac{3}{2r^2(\log(r^2))^2} - \frac{6}{r \log(r^2)},
\end{aligned}$$

gdzie za każdym razem

$$A_j^*(\sqrt{r}) \approx \frac{a_j}{r^2(\log(r^2))^2} + \frac{b_j}{r \log(r^2)}$$

oznacza

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A_j^*(\sqrt{r}) r^2 (\log(r^2))^2 = a_j, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(A_j^*(\sqrt{r}) - \frac{a_j}{r^2 (\log(r^2))^2} \right) r \log(r^2) = b_j.$$

Sumując wszystkie powyższe wyrazy dostajemy

$$\sum_{j=1}^{24} A_j^*(\sqrt{r}) \approx \frac{0}{r^3 (\log(r^2))^3} + \frac{0}{r^2 (\log(r^2))^2} + \frac{0}{r^2 (\log(r^2))^3} + \frac{1}{2r \log(r^2)}.$$

Stąd

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{24} A_j(\sqrt{r}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{24} A_j^*(\sqrt{r}) = -\infty.$$

Dowodzi to pierwszej części Twierdzenia 0.5.

Uwaga. Ze względu na symetrię w pierścieniu (por. z Obserwacją 35 poniżej) łatwo wnioskować, że w punkcie $\frac{1}{2}$ występuje ekstremum funkcji

$$[0, 1] \ni t \rightarrow R_{P_r}(r^t),$$

dla dowolnego ustalonego r . Rachunki wskazują, że w punkcie tym występuje minimum lokalne, dlatego też wybraliśmy $\zeta = z = \sqrt{r}$ w Twierdzeniu 0.5. Lokalizacja punktów, w których $t \rightarrow R_{P_r}(r^t)$ osiąga maksimum lokalne nie jest jednak możliwa elementarnymi metodami. Nie ma też a priori pewności, że punkt ten (lub punkty) nie zależy od r . Eksperymenty numeryczne wykazały, że taki punkt powinien występować "w pobliżu" wartości $t = \frac{3}{10}$. Okazuje się jednak, że wybór $t = \frac{3}{10}$, podyktowany heurystyką, jest asymptotycznie dobry dla dalszych rozważań, nawet bez wiedzy, czy rzeczywiście przy $r \rightarrow 0^+$, któryś z punktów krytycznych funkcji $t \rightarrow R_{P_r}(r^t)$ dąży do $\frac{3}{10}$.

Dla specjalnego wyboru $\zeta = z = r^{\frac{3}{10}} \in \mathbb{R}_+$, $r < r^{\frac{3}{10}} < 1$ dostajemy

$$K = -\frac{1}{\pi r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^2} + \frac{r^{2j+\frac{4}{5}}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^2} \right)$$

$$K_1 = \frac{1}{\pi r^{\frac{9}{10}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2r^{\frac{3}{10}+4j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^3} - \frac{2r^{\frac{1}{2}+2j}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^3} \right)$$

$$K_{\bar{1}} = K_1$$

$$K_{11} = -\frac{2}{\pi r^{\frac{6}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{\frac{3}{5}+6j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^4} + \frac{6r^{\frac{1}{5}+2j}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^4} \right)$$

$$K_{\bar{1}\bar{1}} = K_{11}$$

$$K_{1\bar{1}} = -\frac{1}{\pi r^{\frac{6}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{\frac{3}{5}+6j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^4} + \frac{2r^{4j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^3} \right. \\ \left. + \frac{6r^{2j+\frac{1}{5}}}{\left(1 - r^{\frac{7}{5}+2j}\right)^4} - \frac{2r^{2j+\frac{1}{5}}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^3} \right)$$

$$K_{11\bar{1}} = \frac{2}{\pi r^{\frac{3}{2}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{24r^{\frac{9}{10}+8j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^5} + \frac{12r^{\frac{3}{10}+6j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^4} \right. \\ \left. - \frac{24r^{2j-\frac{1}{10}}}{\left(1 - r^{\frac{7}{5}+2j}\right)^5} + \frac{12r^{2j-\frac{1}{10}}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^4} \right)$$

$$K_{\bar{1}\bar{1}\bar{1}} = K_{11\bar{1}}$$

$$K_{11\bar{1}\bar{1}} = -\frac{4}{\pi r^{\frac{9}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{120r^{10j+\frac{6}{5}}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^6} + \frac{96r^{\frac{3}{5}+8j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^5} \right. \\ \left. + \frac{12r^{6j}}{\left(-r^{\frac{3}{5}+2j} + 1\right)^4} + \frac{120r^{2j-\frac{2}{5}}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^6} - \frac{96r^{2j-\frac{2}{5}}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^5} + \frac{12r^{2j-\frac{2}{5}}}{\left(1 - r^{2j+\frac{7}{5}}\right)^4} \right).$$

Analogicznie jak powyżej, każda suma szeregu jest postaci $G(r^{\frac{1}{10}})$ + część osobliwa, gdzie G jest funkcją \mathbb{R} -analityczną. Teraz

$$K = -\frac{1}{\pi r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1} (1 + 2r^{\frac{3}{5}} + r^{\frac{4}{5}} + 3r^{\frac{6}{5}} + O(r^{\frac{9}{5}}))$$

$$\begin{aligned}
K_1 = K_{\bar{1}} &= \frac{1}{\pi r^{\frac{9}{10}} \log(r^2)} + \pi^{-1}(2r^{\frac{3}{10}} - 2r^{\frac{1}{2}} + 6r^{\frac{9}{10}} + O(r^{\frac{3}{2}})) \\
K_{11} = K_{\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{2}{\pi r^{\frac{6}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1}(6r^{\frac{1}{5}} + O(r^{\frac{3}{5}})) \\
K_{1\bar{1}} &= -\frac{1}{\pi r^{\frac{6}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1}(2 + 4r^{\frac{1}{5}} + 12r^{\frac{3}{5}} + O(r^{\frac{6}{5}})) \\
K_{11\bar{1}} = K_{\bar{1}\bar{1}\bar{1}} &= \frac{2}{\pi r^{\frac{3}{2}} \log(r^2)} + \pi^{-1}\left(-\frac{12}{r^{\frac{1}{10}}} + O(r^{\frac{3}{10}})\right) \\
K_{11\bar{1}\bar{1}} &= -\frac{4}{\pi r^{\frac{9}{5}} \log(r^2)} + \pi^{-1}\left(\frac{36}{r^{\frac{2}{5}}} + O(C)\right).
\end{aligned}$$

Tym razem w powyższych rozwinięciach mamy

$$(\dagger\dagger) \quad \alpha + \beta \geq \frac{9}{5},$$

dla α i β będących potęgami r w $\frac{1}{\pi r^\alpha \log(r^2)}$ i stosownie w $O(r^\beta)$. Przejście z $A_j(r^{\frac{3}{10}})$ do $A_j^*(r^{\frac{3}{10}})$ jest prawie takie samo jak powyżej, musimy tylko poprawić wyrazy $(r \log(r^2))^{p_j}$ (w naszym przypadku zamieniamy je na $r^{p_j} \log(r^2)^{\frac{5}{3}p_j}$) oraz rozpatrzeć nowe liczby p_j , mianowicie $p_j = \frac{6}{5}$, dla $j = 6, 7, 8, 9, 12, 16, 17, 22, 24$ i $p_j = \frac{9}{5}$ w pozostałych przypadkach.

Rozwinięcia asymptotyczne wyrażeń $A_j^*(r^{\frac{3}{10}})$ to:

$$\begin{aligned}
A_{23}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{16}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
&\quad - \frac{24}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{376}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{32}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
&\quad - \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} + 16 \\
A_{21}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
&\quad + \frac{12}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{288}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{24}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
&\quad + \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} - 4 \\
A_{20}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
&\quad + \frac{12}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{296}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{28}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
&\quad + \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} - 4 \\
A_{19}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{8}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{12}{r (\log(r^2))^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{224}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{16}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad - \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} \\
A_{18}^*(r^{\frac{3}{10}}) & \approx \frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
& + \frac{12}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{296}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{28}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad + \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} - 4 \\
A_{15}^*(r^{\frac{3}{10}}) & \approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{8}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
& - \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{208}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{20}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad - \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} \\
A_{14}^*(r^{\frac{3}{10}}) & \approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{8}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
& - \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{216}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{24}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad - \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} \\
A_{13}^*(r^{\frac{3}{10}}) & \approx \frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& - \frac{12}{r (\log(r^2))^3} + \frac{144}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{12}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad + \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} \\
A_{11}^*(r^{\frac{3}{10}}) & \approx \frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
& + \frac{12}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{288}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{24}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad + \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} - 4 \\
A_{10}^*(r^{\frac{3}{10}}) & \approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{8}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} + \frac{12}{r (\log(r^2))^3} \\
& - \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{224}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{16}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} \\
& \quad - \frac{24}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3}
\end{aligned}$$

$$A_5^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{8}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{12}{r(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{4}{r^{\frac{3}{5}}\log(r^2)} - \frac{200}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^3} - \frac{16}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{24}{r^{\frac{1}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$A_4^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{8}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{12}{r(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{4}{r^{\frac{3}{5}}\log(r^2)} - \frac{208}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^3} - \frac{20}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{24}{r^{\frac{1}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$A_3^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx \frac{8}{r^{\frac{9}{5}}(\log(r^2))^3} - \frac{8}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{192}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{24}{r(\log(r^2))^3} + \frac{272}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{2424}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{16}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{768}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$+\frac{48}{r^{\frac{1}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$A_2^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx \frac{4}{r^{\frac{9}{5}}(\log(r^2))^3} - \frac{4}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{12}{r(\log(r^2))^3} + \frac{144}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{12}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{384}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$+\frac{24}{r^{\frac{1}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$A_1^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx -\frac{4}{r^{\frac{9}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{96}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$+\frac{12}{r(\log(r^2))^3} - \frac{72}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^2} - \frac{1212}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^3} - \frac{384}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$-\frac{24}{r^{\frac{1}{5}}(\log(r^2))^3}$$

Znów

$$A_j^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx \frac{a_j}{r^{\frac{9}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{b_j}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{c_j}{r^{\frac{6}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{d_j}{r(\log(r^2))^3}$$

$$+\frac{e_j}{r^{\frac{3}{5}}\log(r^2)} + \frac{f_j}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{g_j}{r^{\frac{3}{5}}(\log(r^2))^3} + \frac{h_j}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^2} + \frac{i_j}{r^{\frac{2}{5}}(\log(r^2))^3}$$

$$+\frac{k_j}{r^{\frac{1}{5}}(\log(r^2))^3} + l_j$$

oznacza, że

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A_j^*(r^{\frac{3}{10}}) r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3 = a_j, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(A_j^*(r^{\frac{3}{10}}) - \frac{a_j}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} \right) r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2 = b_j,$$

....

