Żywomir Dinew

Twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego

Praca magisterska

Opiekun:
Dr hab. Zbigniew Błocki

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Kraków 2006

Spis treści

1 Wstęp

Praca ta prezentuje twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego, dotyczące rozszerzania odwzorowań holomorficznych z oszacowaniem na wzrost. Ze względu na fakt, że teoria ta jest dość rozbudowana i istnieją różne wersje tego twierdzenia (np. twierdzenia o rozszerzaniu funkcji ze zbiorów analitycznych, twierdzenia o rozszerzaniu sekcji wiązek wektorowych lub o rozszerzaniu form), ograniczymy się do zasadniczego przypadku gdy rozszerzanymi obiektami będą funkcje holomorficzne, zbiorami, z których będziemy je rozszerzać, będą hiperpłaszczyzny zespolone, zbiorami „docelowymi", na których istnieć będzie rozszerzenie, będą obszary pseudowypukłe w $\mathbb{C}^n$, a ograniczeniem na wzrost będą klasyczne normy L^2 z wagami.

Geneza problemu jest stara. Słynne twierdzenie B-Cartana-Serre'a w konsekwencji daje nam surjektywność operatora zawężania funkcji holomorficznych na zbiorze pseudowypukłym do dowolnych domkniętych podzbiorów analitycznych, w szczególności do przecięć z hiperpłaszczyznami. Daje to natychmiast wniosek, że każdą funkcję holomorficzną na przecięciu hiperpłaszczyzny z obszarem pseudowypukłym (które nota bene nie musi być zbiorem spójnym) da się rozszerzyć do funkcji holomorficznej na całym obszarze. Problemem jest kontrola wzrostu rozszerzenia. Trafnym wyborem jest tu wyposażenie obu zbiorów w normy L^2 z wagami, które nadają im struktury przestrzeni Hilberta. Dzięki temu istnieje możliwość stosowania metod przestrzeni Hilberta, w szczególności metod operatora $\overline{\partial}$. Specyfika omawianego problemu polega między innymi na tym, że w ogólnym przypadku nie istnieją wzory explicite na rozszerzenie w zależności od rozszerzanej funkcji. Zmusza to do stosowania metod nieefektywnych, co w oczywisty sposób utrudnia oszacowania.

W związku z pojawieniem się teorii Hörmandera, dotyczącej L^2 oszacowań dla operatora $\overline{\partial}$, rozszerzenia funkcji holomorficznych zyskały nowe, potężne narzędzie. Wkrótce okazało się, że metody te doskonale pasują do prezentowanego zagadnienia i rozwój metod operatora $\overline{\partial}$ naturalnie pociągnął za sobą lepsze zrozumienie problemu rozszerzania. Po ukazaniu się wielu częściowych wyników, Ohsawa i Takegoshi uzyskali następujący, satysfakcjonujący pod względem ogólności wynik (zobacz [O-T]):

Twierdzenie 1.0.1 *Niech ν będzie plurisubharmoniczną funkcją na ograniczonym obszarze pseudowypukłym $D \subset \mathbb{C}^n$, niech $H \subset \mathbb{C}^n$ będzie zespoloną hiperpłaszczyzną, przecinającą D i niech f będzie holomorficzną funkcją na $D \cap H$, spełniającą warunek*

$$\int_{D\cap H} |f(z)|^2 e^{-\nu(z)_{|D\cap H}} d\lambda^{2n-2} < \infty, \ \textit{tzn.} f \in L^2 \cap \mathcal{O}(D \cap H, \nu)$$

Wtedy istnieje holomorficzna funkcja F na D taka, że $F_{|D\cap H} = f$ i

$$\int_D |F(z)|^2 e^{-\nu(z)} d\lambda^{2n} \leq C_0 \int_{D\cap H} |f(z)|^2 e^{-\nu(z)_{|D\cap H}} d\lambda^{2n-2}.$$

W powyższej nierówności C_0 jest stałą, zależną tylko od średnicy obszaru D.

W [O1] (zobacz też [O3]) przedstawiono następujące uogólnienie Twierdzenia 1.0.1 .

Twierdzenie 1.0.2 *Niech D, ν i H będą jak w Twierdzeniu 1.0.1 i niech $d(z, H)$ będzie odległością euklidesową punktu $z \in \mathbb{C}^n$ do hiperpłaszczyzny H. Wtedy, dla dowolnej* *plurisubharmonicznej funkcji* φ *na* D *takiej, że* $\varphi(z) + 2\log d(z,H)$ *jest ograniczona z góry, istnieje stała* C_1*, zależna tylko od* $sup_D(\varphi + 2\log d(\cdot, H))$ *taka, że dla dowolnej funkcji holomorficznej* f *na* $D \cap H$*, spełniającej warunek*

$$\int_{D\cap H} |f(z)|^2 e^{-\nu(z)_{|D\cap H} - \varphi(z)_{|D\cap H}} d\lambda^{2n-2} < \infty, tzn. f \in L^2 \cap \mathcal{O}(D \cap H, \nu + \varphi),$$

istnieje funkcja F*, holomorficzna na* D*, spełniająca warunki* $F_{|D\cap H} = f$ *i*

$$\int_D |F(z)|^2 e^{-\nu(z)} d\lambda^{2n} \le C_1 \int_{D\cap H} |f(z)|^2 e^{-\nu(z)_{|D\cap H} - \varphi(z)_{|D\cap H}} d\lambda^{2n-2}.$$

Pomimo, że autor udowodnił to twierdzenie dla zbiorów ograniczonych, łatwo się przekonać, że zachodzi ono również dla zbiorów nieograniczonych. Dowód tego faktu jest zupełnie standardowy, zostało to zauważone w [D-H].

Następująca wersja Twierdzenia 1.0.2, choć nieco mniej ogólna, jest wygodniejsza w zastosowaniach.

Wniosek 1.0.3 *Przypuśćmy, że dla zbioru pseudowypukłego* $D \subset \mathbb{C}^n$ *mamy* $D \subset \Omega \times \mathbb{C}^{n-1}$*, gdzie* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *jest obszarem na płaszczyźnie i niech* $0 \in D$*. Niech* ν, f, F *będą jak powyżej. Wtedy*

$$\int_D |F(z)|^2 e^{-\nu(z)} d\lambda^{2n} \le \frac{4\pi}{(c(\Omega, 0))^2} \int_{D\cap\{z_1=0\}} |f(z)|^2 e^{-\nu(z)_{|D\cap\{z_1=0\}}} d\lambda^{2n-2}.$$

Czyli mamy zależność już nie od średnicy, a od pojemności logarytmicznej podstawy zbioru (wszystkie definicje pojęć znajdują się w preliminariach).

Organizacja pracy wyglada następująco: w części drugiej zostaną przedstawione definicje i podstawowe narzędzia, potrzebne w dowodach tej pracy. Twierdzenia te pozostawimy bez dowodu, ich dowody można znaleźć w [J-J], [K] lub w przypadku analizy funkcjonalnej w [K-A], bądź też są to fakty powszechnie znane.

W części trzeciej poświęcimy miejsce teorii operatora $\overline{\partial}$, znanej też jako teoria Hörmandera. Jest to podstawowe narzędzie w dowodzie twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego, lecz intencją autora nie jest omówienie teorii tylko na potrzeby tego konkretnego problemu. Jest to metoda o zastosowaniach tak rozległych, a zarazem na tyle mocna, że sama w sobie jest warta poświęcenia głębszej uwagi.

W części czwartej podamy dowód twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego, a konkretniej jego uogólnienia 1.0.2. Pochodzi on z [Di], gdzie rozwinięto metody zawarte w [Be1].

W dodatkach przedstawimy zastosowania twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego. Ograniczymy się do dosłownie kilku, przeważnie bezpośrednich konsekwencji. Jest to podyktowane nie znikomą ilością problemów, do których twierdzenie to jest przydatne, a faktem, że są to przeważnie problemy dość skomplikowane, wymagające wprowadzenia wielu nowych pojęć i oznaczeń, oraz rozbudowania osobnej teorii. Pokażemy też jak w prosty sposób, korzystając z twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego można udowodnić Twierdzenie Siu o analityczności zbiorów podpoziomicowych dla liczb Lelonga.

W tym miejscu chciałbym podziękować Dr hab. Zbigniewowi Błockiemu za wprowadzenie do tematyki i liczne wskazówki.