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(A_j^*(r^{\frac{3}{10}}) - \frac{a_j}{r^{\frac{9}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{b_j}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{c_j}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{d_j}{r (\log(r^2))^3} - \frac{e_j}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{f_j}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{g_j}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{h_j}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{i_j}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^3} - \frac{k_j}{r^{\frac{1}{5}} (\log(r^2))^3} \right) = l_j$$

(aby usprawnić rachunki możemy położyć $r = q^{10}$ i liczyć $\lim_{q \rightarrow 0} \dots$).

Rozwinięcia pozostałych wyrażeń to:

$$\begin{aligned} A_{24}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx -\frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{12}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{64}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{8}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} - 12 \\ A_{22}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{64}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + 4 \\ A_{17}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{64}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + 4 \\ A_{16}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx -\frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{64}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{8}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} \\ A_{12}^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{64}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{8}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + 4 \\ A_9^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{2}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} - \frac{32}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{4}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} + 2 \\ A_8^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx -\frac{8}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{8}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{128}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{16}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} \\ A_7^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx -\frac{4}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{4}{r^{\frac{3}{5}} \log(r^2)} + \frac{64}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} + \frac{8}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2} \\ A_6^*(r^{\frac{3}{10}}) &\approx \frac{6}{r^{\frac{6}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{96}{r^{\frac{3}{5}} (\log(r^2))^2} - \frac{12}{r^{\frac{2}{5}} (\log(r^2))^2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie, po zsumowaniu dostajemy

$$\sum_{j=1}^{24} A_j^*(r^{\frac{3}{10}}) \approx 2.$$

Czyli

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{P_r}(r^{\frac{3}{10}}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{24} A_j(r^{\frac{3}{10}}) = 2,$$

co kończy dowód Twierdzenia 0.5.

Obserwacja 35. Zachodzi równość

$$R_{P_r}(e^{i\theta}z) = R_{P_r}(z),$$

dla każdego $\theta \in (0, 2\pi]$ i

$$R_{P_r}(z) = R_{P_r}\left(\frac{r}{z}\right).$$

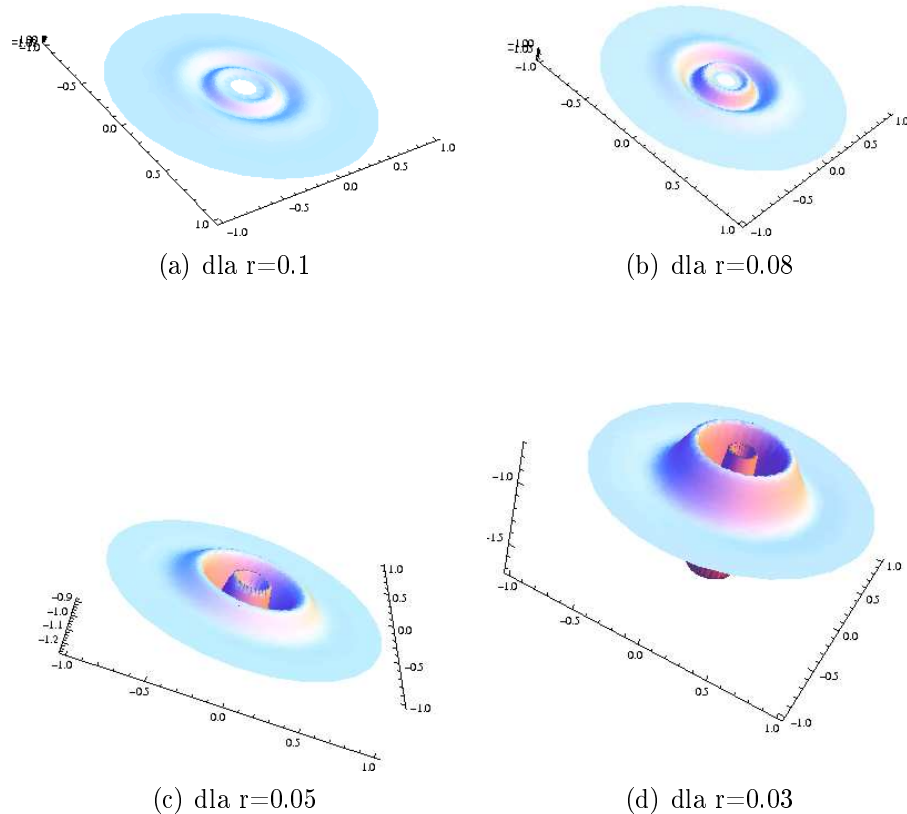
Dowód. Łatwo sprawdzić, że zarówno $z \rightarrow e^{i\theta}z$ jak i $z \rightarrow \frac{r}{z}$ są automorfizmami P_r . Teraz teza wynika z niezmienniczości krzywizny metryki Bergmana względem biholomorfizmów (zob. Twierdzenie 1.22). \square

Co więcej, łatwo zauważyć, że dla wyboru $z = r^{\frac{7}{10}} = \frac{r}{r^{\frac{3}{10}}}$ równość

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{P_r}(r^{\frac{7}{10}}) = 2$$

również zachodzi, co również sugerują zamieszczone wykresy.

Obserwacja 36. Dzięki powyższej obserwacji jesteśmy w stanie obliczyć krzywiznę metryki Bergmana w dowolnym punkcie pierścienia (nie tylko w punktach z dodatniej osi liczb rzeczywistych). Wykres tej krzywizny, jako funkcji na pierścieniu o wartościach rzeczywistych podany jest poniżej.



RYSUNEK 5. Wykres krzywizny Bergmana pierścienia P_r

Obserwacja 37. *Zachodzi równość*

$$R_{\{\zeta \in \mathbb{C} : \rho_1 < |\zeta - z_0| < \rho_2\}}(z) = R_{P_{\frac{\rho_1}{\rho_2}}} \left(\frac{z - z_0}{\rho_2} \right).$$

Jest to prostą konsekwencją faktu, że $z \rightarrow \frac{z - z_0}{\rho_2}$ jest odwzorowaniem biholomorficznym między obszarami $\{\zeta \in \mathbb{C} : \rho_1 < |\zeta - z_0| < \rho_2\}$ i $P_{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$.

Przystąpimy teraz do konstrukcji przykładu, dowodzącego Twierdzenie 0.6. Niech

$$\{R_j\}_{j=1}^{\infty}, \{r_j\}_{j=1}^{\infty}, \{s_j\}_{j=1}^{\infty}$$

będą trzema ciągami dodatnich liczb rzeczywistych, spełniającymi następujące warunki

$$(i) \quad \sum_{j=1}^{\infty} R_j < \infty,$$

$$(ii) \quad r_1 < \frac{R_1}{2}, \frac{r_j}{R_j} \text{ jest ciągiem malejącym i } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r_j}{R_j} = 0,$$

$$(iii) \quad s_j < \min \left\{ 2R_j \sin(0.07\pi), 2R_{j+1} \sin(0.07\pi), \right. \\ \left. R_j - \left(\frac{r_j}{R_j} \right)^{\frac{3}{10}}, R_{j+1} - \left(\frac{r_{j+1}}{R_{j+1}} \right)^{\frac{3}{10}} \right\}.$$

Rozpatrzmy następujący obszar:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j,$$

gdzie Ω_1 jest pierścieniem na płaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$, Ω_j jest także pierścieniem o wewnętrznym promieniu r_j i zewnętrznym promieniu R_j , którego środek leży na dodatniej osi liczb rzeczywistych, a jego współrzędna rzeczywista jest większa od współrzędnej środka Ω_{j-1} . Pierścień Ω_j zachodzi na Ω_{j-1} w taki sposób, że odcinek, łączący oba punkty przecięcia okręgów o promieniach R_j i R_{j-1} (czyli zewnętrznych brzegów pierścieni Ω_j i Ω_{j-1}) ma długość s_{j-1} . Przy powyższych ograniczeniach istnieją dokładnie dwa możliwe wybory pierścienia Ω_j : jeden dla którego większa część Ω_j leży wewnątrz Ω_{j-1} (czyli współrzędna środka Ω_j jest mniejsza od współrzędnej punktu przecięcia ww. odcinka o długości s_{j-1} z osią liczb rzeczywistych) i drugi, dla którego większa część Ω_j leży poza Ω_{j-1} (współrzędna środka Ω_j jest większa od współrzędnej ww. punktu). W naszej konstrukcji bierzemy pod uwagę tę drugą opcję. Wybór dostatecznie małych s_j zapewnia, że okręgi o promieniach r_j i r_{j-1} nie zachodzą na siebie. Konstrukcję kontynuujemy indukcyjnie.

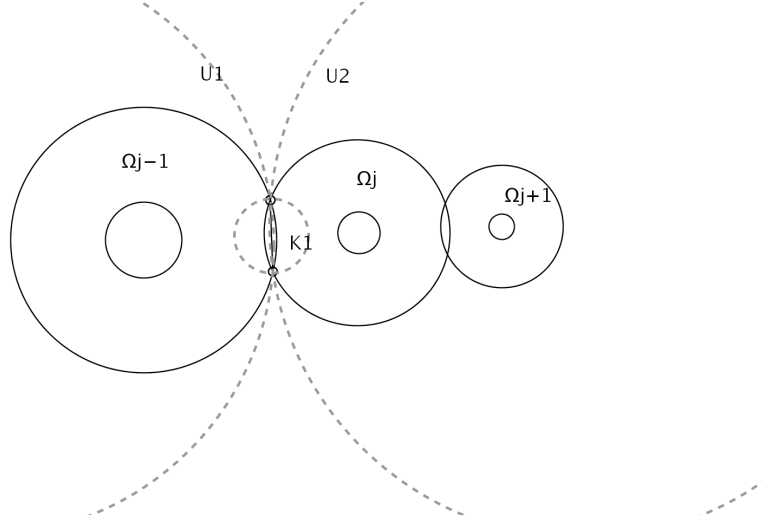
Dzięki warunkowi *i*), Ω jest obszarem ograniczonym.

Niech $\Omega'_j = \Omega_j \setminus (K_1 \cup K_2)$, gdzie K_1 jest kołem, o środku w punkcie środkowym odcinka, łączącego punkty przecięcia okręgów o promieniach R_j i R_{j-1} (zewnętrznych brzegów pierścieni Ω_j i Ω_{j-1}), a promień K_1 wynosi $\frac{s_{j-1}}{2}$. Koło K_2 ma promień wynoszący $\frac{s_j}{2}$, a jego środek jest punktem środkowym odcinka, łączącego punkty przecięcia okręgów o promieniach R_j i R_{j+1} .

Na początku udowodnimy następujący lemat

Lemat 4.4. *Niech $z_0 \in \Omega'_j$. Wtedy podpoziomica funkcji Greena $G_{\Omega}(z, z_0)$,*

$$\{z \in \Omega : G_{\Omega}(z, z_0) < -1\},$$



RYSUNEK 6. Część obszaru Ω

jest całkowicie zawarta w Ω_j .

Dowód. Funkcja Greena jest malejąca ze względu na inkluzje między obszarami. Wystarczy więc udowodnić, że $\{z \in U : G_U(z, z_0) < -1\} \subset \Omega_j$, dla pewnego $\Omega \subset U$.

Dla ułatwienia notacji dokonamy przesunięcia obszaru Ω tak, żeby "górnny" punkt przecięcia okręgów o promieniach R_{j-1} i R_j był tożsamy z punktem 0. Wybierzmy dwa okręgi U_1 i U_2 , o promieniach ρ_1 i ρ_2 , które przecinają się w punktach 0 i $-\sqrt{-1}s_{j-1}$ tak, że $\Omega \subset U_1 \cup U_2$. Oczywiście $\rho_1 \geq R_{j-1}$ i $\rho_2 > R_j$. Funkcja $G_{U_1 \cup U_2}(z, z_0)$ może być wyliczona explicite jako $h \circ f$, gdzie

$$h(w) := \log \left| \frac{w - f(z_0)}{1 - wf(z_0)} \right|$$

i

$$f(z) := \frac{\left(\left(\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{-1}}{s_{j-1}} \right) e^{-\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}} e^{\sqrt{-1}\frac{\beta-\alpha}{2}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha-\beta}} - 1}{\left(\left(\frac{1}{z} - \frac{\sqrt{-1}}{s_{j-1}} \right) e^{-\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}} e^{\sqrt{-1}\frac{\beta-\alpha}{2}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha-\beta}} + 1}$$

jest odwzorowaniem, które transformuje $U_1 \cup U_2$ biholomorficznie na koło jednostkowe. Powyżej $\alpha = \arcsin \frac{s_{j-1}}{2\rho_2}$, $\beta = \arcsin \frac{s_{j-1}}{2\rho_1}$. Przy potęgowaniu bierzemy wartość główną logarytmu.

Obrazem U_2 poprzez przekształcenie f jest przecięcie koła jednostkowego z kołem o środku położonym na ujemnej osi urojonej, przechodzącym przez $\{1\}$ i $\{-1\}$ oraz takim, że kąt pomiędzy prostą styczną do niego w punkcie $\{-1\}$, a osią liczb rzeczywistych wynosi dokładnie $\frac{\pi}{2\pi-\beta-\alpha} \frac{\beta+\alpha}{2}$ (obraz jest wypukły). Obraz U_1 to dokładnie sprzężenie powyższego zbioru. Teraz

$$f(\{z \in U_1 \cup U_2 : G_{U_1 \cup U_2}(z, z_0) < -1\}) = \left\{ w \in \mathbb{D} : \left| \frac{w - f(z_0)}{1 - wf(z_0)} \right| < e^{-1} \right\},$$

co jest kołem

$$\left| w - f(z_0) \frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-2}|f(z_0)|^2} \right| < \frac{e^{-1}(1 - |f(z_0)|^2)}{1 - e^{-2}|f(z_0)|^2}.$$

Oznaczmy to koło przez K_3 . Odnajdujemy, że ponieważ $z_0 \in \Omega'_j$, a $\Omega'_j \cap U_1 = \emptyset$, to $f(z_0) \in \mathbb{D} \setminus f(U_1)$, a więc $f(z_0)$ leży w dolnym półkolu.

Jeżeli więc zachodzi

$$(4.3) \quad z_0 \in U_2, \quad |Imf(z_0)| \frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-2}|f(z_0)|^2} \geq \frac{e^{-1}(1 - |f(z_0)|^2)}{1 - e^{-2}|f(z_0)|^2}$$

(tj. odległość środka koła K_3 od osi liczb rzeczywistych jest większa niż promień K_3), to K_3 będzie całkowicie zawarte w dolnym półkolu (a zatem w $f(U_2)$).

Nierówność (4.3) łatwo transformuje się do

$$(4.4) \quad \left| f(z_0) - \sqrt{-1} \frac{1 - e^{-2}}{2e^{-1}} \right| \geq \frac{1 + e^{-2}}{2e^{-1}}, \quad Imf(z_0) < 0.$$

Jest to więc zbiór ograniczony łukami dwóch okręgów - okręgu jednostkowego i okręgu, który przechodzi przez $\{-1\}$ i $\{1\}$ oraz kąt pomiędzy osią liczb rzeczywistych a prostą styczną do niego w punkcie $\{-1\}$ wynosi (jako wartość bezwzględna) $\arccos \frac{1 - e^{-2}}{1 + e^{-2}} \approx 0.22\pi$, $< 0.23\pi$. Podsumowując, jeżeli $f(z_0)$ należy do zbioru wyznaczonego tymi łukami, to

$$K_3 \subset \mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{C} : Imz < 0\} \subset f(U_2),$$

a zatem $\{z \in U_1 \cup U_2 : G_{U_1 \cup U_2}(z, z_0) < -1\} \subset U_2$.

Z drugiej strony obraz koła $|z + i \frac{s_{j-1}}{2}| < \frac{s_{j-1}}{2}$ (tzn. koła K_1) jest zbiorem ograniczonym przez dwa łuki, łączące $\{-1\}$ z $\{1\}$, wyznaczone przez kąty pomiędzy prostymi stycznymi do nich w punkcie $\{-1\}$ a osią liczb rzeczywistych ($\frac{\pi - \beta + \alpha}{2} \frac{\pi}{2\pi - \beta - \alpha}$ i stosownie $(-)\frac{\pi + \beta - \alpha}{2} \frac{\pi}{2\pi - \beta - \alpha}$). Widzimy, że jeżeli zarówno α jak i β są mniejsze niż 0.07π to nachylenie dolnego łuku jest większe niż 0.23π , a zatem zawiera się w zbiorze wyznaczonym przez warunek (4.4). Ponieważ $z_0 \notin K_1$ to $f(z_0)$ leży poniżej wspomnianego łuku, a zatem w żądanym zbiorze.

Wystarczy teraz zaobserwować, że

$$\alpha = \arcsin \frac{s_{j-1}}{2\rho_2} < \arcsin \frac{s_{j-1}}{2R_j} < 0.07\pi,$$

z warunku (iii). Podobnie $\beta < 0.07\pi$. Zatem

$$\{z \in \Omega : G_\Omega(z, z_0) < -1\} \subset \{z \in U_1 \cup U_2 : G_{U_1 \cup U_2}(z, z_0) < -1\} \cap \Omega \subset U_2 \cap \Omega.$$

Natomiast

$$U_2 \cap \Omega \cap \left(\bigcup_{l=1}^{j-1} \Omega_l \setminus \Omega_j \right) = \emptyset.$$

Zupełnie analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla koła K_2 , skąd dostaniemy

$$\{z \in \Omega : G_\Omega(z, z_0) < -1\} \cap \left(\bigcup_{l=j+1}^{\infty} \Omega_l \setminus \Omega_j \right) = \emptyset.$$

Ostatecznie

$$\{z \in \Omega : G_\Omega(z, z_0) < -1\} \subset \Omega_j. \quad \square$$

Lemat 4.5 (oszacowanie Donnelly'ego-Feffermana). *Niech $U \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem pseudowypukłym. Niech ψ i φ będą plurisubharmonicznymi funkcjami na obszarze U , przy czym ψ dodatkowo spełnia nierówność*

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \psi \geq \sqrt{-1} \partial \psi \wedge \bar{\partial} \psi,$$

w sensie dystrybucji (co jest równoważne plurisubharmoniczności funkcji $-e^{-\psi}$, a w przypadku gdy funkcja ψ jest klasy \mathcal{C}^2 oznacza, że macierz $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j} - \frac{\partial\psi}{\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_j}\right)_{i,j=1..n}$ jest nieujemnie określona). Niech v będzie $(0,1)$ -formą na U , która jest $\bar{\partial}$ -zamknięta (tj. przy zapisie $v = v_1d\bar{z}_1 + v_2d\bar{z}_2 + \dots + v_nd\bar{z}_n$, zachodzi $\bar{\partial}v = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_i = 0$, co jest równoważne z $\frac{\partial v_i}{\partial\bar{z}_j} - \frac{\partial v_j}{\partial\bar{z}_i} = 0$, dla wszystkich $i, j = 1, \dots, n$). Załóżmy ponadto, że forma v ma skończoną normę tj.

$$\int_U \psi^{i\bar{j}} v_i \bar{v}_j e^{-\varphi} < \infty,$$

gdzie $\psi^{i\bar{j}}$ jest i, j -tym elementem macierzy odwrotnej do $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\right)_{i,j=1..n}$. Wtedy istnieje funkcja u na zbiorze U , taka, że $\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_j} = v_j$, $j = 1, \dots, n$ i

$$\int_U |u|^2 e^{-\varphi} \leq C \int_U \psi^{i\bar{j}} v_i \bar{v}_j e^{-\varphi},$$

dla pewnej uniwersalnej stałej C .