2 Preliminaria

2.1 Definicje i twierdzenia z zakresu analizy, teorii funkcji holomorficznych wielu zmiennych i teorii aproksymacji

Definicja 2.1.1 *Dystrybucją będziemy nazywać dowolny funkcjonał liniowy T prowadzący z przestrzeni funkcji gładkich o supporcie zwartym w $\mathbb{C}$, ciągły w topologii dystrybucyjnej. Równość (nierówność) w sensie dystrybucyjnym będziemy rozumieć jako równość (nierówność) na każdej (dodatniej) gładkiej funkcji o supporcie zwartym. Pochodną w sensie dystrybucyjnym dystrybucji T będziemy nazywać dystrybucję $DT : DT(f) := -T(Df)$, gdzie f jest dowolną gładką funkcją o zwartym supporcie. Analogicznie definiuje się pochodne wyższych rzędów. Funkcje klasy L^1_{loc} są w szczególności dystrybucjami działającymi według wzoru $u(f) := \int uf$. Funkcje te są nieskończenie wiele razy różniczkowalne w sensie dystrybucyjnym. Nie każda dystrybucja jest tej postaci. Nie wchodząc w szczegóły zaznaczmy, że będziemy się zajmować wyłącznie dystrybucjami które są miarami (ich działanie jest analogiczne do opisanego powyżej). Miary te mogą mieć gęstość (wtedy mają reprezentanta z klasy L^1_{loc}) lub nie.*

Definicja 2.1.2 *Funkcję f określoną na obszarze $D \subset \mathbb{C}^n$ będziemy nazywać harmoniczną, jeżeli należy ona do klasy $\mathcal{C}^\infty(D)$, oraz $\triangle f = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \overline{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \overline{z}_2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \overline{z}_n} f = 0$.*

(Warto zwrócić uwagę, że nasza definicja operatora $\triangle$ różni się o stałą (4) od definicji powszechnej).
Z ogólnej teorii operatorów eliptycznych, jakim to jest operator $\triangle$ wynika, że warunek gładkości można opuścić, jako że wszystkie rozwiązania równania różniczkowego $\triangle f = 0$, rozumianego w słabym sensie muszą być gładkie.

Definicja 2.1.3 *Funkcję f określoną na obszarze $D \subset \mathbb{C}^n$ (w szczególności $D \subset \mathbb{C}$) będziemy nazywać subharmoniczną, jeżeli jest ona półciągła z góry, oraz dla dowolnego obszaru $G \subset\subset D$ i dowolnej funkcji g ciągłej na $\overline{G}$ i harmonicznej w G, $f(z) \leq g(z)$, $\forall z \in \partial G$ implikuje $f \leq g$ na całym G.*

W przypadku gdy dodatkowo funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^2$ subharmoniczność jest równoważna następującemu warunkowi różniczkowemu: $\triangle f \geq 0$, w każdym punkcie obszaru D. Bez tego dodatkowego założenia również powyższy warunek różniczkowy jest równoważny subharmoniczności z tym, że należy go rozumieć jako nierówność w sensie dystrybucyjnym.

Definicja 2.1.4 *Zbiór M nazwiemy polarnym, gdy dla każdego $z \in M$ istnieje otoczenie U_z, punktu z i funkcja f, subharmoniczna na U_z taka, że $M \cap U_z \subset \{f = -\infty\}$.*

Definicja 2.1.5 *Funkcję f określoną na obszarze $D \subset \mathbb{C}^n$ będziemy nazywać plurisubharmoniczną, jeżeli jest ona półciągła z góry, oraz dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}^n$ funkcja $\mathbb{C} \ni \lambda \to f(z + \lambda w)$ jest subharmoniczna tam, gdzie jest ona określona, tzn. na zbiorze $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid z + \lambda w \in D\}$.*

Przy dodatkowym założeniu, że $f \in C^2(D)$, plurisubharmoniczność jest równoważna następującemu warunkowi Leviego:

$$\forall w \in D, \forall X \in \mathbb{C}^n, \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f(w) X_j \overline{X}_k \geq 0.$$

Podobnie jak w przypadku funkcji subharmonicznych, bez założenia $\mathcal{C}^2$ (ale z zachowaniem warunku półciągłości z góry) nierówność ta, rozumiana w sensie dystrybucyjnym, również jest równoważna plurisubharmoniczności.

Definicja 2.1.6 *Załóżmy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^2$. Funkcję tą nazwiemy ściśle plurisubharmoniczną, jeżeli*

$$\forall w \in D, \forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},\ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f(w) X_j \overline{X}_k > 0,$$

tzn. macierz $\left[\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f(w)\right]_{j,k=1..n}$ *jest ściśle dodatnio określona w każdym punkcie dziedziny funkcji f.*

Oczywiście funkcje ściśle plurisubharmoniczne są w szczególności plurisubharmoniczne.

Definicja 2.1.7 *Ujemną funkcją Greena, dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$, o biegunie logarytmicznym w $z \in \Omega$, będziemy nazywać funkcję*

$$G_\Omega(z,\cdot) := \sup\{f(\cdot) : f < 0, f \textit{ jest subharmoniczna w } \Omega \textit{ i } \lim_{\zeta \to z}(f(\zeta) - \log|\zeta - z|) < \infty\}$$

Funkcja ta sama jest subharmoniczna w Ω i harmoniczna w $\Omega \setminus \{z\}$.

Określenie ujemna funkcja Greena nie jest tradycyjne, jednakże użycie nazwy „plurizespolona funkcja Greena" jest trochę nie na miejscu, gdyż rozpatrujemy obszary jednowymiarowe.[1] Definicja nasza różni się też od funkcji Greena, która pojawia się w teorii równań różniczkowych.

Definicja 2.1.8 *Niech $G_\Omega(z,\cdot)$ będzie ujemną funkcją Greena, dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$, o biegunie logarytmicznym w $z \in \Omega$. Przez*

$$c(\Omega, z) := \exp(\lim_{\zeta \to z}(G_\Omega(z,\zeta) - \log|z - \zeta|))$$

będziemy oznaczać tak zwaną pojemność logarytmiczną zbioru Ω (czy też raczej jego dopełnienia), względem punktu z.

Naturalne wątpliwości może budzić istnienie granicy w powyższej definicji. Okazuje się, że granica ta zawsze istnieje, jednakże istotnym założeniem jest tu fakt, że zbiór jest jednowymiarowy.[2] Ważną własnością pojemności jest fakt, że pojemność zbioru wynosi zero wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest polarne.

Definicja 2.1.9 *Obszar D w $\mathbb{C}^n$ będziemy nazywać pseudowypukłym, jeżeli funkcja $D \ni z \to -\log(dist(z, \partial D))$ jest plurisubharmoniczna.*

[1] Plurizespolona funkcja Greena zdefiniowana jest analogicznie, z tym że subharmoniczność należy zmienić na plurisubharmoniczność (Obszar ma wymiar większy niż jeden), a lim na lim sup. Nie wszystkie własności ujemnej funkcji Greena dla zbiorów na płaszczyźnie przenoszą się na plurizespoloną funkcję Greena.

[2] W przypadku gdy $\Omega \subset \mathbb{C}^n, n > 1$, lim należałoby zamienić na lim sup.

Definicja 2.1.10 *Powiemy, że funkcja* $\eta : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest wyczerpująca dla obszaru* D*, jeżeli zbiór* $\{\eta \leq t\}$ *jest relatywnie zwarty w* D*, dla każdego* $t \in \mathbb{R}$*.*

Okazuje się, że istnienie plurisubharmonicznej funkcji wyczerpującej jest równoważne pseudowypukłości obszaru D.

Twierdzenie 2.1.11 *Dla dowolnego obszaru pseudowypukłego* D *istnieje gładka i ściśle plurisubharmoniczna funkcja wyczerpująca.*[3]

Twierdzenie to ma ważne konsekwencje przy aproksymacji dowolnych obszarów pseudowypukłych obszarami o wyższym stopniu regularności.

Definicja 2.1.12 *Gradientem zespolonym funkcji* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *w punkcie* $z \in D$ *nazwiemy wektor* $grad_{\mathbb{C}} f(z) := \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} f(z), \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} f(z), \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n} f(z)\right)$.