Dowód tego ważnego oszacowania można znaleźć w [Ber96], bardziej szczegółowo w [Ber95] oraz zwłaszcza w [Bł05], gdzie przejście z gładkich do ogólnych funkcji ψ jest bardzo klarownie zaprezentowane.

Niech ζ będzie najdalej w prawo wysuniętym punktem brzegowym obszaru Ω (jest to punkt skupienia pierścieni). Możemy przystąpić do dowodu Twierdzenia 0.6

Dowód. Jest oczywiste, że $J_{i,\Omega}(z) \leq J_{i,\Omega_j}(z)$, dla wszystkich $z \in \Omega_j$, $i = 0, 1, 2$ i wszystkich j (zob. (1.1), (1.2), (1.3) i Obserwację 2).

Niech $z_0 \in \Omega'_j$ i niech $f_i(z)$ będą funkcjami realizującymi supremum w definicjach J_{i,Ω_j} , $i = 0, 1, 2$. Dostajemy

$$f_i(z) \in \mathcal{O}(\Omega_j) \cap L^2(\Omega_j), \int_{\Omega_j} |f_i|^2 \leq 1, f_i^{(k)}(z_0) = 0, k = 0, \dots, i-1.$$

Niech χ będzie gładką rzeczywistą funkcją zmiennej rzeczywistej taką, że $\chi(x) = 0$, dla $x > -1$, $\chi(x) = 1$, dla $x < -2$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, dla $-2 \leq x \leq -1$ i $|\chi'(x)| < C$, globalnie dla pewnej uniwersalnej stałej C .

Z Lematu 4.4 wynika, że $(0,1)$ -forma $\bar{\partial}(\chi \circ G_\Omega(z, z_0)) \cdot f_i(z)$ może zostać rozszerzona (trywialnie, jako forma zerowa) do gładkiej formy ($\bar{\partial}$ -zamkniętej) na całym Ω .

Zauważmy, że $e^{G_\Omega(z, z_0)}$ jest subharmoniczna funkcją spełniającą

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} e^{G_\Omega(z, z_0)} \geq \left| \frac{\partial}{\partial z} e^{G_\Omega(z, z_0)} \right|^2,$$

w słabym sensie. Z oszacowania Donnelly'ego-Feffermana wynika, że możemy znaleźć gładkie rozwiązanie v problemu $\bar{\partial}$,

$$\bar{\partial}v_i = \bar{\partial}(\chi \circ G_\Omega(z, z_0)) \cdot f_i(z)$$

w Ω , z

$$\int_\Omega |v_i|^2 e^{-2(i+1)G_\Omega(z, z_0)} \leq C' \int_\Omega \frac{|\bar{\partial}(\chi \circ G_\Omega(z, z_0)) \cdot f_i(z)|^2}{\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} e^{G_\Omega(z, z_0)}} e^{-2(i+1)G_\Omega(z, z_0)} \leq$$

$$C' \int_{\{z \in \Omega: -2 < G_\Omega(z, z_0) < -1\}} \frac{C^2 |f_i|^2}{e^{(2i+3)G_\Omega(z, z_0)}} \leq C' C^2 e^{2(2i+3)},$$

gdzie C' jest stałą uniwersalną.

Co więcej v_i jest funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu z_0 i powyższa nierówność zapewnia, że $v_i^{(k)}(z_0) = 0, k = 0, \dots, i$.

Funkcja $g_i = (\chi \circ G_\Omega(z, z_0)) \cdot f_i(z) - v_i$ jest holomorficzną w Ω , zgadza się do i -tego rzędu z f_i w punkcie z_0 i

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |g_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_\Omega |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |(\chi \circ G_\Omega(z, z_0)) \cdot f_i(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |v_i|^2 e^{-2(i+1)G_\Omega(z, z_0)} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \leq 1 + \sqrt{C' C^2 e^{2(2i+3)}}. \end{aligned}$$

Wybór funkcji $\frac{g_i(z)}{1 + \sqrt{C' C^2 e^{2(2i+3)}}}$ wskazuje, że

$$J_{i, \Omega}(z) \geq \frac{J_{i, \Omega_j}(z)}{1 + \sqrt{C' C^2 e^{2(2i+3)}}},$$

dla wszystkich $z \in \Omega'_j$, co nie zależy od j .

Dlatego dla dowolnego $z \in \Omega$, leżącego w Ω'_j dla pewnego j ,

$$\begin{aligned} 2 - R_\Omega(z) &= \frac{J_{0, \Omega}(z) J_{2, \Omega}(z)}{J_{1, \Omega}(z)^2} \leq \frac{(1 + \sqrt{C' C^2 e^{10}})^2 J_{0, \Omega_j}(z) J_{2, \Omega_j}(z)}{J_{1, \Omega_j}(z)^2} \\ &= C''(2 - R_{\Omega_j}(z)) \end{aligned}$$

i

$$2 - R_\Omega(z) \geq \frac{J_{0, \Omega_j}(z) J_{2, \Omega_j}(z)}{J_{1, \Omega_j}(z)^2 (1 + \sqrt{C' C^2 e^{14}}) (1 + \sqrt{C' C^2 e^6})} = C'''(2 - R_{\Omega_j}(z)).$$

Niech z'_j będzie punktem w Ω_j (oraz w Ω'_j , dzięki warunkowi (iii)) który odpowiada punktowi $R_j \sqrt{\frac{r_j}{R_j}} + 0\sqrt{-1}$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : r_j < |z| < R_j\}$ przy odwzorowaniu biholomorficznym (przesunięciu) między tymi pierścieniami. Analogicznie definiujemy z''_j jako punkt odpowiadający punktowi $R_j \left(\frac{r_j}{R_j}\right)^{\frac{3}{10}}$.

Wtedy

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} R_\Omega(z) = \limsup_{j \rightarrow \infty} R_\Omega(z''_j) = 2$$

i

$$\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} R_\Omega(z) = \liminf_{j \rightarrow \infty} R_\Omega(z'_j) = -\infty,$$

z Twierdzenia 0.5, Obserwacji 37 i warunku (ii). □

Obserwacja 38. *Obszar Ω zdefiniowany jak powyżej jest obszarem hiperwypukłym.*

Hiperwypukłość jest równoważna regularności obszaru (ze względu na problem Dirichleta) w wymiarze 1 (zob. np. [Bł0]). Łatwo skonstruować funkcje barierowe w dowolnym punkcie brzegowym Ω i z metody Perrona (zob. np. [Bł0]) Ω jest obszarem regularnym.

Jest to trochę niespodziewane, gdyż wiadomo, że zarówno jądro Bergmana w dowolnym wymiarze skończonym (zob. [Ohs93]) jak i metryka Bergmana w wymiarze 1 (zob. [PZ03]), zachowują się w dość przewidywalny sposób w obszarach hiperwypukłych. (Co do metryki

Bergmana w wyższym wymiarze, pomimo licznych ważnych wyników zob. [BP98], [Her99], w kontekście naszego zagadnienia problemy nie są do końca rozwiązane, należy raczej brać pod uwagę węższą klasę obszarów, tzw. obszary B-regularne (zob. [Sib87]), niż hiperwypukłe, zob. [DH00]).

4.2. Przykład drugi. Skwarczyński (zob. [Skw69], [Skw80]) podał pierwszy przykład obszaru, dla którego $K(z, \zeta)$ zeruje się dla pewnych z i ζ z tego obszaru, konkretnie udowodnił on, że taką własność posiada pierścień na płaszczyźnie

$$P_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}, \text{ dla } 0 < r < e^{-2}.$$

Później Rosenthal (zob. [Ros69]) rozszerzył powyższy wynik, dowodząc, że własność ta zachodzi dla dowolnego niezdegenerowanego (czyli $1 > r > 0$) pierścienia na płaszczyźnie, korzystając z innych metod. Pomimo że rachunkowo skomplikowany, przypadek pierścienia na płaszczyźnie pozostaje najłatwiejszym (z grona obszarów posiadających ww. własność) obszarem do badania. Przedstawiony poniżej dowód Twierdzenia 0.7 jest w istocie bardziej szczegółową analizą rachunków przeprowadzonych w [Skw69].

Dowód. Ustalmy dodatnią liczbę $\varepsilon \ll 1$. Od tego momentu ograniczymy się do rozpatrywania wyłącznie tych wartości r , dla których następujące trzy nierówności zachodzą jednocześnie

$$(4.5) \quad \left| \frac{1}{\log(r^2)} \right| < \varepsilon^2,$$

$$(4.6) \quad |r \log(r^2)| < \varepsilon,$$

$$(4.7) \quad \frac{r^2}{1-r^2} < \varepsilon^2.$$

Łatwo zauważyć, że powyższy warunek spełniony jest dla dowolnych wystarczająco małych dodatnich wartości r .

Przy specjalnym wyborze

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}, z = \frac{-1}{(1+\varepsilon)\sqrt{|\log(r^2)|}},$$

wyrażenie (4.1) wynosi

$$-\frac{1+\varepsilon}{\pi \frac{1}{\log(r^2)} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2+2j}}{\left(-r^{2+2j} + \frac{1}{(1+\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} + \frac{r^{2j}}{\left(1 - r^{2j} \frac{1}{(1+\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} \right).$$

Oczywiście należy sprawdzić, że $r < |z|, |\zeta| < 1$, dla dostatecznie małych r , aby wybrana para punktów należała do wnętrza pierścienia. Jest to oczywiste. Teraz korzystając kolejno z ujemności $\log(r)$, (4.6) i (4.7) dostajemy

$$(4.8) \quad -\frac{1+\varepsilon}{\pi} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2+2j}(1+\varepsilon)^2(\log(r^2))^2}{\left(1 - r^{2+2j}(1+\varepsilon)\log(r^2)\right)^2} + \frac{r^{2j}}{\left(1 - r^{2j} \frac{1}{(1+\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} \right) \leq \\ -\frac{1+\varepsilon}{\pi} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (r^{2j}(1+\varepsilon)^2\varepsilon^2 + r^{2j}) =$$

$$-\frac{1+\varepsilon}{\pi} + \frac{1}{\pi}((1+\varepsilon)^2\varepsilon^2 + 1) + \frac{1}{\pi} \frac{r^2}{1-r^2}((1+\varepsilon)^2\varepsilon^2 + 1) \leq \frac{-\varepsilon + ((1+\varepsilon)^2(\varepsilon^2 + 1) + 1)\varepsilon^2}{\pi}.$$

Jest to wartość ujemna dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$.

Podobnie przy specjalnym wyborze

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}, z = \frac{-1}{(1-\varepsilon)\sqrt{|\log(r^2)|}},$$

przy którym z, ζ również należą do P_r dla małych r , (4.1) staje się

$$(4.9) \quad -\frac{1-\varepsilon}{\pi \frac{1}{\log(r^2)} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2+2j}}{\left(-r^{2+2j} + \frac{1}{(1-\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} + \frac{r^{2j}}{\left(1 - r^{2j} \frac{1}{(1-\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} \right) =$$

$$-\frac{1-\varepsilon}{\pi} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2+2j}(1-\varepsilon)^2(\log(r^2))^2}{\left(1 - r^{2+2j}(1-\varepsilon)\log(r^2)\right)^2} + \frac{r^{2j}}{\left(1 - r^{2j} \frac{1}{(1-\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} \right) \geq$$

$$-\frac{1-\varepsilon}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{r^0}{\left(1 - r^0 \frac{1}{(1-\varepsilon)\log(r^2)}\right)^2} \geq$$

$$(4.10) \quad -\frac{1-\varepsilon}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon + \varepsilon^2)^2},$$

dzięki (4.5). Rozwijając w szereg Taylora, dostajemy $\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)^2 = 1 - 2x^2 + o(x^2)$, tak więc wyrażenie (4.10) wynosi w przybliżeniu

$$\frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{\pi} > 0,$$

dla dostatecznie małych ε .

Podsumowując, $K(z, \zeta)$ ma wartości rzeczywiste dla $\zeta = \frac{1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}$ i z należącego do odcinka

$$I := \left[\frac{-1}{(1-\varepsilon)\sqrt{|\log(r^2)|}}, \frac{-1}{(1+\varepsilon)\sqrt{|\log(r^2)|}} \right]$$

oraz posiada różne znaki na obu końcach tego przedziału. Musi więc zerować się w pewnym punkcie z tego przedziału. W ten sposób dokonaliśmy lokalizacji zera jądra Bergmana.

Uwaga. Zero jądra Bergmana dla pierścienia można wyznaczyć dokładnie (bez przybliżeń), jednakże przy pomocy nieelementarnych funkcji, zob. [SF07].

Aby obliczyć odległość Bergmana między z i ζ , należy najpierw znaleźć postać metryki Bergmana. W sytuacji jednowymiarowej kwadrat długości wektora względem metryki Bergmana w punkcie z to kwadrat jego normy euklidesowej pomnożony przez wielkość

$$(4.11) \quad \beta^2(z) = \frac{\partial^2 \log K(z, z)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{K(z, z)_{1\bar{1}}K(z, z) - K(z, z)_1K(z, z)_{\bar{1}}}{K(z, z)^2}.$$

Ponieważ z Obserwacji 8 wiadomo, że wyrażenie to jest niezmiennicze ze względu na obroty względem punktu $\{0\}$, wystarczy znaleźć $\beta(z)$, dla $z = \frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}} \in \mathbb{R}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, niezależną od r , bliską do -1 . Oczywiście taką samą wartość wyrażenia (4.11) dostaniemy zastępując c przez $-c$. Wyrażenia występujące we wzorze (4.11) to

$$\begin{aligned}
K(z, z) &= -\frac{1}{\pi z \bar{z} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r^{2+2j}}{(-r^{2+2j} + z \bar{z})^2} + \frac{r^{2j}}{(1 - r^{2j} z \bar{z})^2} \right) \\
K(z, z)_1 &= \frac{1}{\pi z^2 \bar{z} \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{2r^{2+2j} \bar{z}}{(-r^{2+2j} + z \bar{z})^3} + \frac{2r^{4j} \bar{z}}{(1 - r^{2j} z \bar{z})^3} \right) \\
K(z, z)_{\bar{1}} &= \frac{1}{\pi z \bar{z}^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{2r^{2+2j} \bar{z}}{(-r^{2+2j} + z \bar{z})^3} + \frac{2r^{4j} \bar{z}}{(1 - r^{2j} z \bar{z})^3} \right) \\
K(z, z)_{1\bar{1}} &= -\frac{1}{\pi (z \bar{z})^2 \log(r^2)} + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{6r^{2+2j} z \bar{z}}{(-r^{2+2j} + z \bar{z})^4} - \frac{2r^{2+2j}}{(-r^{2+2j} + z \bar{z})^3} + \right. \\
&\quad \left. \frac{6r^{6j} z \bar{z}}{(1 - r^{2j} z \bar{z})^4} + \frac{2r^{4j}}{(1 - r^{2j} z \bar{z})^3} \right).
\end{aligned}$$

Wyrażenia wyglądają skomplikowanie, jednakże niemal wszystkie wyrazy występujące w szeregach są zaniedbywalne. Aby to udowodnić postąpimy podobnie jak przy szacowaniu wyrazów (4.8) i (4.9).

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{Ar^B \left(\frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}} \right)^D}{\left(-r^B - \frac{1}{c^2 \log(r^2)} \right)^F} \right| = \left| \frac{Ar^B}{(c\sqrt{|\log(r^2)|})^{D-2F} (1 + c^2 \log(r^2) r^B)^F} \right| \leq \\
(4.12) \quad &\leq \left| \frac{Ar^B}{(c\sqrt{|\log(r^2)|})^{D-2F} (1 - c^2 \varepsilon)^F} \right|,
\end{aligned}$$

gdy $B > 0$ (korzystamy z nierówności $r < 1$ i (4.6)). Pozostałe wyrazy są oszacowane przez

$$(4.13) \quad \left| \frac{A'r^{B'} \left(\frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}} \right)^{D'}}{\left(1 + r^{E'} \frac{1}{c^2 \log(r^2)} \right)^{F'}} \right| \leq \left| \frac{A'r^{B'}}{(c\sqrt{|\log(r^2)|})^{D'} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} \right)^{F'}} \right|,$$

dzięki nierówności $r < 1$ i warunkowi (4.5).

Teraz ponieważ $r^B \log(r)^E$ dąży do zera, dla dodatnich B i dowolnych całkowitych E , możemy wykorzystać jedno z oszacowań (4.5), (4.6) i ostatecznie uzyskać oszacowanie typu $H|r|^G$. Jedynym wyjątkiem jest oczywiście sytuacja, gdy B lub $B' = 0$ tzn. $j = 0$, więc sumując wyrazy w szeregach dostajemy oszacowanie przez szereg geometryczny. Oznacza to, że wyrażenia we wzorze (4.11) da się przedstawić jako

$$K\left(\frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}}, \frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}}\right) = \frac{c^2}{\pi} + \frac{1}{\pi\left(1 + \frac{1}{c^2 \log(r^2)}\right)^2} + o(C) = \frac{c^2 + 1}{\pi} + o(C),$$

$$K_1 = K\left(\frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}}, \frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}}\right)_{\bar{1}} = -\frac{c^3 \sqrt{|\log(r^2)|}}{\pi} + o(C),$$

$$K\left(\frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}}, \frac{1}{c\sqrt{|\log(r^2)|}}\right)_{1\bar{1}} = \frac{2}{\pi\left(1 + \frac{1}{c^2 \log(r^2)}\right)^3} - \frac{c^4 \log(r^2)}{\pi} + o(C) =$$

$$= \frac{2 - c^4 \log(r^2)}{\pi} + o(C),$$

gdzie konwencją jest $o(C) \equiv o(const)$.

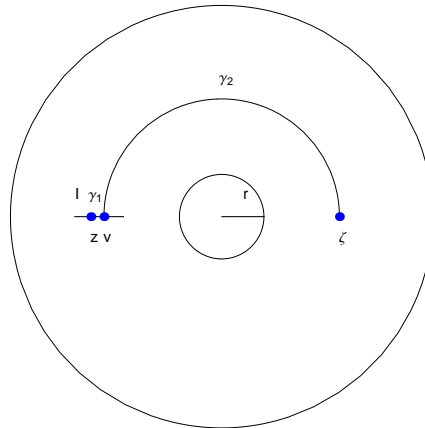
Ostatecznie wyrażenie (4.11) przekształca się do

$$(4.14) \quad \beta = \sqrt{\frac{(c^2 + 1 + o(C))(2 - c^4 \log(r^2) + o(C)) - (c^3 \sqrt{|\log(r^2)|} + o(C))^2}{(c^2 + 1 + o(C))^2}}.$$

Droga całkowania, która przybliża odległość wygląda następująco. Najpierw łączymy z z punktem $v := \frac{-1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}$ poprzez odcinek. Następnie ten punkt łączymy z $\zeta = \frac{1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}$ poprzez półokrąg

$$[0, 1] \ni t \rightarrow e^{(\pi - \pi t)\sqrt{-1}} \frac{1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}.$$

Odcinek będziemy oznaczać przez γ_1 , a półokrąg przez γ_2 .



RYSUNEK 7. droga $\gamma_1 \cup \gamma_2$

Geodezyjne metryki Bergmana w pierścieniu zostały sklasyfikowane w [Her83], skąd wiadomo, że wybrana przez nas droga całkowania nie jest geodezyjną, jednakże odległość całkowita obliczona po tej drodze stanowi dostatecznie dobre przybliżenie odległości Bergmana.