Definicja 2.1.13 *Powiemy, że obszar* D *jest gładki w punkcie* $z_0 \in \partial D$*, jeżeli istnieje otoczenie otwarte* U *punktu* z_0*, oraz gładka funkcja* ρ*, zdefiniowana na* U *taka, że*

- $\rho_{|D \cap U} < 0$
- $\rho_{|U \setminus \overline{D}} > 0$
- $grad_{\mathbb{C}} \rho_{|\partial D \cap U} \neq 0$

Powiemy, że obszar D *jest obszarem o gładkim brzegu, jeżeli* D *jest gładki w każdym punkcie swojego brzegu. Funkcję* ρ *nazywamy lokalną funkcją definiującą (od jej regularności zależy regularność zbioru, ponieważ będziemy się zajmować wyłącznie obszarami o gładkim brzegu lub bez warunków na regularność, ograniczymy się do rozpatrywania gładkich lokalnych funkcji definiujących).*

Definicja 2.1.14 *Niech* $D \subset \mathbb{C}^n$ *będzie obszarem o brzegu gładkim w punkcie* $z_0 \in \partial D$*. Przestrzenią styczną w punkcie* z_0 *będziemy nazywać zespoloną przestrzeń wektorową (zawartą w* $\mathbb{C}^n$*), składającą się z tych wektorów* X*, dla których* $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} \rho(z_0) X_j = 0$*, dla dowolnej gładkiej lokalnej funkcji definiującej* ρ*.*[4] *Jest to przestrzeń tych wektorów, które są prostopadłe do gradientu zespolonego funkcji* ρ*. Zespoloną przestrzeń styczną do* D *w punkcie* z_0 *będziemy oznaczać przez* $T_{z_0}^{\mathbb{C}}$*.*

Definicja 2.1.15 *Załóżmy, że obszar* D *jest obszarem o gładkim brzegu. Obszar* D *będziemy nazywać obszarem ściśle pseudowypukłym, jeżeli dla każdego punktu* z *z brzegu* D *istnieje gładka lokalna funkcja definiująca* ρ*, zdefiniowana na otoczeniu* U *taka, że*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \rho(z) X_j \overline{X}_k > 0,$$

dla wszystkich $z \in \partial D \cap U, X \in T_z^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$*.*

[3] prawdziwe jest twierdzenie mocniejsze - funkcję wyczerpującą możemy wybrać w klasie funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych

[4] Okazuje się, że zespolona przestrzeń styczna nie zależy od wyboru lokalnej funkcji definiującej. W tym sensie można mówić o prostopadłości nie do gradientu funkcji, a do pewnego kierunku (normalnego do brzegu obszaru).

Oczywiście obszary ściśle pseudowypukłe są w szczególności obszarami pseudowypukłymi.

Definicja 2.1.16 *Formą różniczkową (zespoloną) na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, bistopnia (p,q) będziemy nazywać odwzorowanie, które każdemu punktowi $z \in \Omega$ przyporządkowuje element skompleksyfikowanej algebry zewnętrznej $\Lambda^p \mathbb{C}^n \otimes \Lambda^q \overline{\mathbb{C}^n}$. Formy bistopnia $(0,0)$ to po prostu funkcje. W dalszej części pracy ograniczymy się do rozpatrywania wyłącznie funkcji, form bistopnia $(0,1)$ i sporadycznie form bistopnia $(0,2)$. Każda forma α bistopnia $(0,1)$ da się zapisać w postaci $\alpha = \alpha_1(z)d\overline{z}_1 + \alpha_2(z)d\overline{z}_2 + ... + \alpha_n(z)d\overline{z}_n$. Funkcje $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, które są zdefiniowane na całym Ω, nazywamy współczynnikami formy. W zależności od przynależności wszystkich tych funkcji do danej klasy (np. L^2) będziemy mówić, że forma należy do tej klasy.*

Definicja 2.1.17 *Prądem będziemy nazywać formę różniczkową o współczynnikach dystrybucyjnych. Wszelkie operacje na prądach, równości etc. będziemy rozumieć w sensie dystrybucyjnym.*

Definicja 2.1.18 *Prąd T będziemy nazywać $\overline{\partial}$-zamkniętym, jeżeli $\overline{\partial} T = 0$, gdzie równość rozumiemy jako równość prądów.*

Oczywiście analogicznie rozumiemy zamkniętość form.

Twierdzenie 2.1.19 *Niech $\phi \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją taką, że $\phi \geq 0$, support ϕ zawiera się w zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $\phi(x)$ zależy tylko od $\|x\|$, oraz $\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\lambda^{2n} = 1$. Niech $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Niech $f \in L^1_{loc}(D)$. Regularyzacją f_ε funkcji f nazwiemy splot funkcji f z ϕ_ε, $f * \phi_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)d\lambda^{2n}(y)$, dla $x \in D_\varepsilon := \{y \in D : dist(y, \partial D) > \varepsilon\}$. Jeżeli $f \in \mathcal{C}_o(D)$ to $f_\varepsilon \to f$ jednostajnie. Jeżeli $f \in L^2(D)$ to $f_\varepsilon \to f$ w L^2. Jeżeli $f \in \mathcal{C}_o^k(D)$ to $D^\alpha f_\varepsilon \to D^\alpha f$, $|\alpha| \leq k$ jednostajnie. Jeżeli u jest dystrybucją na D to $u_\varepsilon(x) := u * \phi_\varepsilon(x) = u(\phi_\varepsilon(x - \cdot)) \in \mathcal{C}^\infty$, na zbiorze D_ε. Przy $\varepsilon \searrow 0$ zbiory D_ε wyczerpują D. W szczególności dla każdej dystrybucji u, istnieje ciąg $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}_o^\infty$, $(\subset L^1_{loc})$ taki, że $u_j \to u$ w topologii słabej. Prądy i formy regularyzujemy, regularyzując ich współczynniki.*

Z Twierdzenia Stokesa łatwo wywnioskować następujące

Twierdzenie 2.1.20 (o całkowaniu przez części) *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem o gładkim brzegu, a f będzie funkcją różniczkowalną na pewnym otoczeniu $\overline{D}$, lub niech f ma support zwarty. Wtedy*

$$\int_D \frac{\partial}{\partial z_j} f = \int_{\partial D} f \overrightarrow{n_j}$$

$$\int_D \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} f = \int_{\partial D} f \overline{\overrightarrow{n_k}},$$

gdzie $\overrightarrow{n_j}$ jest j-tą składową wersora normalnego do brzegu D. (W przypadku gdy f ma support zwarty po prawej stronie obu wzorów zamiast całki po brzegu mamy 0).

W [D-H] wzory tego typu nazywane są wzorami Gaussa, gdzie indziej nazywa sie je wzorami Greena.

Twierdzenie 2.1.21 (Sarda-wersja słaba) *Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$, miara Lebesgue'a zbioru $\{f(A) : A = \{z : f'(z) = 0\}\}$ (tzn. miara obrazu punktów w których pochodna się zeruje) równa się zero.*

Twierdzenie 2.1.22 (Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki)
Jeżeli ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1$ dąży punktowo do f i ponadto $\exists g \in L^1 : |f_n| \leq g,\ \forall n$ to $f \in L^1$ i $\int f_n \to \int f$.

Definicja 2.1.23 *Podzbiór M otwartego zbioru $D \subset \mathbb{C}^n$ nazwiemy zbiorem analitycznym (lub podzbiorem analitycznym zbioru D), jeżeli dla każdego punktu $a \in D$ istnieje otoczenie otwarte $U_a \subset D$, punktu a i funkcje $f_1, f_2, ..., f_N \in \mathcal{O}(U_a)$ (N może zmieniać się w zależności od punktu a) takie, że $M \cap U_a = \{z \in U_a : f_1(z) = ... = f_N(z) = 0\}$.*

Okazuje się, że przecięcie dowolnej rodziny zbiorów analitycznych jest zbiorem analitycznym. Tą i inne własności zbiorów analitycznych można znaleźć w [Ch].

Definicja 2.1.24 *Powiemy, że forma $\alpha = \alpha_1 d\overline{z}_1 + \alpha_2 d\overline{z}_2 + \cdots + \alpha_n d\overline{z}_n$ spełnia warunki brzegowe $\overline{\partial}$-Neumanna na obszarze D, jeżeli $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (grad_{\mathbb{C}}\rho)_j = 0$ w każdym punkcie brzegu D, gdzie ρ jest dowolną gładką funkcją definiującą. Inaczej mówiąc, rozpatrując zestawienie współczynników formy α jako wektor z $\mathbb{C}^n$ to w każdym punkcie brzegu wektor ten należy do zespolonej przestrzeni stycznej do D w tymże punkcie. Analogicznie powiemy, że forma α spełnia warunki brzegowe ∂-Neumanna, jeżeli $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{(grad_{\mathbb{C}}\rho)}_j = 0$ w każdym punkcie brzegu.*[5]

2.2 Definicje i twierdzenia z zakresu analizy funkcjonalnej i topologii

Definicja 2.2.1 *W pracy będziemy rozpatrywać operatory liniowe. Powiemy, że operator liniowy T o dziedzinie $DomT$, zawartej w przestrzeni Hilberta H_1 i prowadzący w przestrzeń Hilberta H_2 (W szczególności może się zdażyć, że $H_1 = H_2$) jest*

- *ograniczony, jeżeli $sup_{f \in DomT, \|f\|_{H_1}=1} \|Tf\|_{H_2} < \infty$.*
  Ograniczoność operatora jest równoważna z jego ciągłością.
- *domknięty, jeżeli jego wykres— zbiór $\{(f, Tf), f \in DomT\}$ jest domknięty jako podzbiór $H_1 \times H_2$ z topologią produktową.*
- *gęsto określony, jeżeli $DomT$ jest podzbiorem gęstym H_1 w topologii zadanej przez normę przestrzeni H_1.*

Zbiór wszystkich wartości, jakie przyjmuje operator T będziemy tradycyjnie oznaczać przez $ImT := T(DomT)$. Zbiór elementów f z dziedziny T takich, że $Tf = 0$ będziemy oznaczać przez $KerT$. Podstawowym faktem w analizie funkcjonalnej jest, że w przypadku gdy T jest ograniczony to $KerT$ jest domkniętą podprzestrzenią H_1. Tą własność posiadają też operatory domknięte. W przypadku gdy operator T jest gęsto określony można poprawnie zdefiniować operator sprzężony do T, który będziemy oznaczać przez T^*. Dziedzinę $DomT^*$ stanowi zbiór

$$\{g \in H_2 : \exists h \in H_1, \forall f \in DomT,\ \langle Tf, g\rangle_{H_2} = \langle f, h\rangle_{H_1}\}.$$

Naturalnie wtedy $T^*(g) := h$. Jeżeli istnieje, to T^* jest operatorem domkniętym.

[5] Dla form o bistopniu niekoniecznie równym $(0,1)$ warunek $\overline{\partial}$-Neumanna ma postać $\alpha \lrcorner grad_{\mathbb{C}}\rho_{|\,\partial D} = 0$, gdzie $\lrcorner$ to operator kontrakcji, jednakże w dalszej części pracy ograniczymy się do sytuacji gdy formy są bistopnia $(0,1)$

Twierdzenie 2.2.2 (Nierówność Schwarza) *Dla przestrzeni Hilberta H , z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ zachodzi następująca nierówność $\langle x, y \rangle_H \leq \|x\|_H \|y\|_H$, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy x i y są liniowo zależne.*

Przyjmijmy, że ciało $\mathbb{K}$ będzie oznaczać $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 2.2.3 (Hahna-Banacha, dla przestrzeni unormowanych) *Niech X będzie przestrzenią $\mathbb{K}$-liniową, a $p : X \to [0, \infty)$ będzie seminormą. Niech X_0 będzie liniową podprzestrzenią X, a $f : X_0 \to \mathbb{K}$ będzie odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym takim, że $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in X_0$. Wtedy istnieje $F : X \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$-liniowe, $F(x) = f(x), x \in X_0$, $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$. Jeśli X jest przestrzenią unormowaną to $\|f\| = \|F\|$.*

Jest to klasyczne twierdzenie o rozszerzaniu funkcjonałów liniowych. My skorzystamy z nieco innej wersji tego twierdzenia, a mianowicie z twierdzenia o rozszerzaniu odwzorowań antyliniowych, co jest bezpośrednim zastosowaniem twierdzenia Hahna-Banacha do odwzorowań $\overline{f}$ i $\overline{F}$.

Definicja 2.2.4 *Powiemy, że X jest przestrzenią liniowo topologiczną, gdy jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$, jest przestrzenią topologiczną, oraz operacje dodawania wektorów i mnożenia przez skalar z $\mathbb{K}$ są ciągłe w tej topologii. Powiemy, że przestrzeń liniowo topologiczna, która jest Hausdorffa, jest lokalnie wypukła, gdy istnieje pełny układ otoczeń zera składający się ze zbiorów wypukłych.*

Każda przestrzeń Hilberta jest lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo topologiczną. W tej pracy ważne dla nas będą wyłącznie własności przestrzeni Hilberta.

Twierdzenie 2.2.5 (Banacha, o odwzorowaniu odwrotnym) *Jeśli X i Y są przestrzeniami liniowo topologicznymi, metryzowalnymi, zupełnymi oraz $T : X \to Y$ jest ciągłą, liniową bijekcją, to T^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym i liniowym.*

Oczywiście dla nas ciekawy jest przypadek, gdy mamy do czynienia z przestrzeniami Hilberta. Warto zwrócić uwagę, że poza ciągłością nie dostajemy żadnej informacji co do normy operatora odwrotnego.

Definicja 2.2.6 *Niech X będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo topologiczną (nad $\mathbb{K}$). Przez X' będziemy oznaczać przestrzeń dualną (sprzężoną) do X, składającą się ze wszystkich funkcjonałów $\mathbb{K}$-liniowych i ciągłych względem topologii przestrzeni X. W przypadku przestrzeni unormowanych*

$$X' = \{f : X \to \mathbb{K} - \textit{liniowe} : sup_{x:\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty\}.$$

Definicja 2.2.7 *Niech X będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo topologiczną nad $\mathbb{K}$. Topologię zadaną na X przez rozdzielającą rodzinę seminorm $p_f(x) := |f(x)|, f \in X'$ nazywamy topologią słabą i oznaczamy przez $\sigma(X, X')$.*

Zbieżność w topologii $\sigma(X, X')$ można opisać w następujący sposób:

$$X \ni x_n \to x \in X, n \to \infty \Leftrightarrow \forall f \in X',\ p_f(x_n - x) \to 0 \ (\text{tzn.} |f(x_n - x)| \to 0).$$

Definicja 2.2.8 *Niech X będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo topologiczną $\mathbb{K}$. Topologię zadaną na $X^{'}$ przez rozdzielającą rodzinę seminorm $p_x(f) := |f(x)|, x \in X$ nazywamy topologią słabą-$*$ i oznaczamy przez $\sigma(X^{'}, X)$.*

Zbieżność w topologii $\sigma(X^{'}, X)$ można opisać w następujący sposób:

$$X^{'} \ni f_n \to f \in X^{'}, n \to \infty \Leftrightarrow \forall x \in X,\ p_x(f_n - f) \to 0 \text{ (tzn.} |f_n(x) - f(x)| \to 0).$$

Twierdzenie 2.2.9 (Riesza) *Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Dla każdego ciągłego funkcjonału $F : H \to \mathbb{C}$ istnieje jedyny element $y \in H$ taki, że $F(x) = \langle x, y \rangle_H$. Ponadto $\|y\|_H = \|F\|_{H'}$.*

Twierdzenie to daje nam identyfikację $H \cong H^{'}$, gdzie przestrzeń dualną bierzemy względem topologii zadanej przez iloczyn skalarny przestrzeni H.

Definicja 2.2.10 *Przestrzeń unormowaną X nazwiemy refleksywną, gdy odwzorowanie*

$$\pi : X \to X'' := (X^{'})^{'}, X \ni x \to \{X' \ni f \to f(x)\} \in X^{''}$$

jest surjektywne. Ze względu na twierdzenie Riesza (Twierdzenie 2.2.9), każda przestrzeń Hilberta jest refleksywna.

Twierdzenie 2.2.11 (Banacha-Alaoglu) *Kula domknięta w przestrzeni Banacha jest słabo-$*$ zwarta.*

Obserwacja 2.2.12 *Z twierdzenia Banacha-Alaoglu możnaby wysnuć następujący (na ogół błędny) wniosek: Niech X będzie przestrzenią Banacha*

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x \in X^{'} : \|x\| \leq 1\} \Rightarrow \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}, n_k \nearrow \infty : y_{n_k} \to y \in \{x \in X^{'} : \|x\| \leq 1\},$$

w topologii słabej-.*

O fałszywości powyższego wniosku (bez dodatkowych założeń) możemy się przekonać z następującego przykładu: Niech $X = \mathcal{C} \cap L^{\infty}([0, \infty))$ będzie przestrzenią Banacha z normą supremową. Rozpatrzmy ciąg funkcjonałów

$$X^{'} \ni \xi_n : \xi_n(f) = f(n), n \in \mathbb{N}, f \in X\text{- waluacji funkcji w punkcie n.}$$

Oczywiście $\|\xi_n\|_{X'} = 1$, a więc wszystkie te funkcjonały należą do domkniętej kuli jednostkowej w X. Na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu kula ta jest $\sigma(X^{'}, X)$-zwarta. Z naszego „wniosku” musi istnieć rosnący podciąg $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ i funkcjonał graniczny ξ taki, że $\xi_{n_k} \to \xi$ w topologii $\sigma(X^{'}, X)$. Niech

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{\pi}{2} + \pi \frac{x - n_{2k}}{n_{2k+1} - n_{2k}}), x \in [n_{2k}, n_{2k+1}) \\ sin(\frac{3\pi}{2} + \pi \frac{x - n_{2k+1}}{n_{2k+2} - n_{2k+1}}), x \in [n_{2k+1}, n_{2k+2}) \end{cases} , n_0 = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nie trudno sprawdzić, że funkcja ta jest ciągła i ograniczona, oraz $f(n_k) = (-1)^k$. A więc $\xi_{n_k}(f) \to \xi(f)$, a jednocześnie $\xi_{n_k}(f) = f(n_k) = (-1)^k$ — sprzeczność.