Całki które musimy oszacować to

$$I_1 := \int_0^1 \beta(\gamma_1(t)) \left| \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t) \right| dt$$

$$I_2 := \int_0^1 \beta(\gamma_2(t)) \left| \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) \right| dt.$$

Niech $z = \frac{-1}{s\sqrt{|\log(r^2)|}}$, $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Parametryzacja γ_1 to

$$[0, 1] \ni t \rightarrow \frac{-1}{(s + t(1 - s))\sqrt{|\log(r^2)|}}.$$

Po przeprowadzeniu natychmiastowych obliczeń, wykorzystując wzór (4.14) dostajemy

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^1 \beta(\gamma_2(t)) \left| \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) \right| dt &= \int_0^1 \lim_{r \rightarrow 0^+} \beta(\gamma_2(t)) \left| \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) \right| dt = \\ &= \int_0^1 |s - 1| \sqrt{\frac{c^4}{(c^2 + 1)^2 c^4}} dt, \end{aligned}$$

gdzie $c = s + t(1 - s)$. Teraz ponieważ $|s - 1| < \varepsilon$ i ponieważ całka jest ewidentnie skończona, dostajemy, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow 0^+} I_1 = 0.$$

Oszacujmy całkę I_2

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} I_2 = \int_0^1 \lim_{r \rightarrow 0^+} \beta(\gamma_2(t)) \left| \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) \right| dt.$$

W tym przypadku $c = 1$, funkcja β zawężona do γ_2 jest stała (względem położenia punktu na drodze γ_2) i wynosi

$$\sqrt{\frac{(2 + o(C))(2 - \log(r^2) + o(C)) - (\sqrt{|\log(r^2)|} + o(C))^2}{(2 + o(C))^2}}.$$

Dalej $\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = -\pi \sqrt{-1} e^{(\pi - \pi t)\sqrt{-1}} \frac{1}{\sqrt{|\log(r^2)|}}$, skąd wynika, że

$$\beta(\gamma_2(t)) \left| \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) \right| \approx \pi \sqrt{\frac{2(2 - \log(r^2)) + \log(r^2)}{4} \frac{1}{|\log(r^2)|}} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

gdy $r \rightarrow 0^+$ (łatwo zauważyć że istnienie i wartość tej granicy jest niezależne od ε).

Odległość Bergmana pomiędzy z i ζ jest ograniczona pomiędzy $\frac{\pi}{2}$ dzięki Twierdzeniu 0.1 i $I_1 + I_2$ skąd wynika, że dąży ona do $\frac{\pi}{2}$, gdy $r \rightarrow 0^+$, ponieważ możemy wybrać dowolnie małe dodatnie ε . \square

Obserwacja 39. Teza Twierdzenia 0.7 zachodzi w dowolnym wymiarze.

Przykład dowodzący Twierdzenie 0.7 w dowolnym wymiarze skończonym możemy skonstruować w następujący sposób: Niech $\mathbb{C}^n \supset \Omega_r = P_r \times \Omega$, gdzie $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^{n-1}$ jest dowolnym obszarem ograniczonym. Z Obserwacji 7 wynika, że jeżeli z, ζ są punktami dla których $K_{P_r}(z, \zeta) = 0$ (w szczególności dla z, ζ będących zlokalizowanymi powyżej zerami jądra Bergmana), to (z, z') i (ζ, ζ') dla dowolnych $z', \zeta' \in \Omega$ są punktami takimi, że

$$K_{\Omega_r}((z, z'), (\zeta, \zeta')) = K_{P_r}(z, \zeta) K_{\Omega}(z', \zeta') = 0.$$

Odległość Bergmana między punktami (z, z') i (ζ, ζ') szacuje się przez

$$\begin{aligned} dist_{\Omega_r}((z, z'), (\zeta, \zeta')) &= \\ \inf_{\eta} \int_0^1 \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \log K_{P_r}(z_1, z_1)|_{z_1=\eta_1(t)} \overline{\eta'_1(t)} + \beta_{\Omega}^2((\eta_2(t), \dots, \eta_n(t)), (\eta'_2(t), \dots, \eta'_n(t))^t) dt} & \\ \geq \inf_{\eta_1} \int_0^1 \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \log K_{P_r}(z_1, z_1)|_{z_1=\eta_1(t)} \overline{\eta'_1(t)} dt} &= dist_{P_r}(z, \zeta). \end{aligned}$$

Powyżej η jest krzywą łączącą z i ζ . Jednocześnie w sytuacji gdy $z' = \zeta'$ i dla krzywej η takiej, że $(\eta_2(t), \dots, \eta_n(t)) = z'$ dla każdego $t \in [0, 1]$, zachodzi równość. Tak więc dla Ω_r punkty (z, z') i (ζ, z') zerują $K_{\Omega_r}(\cdot, \circ)$ i jednocześnie odległość Bergmana między nimi

$$dist_{\Omega_r}((z, z'), (\zeta, z')) = dist_{P_r}(z, \zeta) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

4.3. Przykład trzeci. W tej części skonstruujemy przykład, dowodzący Twierdzenie 0.8.

Dowód. Tak jak w przypadku Twierdzenia 0.7, będziemy badać pierścień P_r . Aby udowodnić brak immersywności w danym podzbiore P_r , zgodnie ze wzorami (2.10) i (2.11), musimy zlokalizować zera wyrażenia

$$\det \left(K^2(z, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} \log K(z, \zeta) \right)$$

lub inaczej, wyrażenia

$$(4.15) \quad K(z, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial z} K(z, \zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta).$$

Ustalmy $0 < \varepsilon \ll 1$. W naszym przypadku ustalimy ζ jako punkt $\frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \in \mathbb{R}$, natomiast z będzie punktem postaci $\frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}$, gdzie ξ jest niezależną od r zmienną zespoloną, której wartości domyślnie będą bardzo bliskie 1.

Na początku potrzebujemy oszacowań typu (4.12) i (4.13) w nowej sytuacji

$$\begin{aligned} (4.16) \quad \left| \frac{Ar^B \left(\frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \right)^D \left(\frac{\sqrt{-1}}{\xi} \right)^H}{\left(-r^B + \frac{\sqrt{-1}}{\xi} \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \right)^F} \right| &= \left| \frac{Ar^B \left(\frac{\sqrt{-1}}{\xi} \right)^{H-F}}{(\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|})^{D-2F} \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{-1}} \sqrt{|2 \log(r^2)|} r^B \right)^F} \right| \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon) \left| \frac{Ar^B}{(\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|})^{D-2F}} \right|, \end{aligned}$$

gdy $B > 0$, jednostajnie względem ξ bliskich 1 dla dostatecznie małych r , ponieważ wartości H i F są skończone. Pozostałe wyrazy są oszacowane przez

$$(4.17) \quad \left| \frac{A'r^{B'} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \right)^{D'} \left(\frac{\sqrt{-1}}{\xi} \right)^{H'}}{\left(1 - r^{E'} \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \frac{\sqrt{-1}}{\xi} \right)^{F'}} \right| \leq (1 + \varepsilon) \left| \frac{A'r^{B'}}{(\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|})^{D'}} \right|,$$

również jednostajnie względem ξ bliskich 1, dla dostatecznie małych r dzięki skończoności H' i F' . Tak więc sumy wyrazów w rozwinięciach $K, K_1, K_{\bar{1}}$ i $K_{1\bar{1}}$, zawierające r w dodatniej potędze dadzą się oszacować przez szereg geometryczny, w związku z czym wyrażenie (4.15) będzie funkcją holomorficzną zmiennej ξ , dla ξ z pewnego (małego) otoczenia punktu 1 i ponadto

$$(4.18) \quad K(z, \zeta) \approx -\frac{1}{\pi} \frac{1}{z\bar{\zeta} \log(r^2)} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2}$$

$$(4.19) \quad \frac{\partial}{\partial z} K(z, \zeta) \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2 \bar{\zeta} \log(r^2)} + \frac{1}{\pi} \frac{2\bar{\zeta}}{(1-z\bar{\zeta})^3}$$

$$(4.20) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{z\bar{\zeta}^2 \log(r^2)} + \frac{1}{\pi} \frac{2z}{(1-z\bar{\zeta})^3}$$

$$(4.21) \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) \approx -\frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2 \bar{\zeta}^2 \log(r^2)} + \frac{1}{\pi} \frac{6z\bar{\zeta}}{(1-z\bar{\zeta})^4} + \frac{1}{\pi} \frac{2}{(1-z\bar{\zeta})^3},$$

przy powyższym wyborze z i ζ . Kładąc te wartości w wyrażeniach (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), zauważmy, że wiodącym wyrazem w (4.18) będzie $\frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2}$, tzn. $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt{|2 \log(r^2)|}}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{\pi}$, gdy

$r \rightarrow 0^+$. Oba składniki w obu wyrażeniach (4.19) i (4.20) mają takie samo asymptotyczne zachowanie $\sim \frac{const}{\sqrt[4]{|\log(r^2)|}} \rightarrow 0$. Wreszcie w (4.21) pierwszy i ostatni składnik są wiodące i sumują się do

$$(4.22) \quad -\frac{2\xi^2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{2}{\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt{|2 \log(r^2)|}}\right)^3} \rightarrow \frac{2 - 2\xi^2}{\pi}.$$

Środkowy składnik dąży do 0.