Jak widać wniosek nasz nie jest na ogół prawdziwy w przestrzeniach Banacha. Powodem pojawienia się powyższych patologii jest fakt, że przestrzeń dualna, wyposażona w topologię słabą-$*$, nie musi spełniać drugiego aksjomatu przeliczalności. Przestrzeń zwarta spełniająca drugi aksjomat przeliczalności jest metryzowalna, co pociąga za sobą możliwość wybierania zbieżnego podciągu z każdego ciągu nieskończonego (tak zwana ciągowa zwartość, zob. [E] i tam Twierdzenie 4.1.7 i Twierdzenie 4.2.3).

Okazuje się, że topolgia słaba w przestrzeni Banacha jest wolna od tego typu patologii. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.13 (Eberlein albo Eberlein-Shmulian) *Jeżeli X jest przestrzenią Banacha, to każdy $\sigma(X, X')$ -zwarty podzbiór X posiada własność, że z dowolnego ciągu w tym podzbiorze da się wybrać podciąg słabo zbieżny. Ponadto kula domknięta jest $\sigma(X, X')$ zwarta wtedy i tylko wtedy gdy X jest przestrzenią refleksywną.*

W przypadku przestrzeni Hilberta (jak i ogólniej w przestrzeniach $L^p, 1 < p < \infty$) twierdzenie to rozstrzyga nasz problem jednoznacznie, jednakże w przypadku ogólnej przestrzeni Banacha sprawdzenie refleksywności jest równie trudne jak i sprawdzenie słabej zwartości. Czasami w rozważanej przez nas teorii bardzo przydatne jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.2.14 (Banach-Saks) *Z ciągu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, ograniczonego w przestrzeni Hilberta można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ taki, że $y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}$ jest zbieżny w normie.*

2.3 Oznaczenia i konwencje

W dalszej części pracy przestrzeniami, które będziemy rozpatrywać, będą przestrzenie funkcji lub form L^2 z wagą, które będziemy oznaczać przez

$$L^2(D,\psi) = L^2_{(0,0)}(D,\psi) := \{f : \int_D |f|^2 e^{-\psi} d\lambda^{\dim_{\mathbb{R}} D} < \infty\},$$

z normą

$$\|f\|^2_{L^2(D,\psi)} := \int_D |f|^2 e^{-\psi} d\lambda^{\dim_{\mathbb{R}} D}$$

(w przypadku funkcji).

$$L^2_{(0,1)}(D,\psi) :=$$

$$\{f = f_1 d\overline{z}_1 + f_2 d\overline{z}_2 + ... + f_{\dim_{\mathbb{C}} D} d\overline{z}_{\dim_{\mathbb{C}} D} : \int_D (|f_1|^2 + |f_2|^2 + ... + |f_{\dim_{\mathbb{C}} D}|^2) e^{-\psi} d\lambda^{\dim_{\mathbb{R}} D} < \infty\},$$

z normą

$$\|f\|^2_{L^2_{(0,1)}(D,\psi)} := \int_D (|f_1|^2 + |f_2|^2 + ... + |f_{\dim_{\mathbb{C}} D}|^2) e^{-\psi} d\lambda^{\dim_{\mathbb{R}} D}$$

(w przypadku form bistopnia $(0,1)$).
Oczywiście dla $\psi = 0$, $L^2(D,\psi) = L^2(D)$. Przestrzeń funkcji lokalnie całkowalnych z kwadratem oznaczamy przez

$$L^2_{loc}(D) := \bigcup_{\psi \in \mathcal{C}(D)} L^2(D,\psi)$$

Operatorem rozpatrywanym w tej pracy będzie operator

$$\overline{\partial} : L^2(D, \psi_1) \supset \mathrm{Dom}\,\overline{\partial} \longrightarrow L^2_{(0,1)}(D, \psi_2).$$

(Indeksy przy wagach wprowadzone są umyślnie, aby podkreślić fakt, że wagi będą wielokrotnie zmieniane w dowodach, a zatem w każdej konkretnej sytuacji opertor ten będzie operatorem między innymi przestrzeniami). Działanie operatora jest określone wzorem $\overline{\partial} f = (\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_1})d\overline{z}_1 + (\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_2})d\overline{z}_2 + ... + (\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_n})d\overline{z}_n$, lub też operator, którego także będziemy oznaczać przez $\overline{\partial}$

$$\overline{\partial} : L^2_{(0,1)}(D, \psi_3) \supset \mathrm{Dom}\,\overline{\partial} \longrightarrow L^2_{(0,2)}(D, \psi_4),$$

określony wzorem

$$\overline{\partial}(f_1 d\overline{z}_1 + f_2 d\overline{z}_2 + ... + f_n d\overline{z}_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_1}\Big) d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_j + ... + \Big(\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_n}\Big) d\overline{z}_n \wedge d\overline{z}_j.$$

(Co do indeksowania wag patrz uwagi powyżej). Nadużywając oznaczeń, mamy równość $\overline{\partial}\,\overline{\partial} = 0$. Jak się okaże w przypadku drugiego operatora $\overline{\partial}$ będziemy rozpatrywać wyłącznie te formy f, bistopnia $(0, 1)$, dla których $\overline{\partial} f = 0$, stąd też nie będziemy poświęcać uwagi strukturze przestrzeni $L^2_{(0,2)}(D, \psi)$ pomimo, że apriori wprowadzamy operator o wartościach w tej przestrzeni. Ograniczymy się do stwierdzenia, że

$$|\,\overline{\partial} f|^2 = \sum_{1 \le j < k \le 1}^{n} \Big|\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}\Big|^2.$$

W całej pracy $\overline{\partial}^*_\psi$ będzie oznaczał operator formalnie sprzężony do $\overline{\partial}$, czyli taki, że

$$\langle \overline{\partial}\,\alpha, \beta\rangle_{L^2_{(0,1)}(D,\psi)} = \langle \alpha, \overline{\partial}^*_\psi\,\beta\rangle_{L^2(D,\psi)}.$$

Dla form α gładkich o supporcie zwartym jest on dobrze zdefiniowany, a sprawdzenie równości sprowadza się do całkowania przez części. W przypadku gdy support nie jest zwarty pojawia się całka po brzegu, co komplikuje sprawę. Operator sprzężony działa też według tego wzoru ale na większej przestrzeni (Dom $\overline{\partial}^*_\psi$- sprzężony). Tak więc operator formalnie sprzężony jest zawężeniem operatora sprzężonego do przestrzeni, mówiąc nieściśle, na której równości sprawdza się bezpośrednio i mamy „ładne" wzory. Oczywiście może się zdażyć, że dla jakiejś formy α, która nie ma zwartego supportu wzór działania $\overline{\partial}^*_\psi$ dalej zachodzi i równość też się sprawdza bezpośrednio (takimi formami będą na przykład formy spełniające brzegowe warunki $\overline{\partial}$-Neumanna). W takim przypadku też będziemy pisać $\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha$. Oznaczenia tego będziemy używać, gdy $\overline{\partial}^*$ będzie operatorem z $L^2_{(0,1)}(D, \psi)$ do $L^2(D, \psi)$, czyli gdy wagi w obu przestrzeniach są takie same. Wtedy $\overline{\partial}^*_\psi$ wyraża się poprzez

$$\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha = -e^{\psi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\psi}\alpha_j).$$

Gdy $\overline{\partial}^* : L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2) \to L^2(D,\varphi_1)$ to operator ten będziemy oznaczać przez $\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}$. Działa on według wzoru.

$$\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}\alpha = -e^{\varphi_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}(\alpha_j e^{\varphi_2}).$$

Będziemy używać oznaczenia

$$\alpha\cdot\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_n,$$

dla odróżnienia od zwyczajnego iloczynu skalarnego z $\mathbb{C}^n$. Będziemy stosować oznaczenia

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = f_j = f_{z_j},\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = f_{\overline{j}} = f_{\overline{z}_j}$$

wymiennie. Czasami oznaczenie f_j może mylić się z j-tą współrzędną formy α (α_j) lecz z kontekstu zawsze będzie wynikać o który obiekt nam chodzi. W całej pracy będziemy się posługiwać pewnym skrótem myślowym: ponieważ większość rozważań prowadzimy na obszarze D, pisząc „zwarty support”mamy na myśli support zwarty, zawarty w D (w twierdzeniach gdzie nie ograniczamy się do wybranego obszaru zwartość supportu rozumiemy zwyczajnie).