Wracając do wyrażenia (4.15), zauważmy że można je zapisać jako $P(z, \zeta) + Q(z, \zeta)$, gdzie

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2} \left[-\frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2 \bar{\zeta}^2 \log(r^2)} + \frac{1}{\pi} \frac{2}{(1-z\bar{\zeta})^3} \right],$$

tzn. jest to wiodący składnik wyrażenia (4.15), natomiast $Q(z, \zeta)$ jest sumą wszystkich pozostałych wyrazów, tzn.

$$Q(z, \zeta) := K(z, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial z} K(z, \zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) - P(z, \zeta).$$

Wybierając ξ na okręgu o promieniu ε i środku w 1 zauważmy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left| P \left(\frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}, \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \right) \right| = \left| \frac{2 - 2\xi^2}{\pi^2} \right| > 0,$$

jednostajnie względem ξ , podczas gdy

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left| Q \left(\frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}, \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \right) \right| = 0.$$

Z Twierdzenia Rouché

$$K(z, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial z} K(z, \zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K(z, \zeta) \Big|_{z = \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}, \zeta = \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}} = P(z, \zeta) + Q(z, \zeta),$$

jako funkcja holomorphyzna zmiennej ξ , ma tyle samo zer w zbiorze $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - 1| < \varepsilon\}$ co

$$P(z, \zeta) \Big|_{z = \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}, \zeta = \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}},$$

gdy r jest dostatecznie małe. Rozwiązując

$$P(z, \zeta) \Big|_{z = \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}, \zeta = \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}} = 0,$$

co sprowadza się do

$$\frac{2}{\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}\right)^3} = 2\xi^2$$

można sprawdzić, że

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{-1}}{c} + \frac{(1 + \sqrt{-1}\sqrt{3})c^3}{\sqrt[3]{12(-9\sqrt{-1}c^8 + \sqrt{3}\sqrt{-27}c^{16} - 4c^{18})}} \\ & + \frac{(1 - \sqrt{-1}\sqrt{3})\sqrt[3]{-9\sqrt{-1}c^8 + \sqrt{3}\sqrt{-27}c^{16} - 4c^{18}}}{c^3 2\sqrt[3]{18}}, \end{aligned}$$

gdzie $c = \sqrt{|2 \log(r^2)|}$, jest rozwiązaniem tego równania, leżącym w $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - 1| < \varepsilon\}$ dla dostatecznie małych r . Oznacza to, że wyrażenie (4.15) zeruje się dla $\zeta = \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}$ i pewnego z z obrazu koła $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - 1| < \varepsilon\}$ poprzez odwzorowanie

$$\xi \rightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\xi \sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}.$$

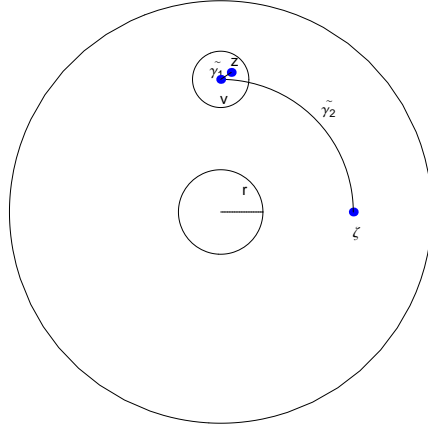
Obraz ten zawiera się w kole o środku $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}$ i promieniu

$$\frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \max_{|\xi - 1| < \varepsilon} \left| \frac{1}{\xi} - 1 \right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} < \frac{2}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}},$$

dla dostatecznie małych r .

Teraz naszkicujemy resztę dowodu, bez wchodzenia w (bardzo techniczne) szczegóły rachunkowe. Zlokalizowane zero wyrażenia $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}} \log K(z, \zeta)$ łączymy drogą $\tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ z ζ , gdzie $\tilde{\gamma}_1$ jest odcinkiem łączącym z z punktem $v := \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}}$. Jak w dowodzie Twierdzenia 0.7 odległość całkowita po drodze $\tilde{\gamma}_1$ względem metryki $\tilde{\beta}(\cdot, \cdot)$ dąży do 0 gdy $r \rightarrow 0^+$ i $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Teraz $\tilde{\gamma}_2$ będzie łukiem

$$[0, 1] \ni t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{|2 \log(r^2)|}} e^{\frac{1-t}{2} \pi \sqrt{-1}}.$$



RYSUNEK 8. droga $\tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$

Z Obserwacji 12 wiemy, że zawężenie $\tilde{\beta}$ do $\tilde{\gamma}_2$ jest stałe względem położenia punktu na tym łuku, ze względu na biholomorficzną niezmienniczość. Dlatego wystarczy obliczyć tensor metryczny $\tilde{\beta}$ tylko w punkcie $\frac{1}{\sqrt[4]{|2\log(r^2)|}} = \tilde{\gamma}_2(1)$. Skorzystamy ze wzoru

$$\tilde{\beta}(\zeta, X) = \left[2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \log K(\zeta, \zeta) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \log \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} K(\zeta, \zeta) \right] |X|^2,$$

a więc należy obliczyć

$$(4.23) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \log \left[K(\zeta, \zeta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} K(\zeta, \zeta) \right] = \\ & \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \log \left[K(\zeta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} K(\zeta, \zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} K(\zeta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K(\zeta, \zeta) \right] = \\ & - \frac{K(\zeta, \zeta)_1 K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}} K(\zeta, \zeta)_{11} K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}\bar{1}}}{D^2} - \frac{K(\zeta, \zeta)_{11} K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}\bar{1}}}{D} \\ & + \frac{K(\zeta, \zeta) K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}} K(\zeta, \zeta)_{1\bar{1}\bar{1}} K(\zeta, \zeta)_{11}}{D^2} + \frac{K(\zeta, \zeta) K(\zeta, \zeta)_1 K(\zeta, \zeta)_{11\bar{1}} K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}\bar{1}}}{D^2} \\ & - \frac{K(\zeta, \zeta)^2 K(\zeta, \zeta)_{1\bar{1}\bar{1}} K(\zeta, \zeta)_{11\bar{1}}}{D^2} + \frac{K(\zeta, \zeta) K(\zeta, \zeta)_{11\bar{1}\bar{1}}}{D}, \end{aligned}$$

gdzie mianownik $D = K(\zeta, \zeta) K(\zeta, \zeta)_{1\bar{1}} - K(\zeta, \zeta)_1 K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}}$. Najpierw znajdziemy asymptotyczne zachowanie D . Analizę przeprowadzoną w (4.18)-(4.21) można powtórzyć przy pomocy nieco zmodyfikowanych oszacowań (4.16) i (4.17) (brak wyrazów $\frac{\sqrt{-1}}{\xi}$), aby dostać

$$K(\zeta, \zeta) \approx \frac{1}{\pi}$$

$$K(\zeta, \zeta)_1 = K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}}, \text{ dąży do } 0 \text{ szybciej niż } \frac{1}{\sqrt[4]{|\log(r^2)|}}$$

$$K(\zeta, \zeta)_{1\bar{1}} \approx \frac{4}{\pi}.$$

Zmiana znaku minus z $\approx \frac{2-2\xi^2}{\pi}$ (we wzorze (4.22)) na plus w $\approx \frac{4}{\pi}$ (powyżej) występuje ze względu na brak $\sqrt{-1}$ w wyrazie $z = \zeta$. Ostatecznie $D \rightarrow \frac{4}{\pi^2}$. Podobnie można udowodnić, że

$$\begin{aligned} K(\zeta, \zeta)_{11} &= K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}\bar{1}} \approx \frac{4}{\pi} \\ K(\zeta, \zeta)_{11\bar{1}} &= K(\zeta, \zeta)_{\bar{1}\bar{1}\bar{1}} \approx -\frac{4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{|\log(r^2)|}}{\pi} \\ K(\zeta, \zeta)_{11\bar{1}\bar{1}} &\approx \frac{8\sqrt{2}\sqrt{|\log(r^2)|} + 12}{\pi} \approx \frac{8\sqrt{2}\sqrt{|\log(r^2)|}}{\pi}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że wyłącznie ostatnie dwa wyrazy w wyrażeniu (4.23) są istotne dla zachowania asymptotycznego tensora metrycznego $\tilde{\beta}$, które jest rzędu

$$\approx -\frac{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{(-4\sqrt[4]{2})^2 \sqrt{|\log(r^2)|}}{\pi^2}}{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{\pi} \frac{8\sqrt{2}\sqrt{|\log(r^2)|}}{\pi}}{\frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{2}\sqrt{|\log(r^2)|}.$$

Teraz $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}_2(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{|2\log(r^2)|}} e^{\frac{1-t}{2}\pi\sqrt{-1}} \left(-\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}\right)$. Ostatecznie odległość całkowita po drodze $\tilde{\gamma}_2$ względem $\tilde{\beta}$ wynosi

$$(4.24) \quad \int_0^1 \sqrt{\tilde{\beta}\left(\tilde{\gamma}_2(t), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}_2(t)\right)} \approx \int_0^1 \sqrt{\sqrt{2}\sqrt{|\log(r^2)|} \frac{1}{\sqrt[4]{|2\log(r^2)|}} \frac{\pi^2}{4}} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

gdy $r \rightarrow 0^+$. Teraz dzięki (2.12), oszacowaniu odległości po drodze $\tilde{\gamma}_1$ i (4.24), dostajemy, że $\text{dist}(z, \zeta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, gdy $r \rightarrow 0^+$ i $\varepsilon \rightarrow 0^+$ co kończy dowód. \square

Konstrukcja przykładu działającego w dowolnym wymiarze jest identyczna jak w przykładzie drugim $\Omega_r := P_r \times \Omega$. Dowód przebiega analogicznie z wykorzystaniem następujących zależności

$$\det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K_{\Omega_r}(z, \zeta) \right)_{i,j=1..n} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{\zeta}_1} \log K_{P_r}(z_1, \zeta_1) & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K_{\Omega}(z', \zeta')_{i,j=2..n} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{\zeta}_1} \log K_{P_r}(z_1, \zeta_1) \det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K_{\Omega}(z', \zeta') \right)_{i,j=2..n}$$

i

$$\begin{aligned} Ric_{i\bar{j}} &= -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log \left(\det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \log K_{\Omega_r}(z, z) \right)_{p,q=1..n} \right) = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \log K_{P_r}(z_1, z_1) \det \left(\frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \log K_{\Omega}(z, z) \right)_{p,q=2..n} \right), \end{aligned}$$

a zatem

$$Ric_{\Omega_r} = \begin{pmatrix} Ric_{P_r} & 0 \\ 0 & Ric_{\Omega} \end{pmatrix},$$

skąd

$$\tilde{\beta}((\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)), (\eta'_1(t), \dots, \eta'_n(t))^t) \geq \tilde{\beta}(\eta_1(t), \eta'_1(t)).$$

LITERATURA

- [Bel81] Steven Bell. Smooth bounded strictly and weakly pseudoconvex domains cannot be biholomorphic. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4(1):119–120, 1981.
- [Ber22] Stefan Bergman. Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.*, 86:238–271, 1922.
- [Ber30] Stefan Bergman. Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbildung durch Paare von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 102(1):430–446, 1930.
- [Ber47] Stefan Bergman. *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*. Mémor. Sci. Math., no. 106. Gauthier-Villars, Paris, 1947.
- [Ber70] Stefan Bergman. *The kernel function and conformal mapping*. American Mathematical Society, Providence, R.I., revised edition, 1970. Mathematical Surveys, No. V.
- [Ber95] Bo Berndtsson. *L²- methods for the $\bar{\partial}$ -equation*. KASS University Press, książka udostępniona w formie elektronicznej na stronie autora <http://www.math.chalmers.se/bob/>, 1995.
- [Ber96] Bo Berndtsson. The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(4):1083–1094, 1996.
- [Ber97] S. Berceanu. On the geometry of complex Grassmann manifold, its noncompact dual and coherent states. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 4(2):205–243, 1997.
- [BL80] Steve Bell and Ewa Ligocka. A simplification and extension of Fefferman’s theorem on biholomorphic mappings. *Invent. Math.*, 57(3):283–289, 1980.
- [Bł0] Zbigniew Błocki. The complex Monge-Ampère operator in pluripotential theory. *notatki z wykładu dostępne na stronie autora <http://gamma.im.uj.edu.pl/blocki/>*.
- [Bł05] Zbigniew Błocki. The Bergman metric and the pluricomplex Green function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(7):2613–2625 (electronic), 2005.
- [Boc22] Salomon Bochner. Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. *Math. Zeitschr.*, 14:180–207, 1922.
- [Boc47] S. Bochner. Curvature in Hermitian metric. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:179–195, 1947.
- [BP98] Zbigniew Błocki and Peter Pflug. Hyperconvexity and Bergman completeness. *Nagoya Math. J.*, 151:221–225, 1998.
- [BSW78] D. Burns, Jr., S. Shnider, and R. O. Wells, Jr. Deformations of strictly pseudoconvex domains. *Invent. Math.*, 46(3):237–253, 1978.
- [Cat89] David W. Catlin. Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two. *Math. Z.*, 200(3):429–466, 1989.
- [CL09] Bo-Yong Chen and Hanjin Lee. Bergman kernel and complex singularity exponent. *Sci. China Ser. A*, 52(12):2590–2603, 2009.
- [CY80] Shiu Yuen Cheng and Shing Tung Yau. On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman’s equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(4):507–544, 1980.
- [CZ02] Bo-Yong Chen and Jin-Hao Zhang. The Bergman metric on a Stein manifold with a bounded plurisubharmonic function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(8):2997–3009 (electronic), 2002.
- [Dav77] J. Davidov. The representative domain of a complex manifold and the Lu-Qi-Keng conjecture. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 30(1):13–16, 1977.
- [DH00] K. Diederich and G. Herbort. Quantitative estimates for the Green function and an application to the Bergman metric. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4):1205–1228, 2000.
- [Die70] Klas Diederich. Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudo-konvexen Gebieten. *Math. Ann.*, 187:9–36, 1970.
- [Die73] Klas Diederich. Über die 1. und 2. Ableitungen der Bergmanschen Kernfunktion und ihr Randverhalten. *Math. Ann.*, 203:129–170, 1973.
- [Din09] Zywomir Dinew. An example for the holomorphic sectional curvature of the Bergman metric. *praca przyjęta do druku w Ann. Polon. Math.*, 2009.

- [Din10] Zygomir Dinew. On the Bergman representative coordinates, 2010.
- [Eng08] Miroslav Engliš. Boundary behaviour of the Bergman invariant and related quantities. *Monatsh. Math.*, 154(1):19–37, 2008.
- [Fef74] Charles Fefferman. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. *Invent. Math.*, 26:1–65, 1974.
- [FK92] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [Fuc37] B. Fuchs. Über geodätische Mannigfaltigkeiten einer bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Riemannschen Geometrie. *Rec. Math. Moscou, n. Ser.*, 2:567–593, 1937.
- [Fuk63] B. A. Fuks. *Theory of analytic functions of several complex variables*. Translated by A. A. Brown, J. M. Danskin and E. Hewitt. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1963.
- [GK67] Samuel I. Goldberg and Shoshichi Kobayashi. Holomorphic bisectional curvature. *J. Differential Geometry*, 1:225–233, 1967.
- [Her83] Gregor Herbort. On the geodesics of the Bergman metric. *Math. Ann.*, 264(1):39–51, 1983.
- [Her99] Gregor Herbort. The Bergman metric on hyperconvex domains. *Math. Z.*, 232(1):183–196, 1999.
- [Her03] Gregor Herbort. Localization lemmas for the Bergman metric at plurisubharmonic peak points. *Nagoya Math. J.*, 171:107–125, 2003.
- [Her07] Gregor Herbort. An example of a pseudoconvex domain whose holomorphic sectional curvature of the Bergman metric is unbounded. *Ann. Polon. Math.*, 92(1):29–39, 2007.
- [JP93] Marek Jarnicki and Peter Pflug. *Invariant distances and metrics in complex analysis*, volume 9 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [Kat67] Sadao Kató. Canonical domains in several complex variables. *Pacific J. Math.*, 21:279–291, 1967.
- [KK77] Akikazu Kuribayashi and Kaname Komiya. On Weierstrass points of non-hyperelliptic compact Riemann surfaces of genus three. *Hiroshima Math. J.*, 7(3):743–768, 1977.
- [KK03] Kang-Tae Kim and Steven G. Krantz. The Bergman metric invariants and their boundary behavior. In *Explorations in complex and Riemannian geometry*, volume 332 of *Contemp. Math.*, pages 139–151. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [Kle78] Paul F. Klembeck. Kähler metrics of negative curvature, the Bergmann metric near the boundary, and the Kobayashi metric on smooth bounded strictly pseudoconvex sets. *Indiana Univ. Math. J.*, 27(2):275–282, 1978.
- [Kli82] Wilhelm Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1982.
- [Kob59] Shoshichi Kobayashi. Geometry of bounded domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92:267–290, 1959.
- [Kra93] Steven G. Krantz. *Geometric analysis and function spaces*, volume 81 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.
- [KY96a] Kang-Tae Kim and Jiye Yu. Boundary behavior of the Bergman curvature in strictly pseudoconvex polyhedral domains. *Pacific J. Math.*, 176(1):141–163, 1996.
- [KY96b] Steven G. Krantz and Jiye Yu. On the Bergman invariant and curvatures of the Bergman metric. *Illinois J. Math.*, 40(2):226–244, 1996.
- [Kyt73] A. M. Kytmanov. An estimate of the Ricci curvature of the Bergman metric. In *Properties of holomorphic functions of several complex variables (Russian)*, pages 215–217, 240. Inst. Fiz. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Krasnoyarsk, 1973.
- [Leb71] B. Ja. Lebed'. Estimates of the curvature of a Bergman metric that is invariant under biholomorphic mappings. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 5(3):100–101, 1971.
- [Leb74] B. Ja. Lebed'. Estimates of the curvature of a Bergman metric that is invariant under biholomorphic mappings. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(4(178)):175–176, 1974.
- [Lei61] Kurt Leichtweiss. Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.*, 76:334–366, 1961.
- [Lew69] Joseph Lewittes. Differentials and metrics on Riemann surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139:311–318, 1969.
- [Lu66] Qi Keng Lu. On Kaehler manifolds with constant curvature. *Chinese Math.-Acta*, 8:283–298, 1966.
- [Lu84] Qi Keng Lu. On the representative domain. In *Several complex variables (Hangzhou, 1981)*, pages 199–211. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984.

- [Lu08] Qi Keng Lu. Holomorphic invariant forms of a bounded domain. *Sci. China Ser. A*, 51(11):1945–1964, 2008.
- [McN92] Jeffery D. McNeal. Lower bounds on the Bergman metric near a point of finite type. *Ann. of Math. (2)*, 136(2):339–360, 1992.
- [MN99] Jan R. Magnus and Heinz Neudecker. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1999. Revised reprint of the 1988 original.
- [Mok] Ngaiming Mok. Extension of germs of holomorphic isometries up to normalizing constants with respect to the bergman metric. *preprint dostępnny na stronie <http://hkumath.hku.hk/nmok/>*.
- [Naz73] È. O. Nazarjan. The estimation of the Ricci curvature of the Bergman metric. *Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat.*, 8(5):418–423, 426, 1973.
- [Ohs93] Takeo Ohsawa. On the Bergman kernel of hyperconvex domains. *Nagoya Math. J.*, 129:43–52, 1993.
- [Pag] Andrea Pagano. Note on fuks formula for the holomorphic bisectional curvature. *nieopublikowany preprint*.
- [Pin79] S. I. Pinčuk. Biholomorphic inequivalence of bounded domains with smooth and piecewise-smooth boundaries. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 247(3):554–557, 1979.
- [PZ03] Peter Pflug and Włodzimierz Zwonek. Logarithmic capacity and Bergman functions. *Arch. Math. (Basel)*, 80(5):536–552, 2003.
- [Ram67] I. Ramadanov. Sur une propriété de la fonction de Bergman. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 20:759–762, 1967.
- [Ros69] Paul Rosenthal. On the zeros of the Bergman function in doubly-connected domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21:33–35, 1969.
- [Ros82] Jean-Pierre Rosay. Injective holomorphic mappings. *Amer. Math. Monthly*, 89(8):587–588, 1982.
- [SF07] Ahmed Sebbar and Thérèse Falliero. Equilibrium point of Green’s function for the annulus and Eisenstein series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(2):313–328 (electronic), 2007.
- [Sib70] R. J. Sibner. Domains bounded by analytic Jordan curves. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:61–63, 1970.
- [Sib87] Nessim Sibony. Une classe de domaines pseudoconvexes. *Duke Math. J.*, 55(2):299–319, 1987.
- [Skw69] M. Skwarczyński. The invariant distance in the theory of pseudoconformal transformations and the Lu Qi-keng conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22:305–310, 1969.
- [Skw80] Maciej Skwarczyński. Biholomorphic invariants related to the Bergman function. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 173:59, 1980.
- [Sui72] Nobuyuki Suita. Capacities and kernels on Riemann surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46:212–217, 1972.
- [Web79] S. M. Webster. Biholomorphic mappings and the Bergman kernel off the diagonal. *Invent. Math.*, 51(2):155–169, 1979.
- [Zwo] Włodzimierz Zwonek. Asymptotic behaviour of the sectional curvature of the Bergman metric for annuli. *preprint*.