2.4 Dwa techniczne lematy

Następujące dwa lematy są niezbędne do naszego dowodu twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego. Zostały one wzięte z [Be1], choć można je znaleźć w wielu innych miejscach.

Lemat 2.4.1 *Niech $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j d\overline{z}_j$ będzie $(0,1)$-formą, klasy $\mathcal{C}^2$ określoną na obszarze D w $\mathbb{C}^n$, oraz ψ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^2$. Wówczas zachodzi wzór*

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial \overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) = \sum_{j,k=1}^{n}\psi_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} + |\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha|^2 e^{-\psi} + \sum_{j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial\,\alpha_j}{\partial\,\overline{z}_k}\right|^2 e^{-\psi} -$$

$$-2Re\,\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha\cdot\overline{\alpha}e^{-\psi} - |\,\overline{\partial}\,\alpha|^2 e^{-\psi}.$$

Dowód: Wprowadźmy pomocniczy operator $\delta_j f := e^{\psi}\frac{\partial}{\partial z_j}(fe^{-\psi})$. Oczywiście w tej notacji mamy

$$\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha = -\sum_{i=1}^{n}\delta_j\alpha_j. \tag{2.1}$$

Zachodzą następujące wzory:

$$\frac{\partial}{\partial z_k}(u\overline{v}e^{-\psi}) = (\delta_k u)\overline{v}e^{-\psi} + u\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial\,\overline{z}_k}v}\Big)e^{-\psi}. \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\,\overline{z}_k}(u\overline{v}e^{-\psi}) = \Big(\frac{\partial}{\partial\,\overline{z}_k}u\Big)\overline{v}e^{-\psi} + u\overline{\delta_k v}e^{-\psi}. \tag{2.3}$$

W obu przypadkach mamy do czynienia z wykorzystaniem elementarnej wersji wzoru Leibniza $\frac{\partial}{\partial z_k}(xy) = \left(\frac{\partial}{\partial z_k}x\right)y + x\left(\frac{\partial}{\partial z_k}y\right)$, oraz tożsamości $\overline{\frac{\partial}{\partial z_k}f} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\overline{f}$. Przeliczmy teraz czemu równa się operator $\delta_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\delta_j$.

$$(\delta_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\delta_j)f = \delta_j f_{\overline{k}} - (e^{\psi}\frac{\partial}{\partial z_j}(fe^{-\psi}))_{\overline{k}} =$$

$$e^{\psi}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\psi})f_{\overline{k}} + e^{\psi}e^{-\psi}f_{j\overline{k}} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}f_j - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}(-\psi_j f) = -\psi_j f_{\overline{k}} + \psi_j f_{\overline{k}} + f\psi_{j\overline{k}} = f\psi_{j\overline{k}}. \quad (2.4)$$

Zatem operator ten jest tożsamy z mnożeniem przez $\psi_{j\overline{k}}$. Wykorzystując powyższe wzory otrzymujemy

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial \overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) \overset{(2.3)}{=} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big)\overline{\alpha}_k e^{-\psi} + \alpha_j\overline{\delta_k\alpha_k}e^{-\psi}\Big] \overset{(2.2)}{=}$$

$$\Big(\delta_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big)\overline{\alpha}_k e^{-\psi} + \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big)\overline{\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\alpha_k\Big)}e^{-\psi} + \alpha_j\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\delta_k\alpha_k}e^{-\psi} + (\delta_j\alpha_j)(\overline{\delta_k\alpha_k})e^{-\psi}.$$

Zatem
$$\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_j\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\delta_k\alpha_k e^{-\psi}} \overset{(2.1)}{=} -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha e^{-\psi}} = -\alpha\cdot\overline{\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha}e^{-\psi}$$

również

$$\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j)\overline{\alpha}_k e^{-\psi} \overset{(2.4)}{=} \sum_{j,k=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\delta_j\alpha_j)\overline{\alpha}_k e^{-\psi} + \sum_{j,k=1}^{n}\psi_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} \overset{(2.1)}{=}$$

$$-\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha\cdot\overline{\alpha}e^{-\psi} + \sum_{j,k=1}^{n}\psi_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}$$

Zaobserwujmy teraz, że

$$\sum_{j,k=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big)\overline{\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\alpha_k\Big)} = -|\,\overline{\partial}\,\alpha|^2 + \sum_{j,k=1}^{n}\Big|\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\alpha_k\Big|^2,$$

jest to bezposrednią konsekwencją postaci $|\,\overline{\partial}\,\alpha|^2$ (patrz rozdział „Oznaczenia i konwencje").Również

$$\sum_{j,k=1}^{n}\delta_j\alpha_j\overline{\delta_k\alpha_k} = \Big(-\sum_{j=1}^{n}\delta_j\alpha_j\Big)\overline{\Big(-\sum_{k=1}^{n}\delta_k\alpha_k\Big)} \overset{(2.1)}{=} |\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha|^2.$$

Po zsumowaniu dostajemy

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial \overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) = \sum_{j,k=1}^{n}\psi_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} + |\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha|^2 e^{-\psi} + \sum_{j,k=1}^{n}\Big|\frac{\partial\,\alpha_j}{\partial \overline{z}_k}\Big|^2 e^{-\psi} -$$

$$-2Re\,\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*_{\psi}\,\alpha\cdot\overline{\alpha}e^{-\psi} - |\,\overline{\partial}\,\alpha|^2 e^{-\psi}.$$

Lemat 2.4.2 *Jeżeli D jest obszarem o gładkim brzegu z funkcją definiującą ρ i ψ jest jak powyżej, α jest daną gładką $(0,1)$-formą, spełniającą warunki brzegowe $\overline{\partial}$-Neumanna, a w będzie funkcją, która jest gładka na pewnym otoczeniu ∂D, lub da się aproksymować w $L^2(D,\psi)$ takimi funkcjami, to*

$$\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \psi_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} - \int_D \sum_{j,k=1}^{n} w_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} + \int_D w|\overline{\partial}_\psi^* \alpha|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n}$$

$$+\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \left|\frac{\partial\,\alpha_j}{\partial\,\overline{z}_k}\right|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n} + \int_{\partial D} w \sum_{j,k=1}^{n} \rho_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}\frac{d\sigma^{2n-1}}{|\partial\,\rho|}$$

$$= 2Re \int_D w\,\overline{\partial}\,\overline{\partial}_\psi^* \alpha\cdot\overline{\alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n} + \int_D w|\,\overline{\partial}\,\alpha|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n},$$

gdzie $d\sigma^{2n-1}$ oznacza powierzchniową miarę Lebesgue'a na brzegu obszaru D.

Dowód: Oczywiście jest to postać całkowa wzoru z lematu 2.4.1, istotnie pojawiły się dwa nowe składniki, a zniknął spodziewany składnik $\int_D \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\,z_j\,\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n}$. Zatem dowód sprowadza się do wykazania równości

$$\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\,z_j\,\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n} = \int_D \sum_{j,k=1}^{n} w_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} - \int_{\partial D} w \sum_{j,k=1}^{n} \rho_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}\frac{d\sigma^{2n-1}}{|\partial\,\rho|}.$$

Rozpatrzmy lewą stronę. Twierdzenie Stokesa (a dokładniej Twierdzenie o całkowaniu przez części, zobacz Twierdzenie 2.1.20), po zsumowaniu daje nam

$$\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\,z_j\,\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n} =$$

$$-\int_D \sum_{j,k=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n} + \int_{\partial D} w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi})\overrightarrow{n_j} d\sigma^{2n-1}.$$

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części jeszcze raz dostajemy

$$\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\,z_j\,\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n} = \int_D \sum_{j,k=1}^{n} w_{j\overline{k}}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} +$$

$$+\int_{\partial D} \sum_{j,k=1}^{n} w_j(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi})\overrightarrow{\overline{n_k}} d\sigma^{2n-1} + \int_{\partial D} w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\,\overline{z}_k}(\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi})\overrightarrow{n_j} d\sigma^{2n-1}$$

Z postaci obszaru D i definicji funkcji ρ wynika, że

$$\overrightarrow{n_j} = \frac{\frac{\partial}{\partial\,z_j}\rho}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\,z_j}\rho\right)^2}} = \frac{\rho_j}{|\,\partial\,\rho|}.$$

Po podstawieniu dostajemy

$$\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \, \partial \overline{z}_k}(\alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n} = \int_D \sum_{j,k=1}^{n} w_{j\overline{k}} \alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} +$$

$$+ \int_{\partial D} \sum_{j,k=1}^{n} w_j \alpha_j \overline{\alpha}_k \overline{\rho}_k e^{-\psi} \frac{d\sigma^{2n-1}}{|\,\partial \rho|} + \int_{\partial D} w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}(\alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi}) \rho_j \frac{d\sigma^{2n-1}}{|\,\partial \rho|}. \tag{2.5}$$

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \rho_j$, z warunku brzegowego $\overline{\partial}$-Neumanna zeruje się na brzegu obszaru, co daje nam zerownie się pierwszej całki powierzchniowej we wzorze (2.5) Co do drugiej zauważmy, że $\frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \rho_j}{\rho}$ przedłuża się do funkcji gładkiej na otoczeniu ∂D (ρ- jest funkcją definiującą a więc krotność zera na brzegu wynosi jeden).

$$\sum_{j,k=1}^{n} \rho_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}(\alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi})_{|\,\partial D} \overset{(2.3)}{=} \sum_{j,k=1}^{n} \rho_j \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big)\overline{\alpha}_k e^{-\psi} + \alpha_j \overline{\delta_k \alpha_k} e^{-\psi}\Big]_{|\,\partial D} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big) \rho_j e^{-\psi}{}_{|\,\partial D}$$

Warunek brzegowy $\overline{\partial}$-Neumanna daje nam co do ostatniej sumy

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \rho_j\Big)_{|\,\partial D} = 0 \Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \rho_j \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\alpha_j\Big)_{|\,\partial D} = -\sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \alpha_j \rho_{j\overline{k}}{}_{|\,\partial D},$$

co ostatecznie daje nam

$$\int_D w \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \, \partial \overline{z}_k}(\alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi}) d\lambda^{2n} = \int_D \sum_{j,k=1}^{n} w_{j\overline{k}} \alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} - \int_{\partial D} w \sum_{j,k=1}^{n} \rho_{j\overline{k}} \alpha_j \overline{\alpha}_k e^{-\psi} \frac{d\sigma^{2n-1}}{|\,\partial \rho|}.$$

Reszta składników nie budzi wątpliwości. Dla funkcji aproksymowalnych wniosek jest natychmiastowy, z tym, że $w_{j\overline{k}}$ jest prądem, korzystamy tu z Twierdzenia 2.1.19.

3 Krótkie wprowadzenie do teorii Hörmandera i metod operatora $\overline{\partial}$

Zanim skoncentrujemy się na własnościach operatora $\overline{\partial}$, wprowadzonego w preliminariach, odnotujmy, że możemy jego definicję rozumieć dwojako: możemy ograniczyć dziedzinę $\overline{\partial}$ wyłącznie do funkcji (form) różniczkowalnych, na dodatek takich aby ich obraz należał do przestrzeni docelowej, lub, ponieważ mamy zawieranie $L^2 \subset L^2_{loc} \subset L^1_{loc}$, możemy różniczkowania rozumieć w sensie dystrybucyjnym, a dziedzina składać się będzie z tych funkcji (form) dla których prąd, który jest ich obrazem ma swojego reprezentanta w przestrzeni docelowej. (Inaczej mówiąc miary, które są współczynnikami otrzymanego prądu dadzą się wyrazić jako $fd\lambda^{\dim_{\mathbb{R}} D}$, gdzie f należy do docelowej przestrzeni L^2 z wagą). W obu przypadkach operator $\overline{\partial}$ jest gęsto określony, co wynika z faktu, że funkcje (formy) gładkie o zwartym supporcie są gęste w L^2 z wagą, o ile waga jest ciągła. W obu więc przypadkach możemy mówić o operatorze sprzężonym ($\overline{\partial}^*_\psi$-sprzężony). Możemy też, z naruszeniem konwencji, rozpatrywać w obu przypadkach $\overline{\partial}$ jako operator działający formalnie na funkcjach (formach) (wartości operatora $\overline{\partial}$ niekoniecznie należą do przestrzeni docelowej, może się zdażyć, że $\int_D |\overline{\partial} f|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n} = \infty$). Tak więc, dla operatora formalnego $\overline{\partial}$ rozumianego w pierwszym sensie, dziedziną byłyby wszystkie funkcje (formy) różniczkowalne, natomiast jeżeli rozpatrujemy drugą sytuację, dziedziną byłaby cała przestrzeń L^2 z wagą. Możemy też rozpatrywać operatory formalnie sprzężone (zdefiniowane na formach gładkich o zwartym supporcie, zobacz rozdział „Oznaczenia i konwencje"). Bardzo cenne są równości

$$\overline{\partial}\text{ −formalny, w sensie dystrybucyjnym}|_{\mathrm{Dom}\,\overline{\partial}\text{ − w sensie dystrybucyjnym}} = \overline{\partial}\text{ −w sensie dystrybucyjnym}$$

$$\overline{\partial}\text{ −formalny, w sensie zwykłym}|_{\mathrm{Dom}\,\overline{\partial}\text{ − w sensie zwykłym}} = \overline{\partial}\text{ −w sensie zwykłym}$$

$$\overline{\partial}\text{ − w sensie dystrybucyjnym}|_{\mathrm{Dom}\,\overline{\partial}\text{ − w sensie zwykłym}} = \overline{\partial}\text{ −w sensie zwykłym}$$

$$\overline{\partial}^*_\psi\text{ −sprzężony zwykły}|_{\text{formy o współczynnikach z }\mathcal{C}^\infty_o} = \overline{\partial}^*_\psi\text{ −formalnie sprzężony}$$

Dzięki tym równościom możemy się ograniczyć do badania formalnego operatora $\overline{\partial}$ rozumianego w sensie dystrybucyjnym, a należenie do któregoś zawężenia będzie kwestią oszacowań normy lub (i) gładkości funkcji (formy) na której działamy operatorem. To samo uczynimy z operatorem $\overline{\partial}^*_\psi$. Oczywiście $\overline{\partial}$ w sensie dystrybucyjnym i $\overline{\partial}^*_\psi$ są operatorami domkniętymi (zob. Definicja 2.2.1). Metoda operatora $\overline{\partial}$ zbudowana jest na obserwacji, że rozwiązywalność układu liniowego równań różniczkowych ($\overline{\partial} f = \alpha$ daje nam układ $\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\Big) f = \alpha_k, k = 1,..,n$) sprowadza się do wykazania pewnego oszacowania. Pomysł ten jako pierwsi zaproponowali Garabedian i Spencer. Początkowo były problemy z realizacją tej idei w praktyce. Wiele ważnych wyników zostało uzyskanych przez Kohna. Wkład Hörmandera do tej teorii polega na wprowadzeniu do rozważań przestrzeni z wagami. Okazuje się bowiem, że możliwość dobierania odpowiednich wag w przestrzeniach L^2 stanowi klucz do rozwiązania wielu ważnych problemów.

Podstawą dalszych rozważań jest następujący lemat z [H].

Lemat 3.0.3 *Niech T będzie liniowym, domkniętym i gęsto określonym operatorem między przestrzeniami Hilberta H_1 i H_2. Niech F będzie domkniętą podprzestrzenią H_2, zawierającą ImT. Wtedy $ImT = F$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała C taka, że dla każdego $f \in F \cap DomT^*$ zachodzi nierówność*

$$\|f\|_{H_2} \leq C\|T^* f\|_{H_1}$$

Dowód: Jeżeli obraz T równa się F, to z twierdzenia Banacha o odwzorowaniu odwrotnym (zob. Twierdzenie 2.2.5) wynika, że dla każdego $g \in F$ znajdziemy $u \in \mathrm{Dom}T$ takie, że $Tu = g$ i $\|u\|_{H_1} \leq C\|g\|_{H_2}$, dla jakiejś uniwersalnej stałej C. Jedynym (drobnym) problemem jest to, czy $\mathrm{Im}T$ jest przestrzenią Hilberta. Wynika to z domkniętości F. Odwrotnie, gdy $f \in F \cap \mathrm{Dom}T^*$ dostajemy

$$|\langle f, g\rangle_{H_2}| = |\langle f, Tu\rangle_{H_2}| = |\langle T^* f, u\rangle_{H_1}| \leq \|T^* f\|_{H_1} C\|g\|_{H_2},$$

z nierówności Schwarza (Twierdzenie 2.2.2). (Teraz wystarczy wstawić f za g i dostajemy konieczność warunku).

W drugą stronę, jeżeli $g \in F \supset \mathrm{Im}T$, to

$$g \in \mathrm{Im}T \Leftrightarrow \exists u : \forall f \in \mathrm{Dom}T^*,\ \langle u, T^* f\rangle_{H_1} = \langle g, f\rangle_{H_2}.$$

Z danych w lemacie i z nierówności Schwarza dostajemy

$$|\langle f, g\rangle_{H_2}| \leq \|T^* f\|_{H_1} C \|g\|_{H_2},$$

jeżeli $f \in F \cap \mathrm{Dom}T^*$. Z domkniętości F mamy przedstawienie $H_2 = F \oplus F^{\perp_{H_2}}$. Jeżeli $h \in F^{\perp}$, to $\langle g, h\rangle_{H_2} = 0$ i $T^* h = 0$, co daje nam, że nierówność

$$|\langle f, g\rangle_{H_2}| \leq \|T^* f\|_{H_1} C \|g\|_{H_2},$$

jest trywialnie spełniona również dla $f \in \mathrm{Dom}T^* \setminus F$ (rozkładamy $f = f_1 + h$, $f \in F,\ h \in F^{\perp_{H_2}}$). Ozancza to, że odwzorowanie antyliniowe $\mathrm{Im}T^* \to \mathbb{C}$, zdefinowane na elemencie $T^* f$ jako $T^* f \to \langle g, f\rangle_{H_2}$, przedłuża się, na mocy twierdzenia Hahna-Banacha (Twierdzenie 2.2.3) do odwzorowania antyliniowego na całym H_1, a zatem z twierdzenia Riesza (zobacz Twierdzenie 2.2.9) wynkia, że istnieje element u taki, że odwzorowanie to ma postać $\cdot \to \langle u, \cdot\rangle_{H_1}$ i

$$\|u\|_{H_1} = \|\cdot \to \langle u, \cdot\rangle_{H_1}\| = \|T^* f \to \langle g, f\rangle_{H_2}\| \leq C \|g\|_{H_2},$$

przy czym na podprzestrzeni $\mathrm{Im}T^*$ mamy

$$\langle g, f\rangle_{H_2} = \langle u, T^* f\rangle_{H_1}, f \in \mathrm{Dom}T^*.$$

To oznacza, że $g = Tf$, a zatem mamy inkluzję $F \subset \mathrm{Im}T$, a więc zachodzi równość.

W naszym przypadku F będzie przestrzenią $(0,1)$- form, zerowanych przez operator $\overline{\partial}$, (tzn. $\mathrm{Ker}\,\overline{\partial}$). Jest to podprzestrzeń domknięta $L^2_{(0,1)}(D, \psi)$, gdze ψ jest gładka, bo $\overline{\partial}$ jest przy tych założeniach operatorem domkniętym (zobacz Definicję 2.2.1). Rozpatrzmy sytuację gdy dla każdego elementu $f \in L^2_{(0,1)}(D, \varphi_2)$, dla którego $\overline{\partial} f = 0$ istnieje element $u \in L^2(D, \varphi_1), \overline{\partial} u = f$. Zgodnie z Lematem 3.0.3 jest to równoważne z istnieniem stałej C takiej, że

$$\|f\|_{L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)} \leq C \|T^* f\|_{L^2(D,\varphi_1)},\ f \in \mathrm{Dom}T^* : \overline{\partial} f = 0.$$

W istocie wykażemy nierówność mocniejszą

$$\|f\|^2_{L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)} \leq C^2 (\| \overline{\partial}^*_{\varphi_2 \varphi_1} f\|^2_{L^2(D,\varphi_1)} + \| \overline{\partial} f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}),$$

gdzie wagi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, będą ciągłe. Będzie to rdzeniem dowodu podstawowego twierdzenia w tym rozdziale (3.0.5). Zanim przejdziemy do dowodu oszacowania Hörmandera dokonamy pewnej redukcji.

Lemat 3.0.4 *Jeżeli istnieje ciąg* $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}, \chi_j \in \mathcal{C}^{\infty}_o$*, funkcji o supporcie zwartym o wartościach w przedziale* $[0,1]$ *taki, że dla każdego zwartego zbioru* K *w* D $\exists j_0 : \forall j \geq j_0,\ \chi_{j|K} = 1$*. Jeżeli dodatkowo*

$$e^{-\varphi_2} |\overline{\partial} \chi_j|^2 \leq C e^{-\varphi_1},\quad e^{-\varphi_3} |\overline{\partial} \chi_j|^2 \leq C e^{-\varphi_2}, j = 1, 2, ..., \tag{3.1}$$

gdzie C jest uniwersalną stałą, to $(0,1)$- formy gładkie o supporcie zwartym są gęste w $Dom\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} \cap Dom\,\overline{\partial}$, w topologii, zadanej przez następującą normę:

$$\|f\|_{graph} = \|f\|_{L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)} + \|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|_{L^2(D,\varphi_1)} + \|\,\overline{\partial}\, f\|_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}$$

Dowód:Przede wszystkim zauważmy, że

$$\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}(\chi_j f) = \sum_{k=1}^{n} -e^{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial z_k}(\chi_j f_k e^{-\varphi_2}) = \sum_{k=1}^{n} -e^{\varphi_1}\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\chi_j\Big) f_k e^{-\varphi_2} + \sum_{k=1}^{n} -e^{\varphi_1}\chi_j\frac{\partial}{\partial z_k}(f_k e^{-\varphi_2})$$

$$= -e^{\varphi_1-\varphi_2}\,\partial\,\chi_j \cdot f + \chi_j\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f. \tag{3.2}$$

Niech $f \in \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} \cap \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}$ i niech $f_j := \chi_j f$. Oczywiście ze względu na zwarty support i ciągłość wag, $f_j \in \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} \cap \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}$. Oczywiście $f_j \to f$ w topologii $L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)$, ze względu na ciągłość całki względem zbioru. Podobnie

$$\chi_j\,\overline{\partial}\, f \to \overline{\partial}\, f\ (\mathrm{w}L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3))\ i\ \ \chi_j\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f \to \overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\ (\mathrm{w}L^2(D,\varphi_1))$$

Konkretnie

$$\|\,\overline{\partial}\, f_j - \chi_j\,\overline{\partial}\, f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)} = \|(\overline{\partial}\,\chi_j)\wedge f + \chi_j\,\overline{\partial}\, f - \chi_j\,\overline{\partial}\, f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}$$

$$\overset{2.2.2}{\leq} \int_D |f|^2|\,\overline{\partial}\,\chi_j|^2 e^{-\varphi_3} d\lambda^{2n} \overset{(3.1)}{\leq} C\int_D |f|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda^{2n},$$

oraz

$$\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f_j - \chi_j\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|^2_{L^2(D,\varphi_1)} \overset{(3.2)}{=} \|-e^{\varphi_1-\varphi_2}\,\partial\,\chi\cdot f + \chi_j\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f - \chi_j\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|^2_{L^2(D,\varphi_1)}$$

$$\overset{2.2.2}{\leq} \int_D |f|^2|\,\overline{\partial}\,\chi_j|^2 e^{\varphi_1-2\varphi_2} d\lambda^{2n} \overset{(3.1)}{\leq} C\int_D |f|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda^{2n}.$$

Wyrażenia pod znakiem normy są w obu przypadkach ograniczone niezależnie od j, punktowo dążą do 0, więc z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki dostajemy

$$\|\,\overline{\partial}\, f_j - \chi_j\,\overline{\partial}\, f\|_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)} \to 0, \quad \|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f_j - \chi_j\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|_{L^2(D,\varphi_1)} \to 0.$$

Stąd wynika, że f_j dąży do f we wszystkich trzech normach oddzielnie, a więc także w normie która jest ich sumą. Formę f możemy aproksymować formami o supporcie zwartym, a te formy standardowo aproksymuje się formami gładkimi o supportach zwartych (zobacz Twierdzenie 2.1.19).

Twierdzenie 3.0.5 (Oszacowanie Hörmandera) *Niech D będzie obszarem pseudowypukłym w $\mathbb{C}^n$ i niech $\varphi \in \mathcal{C}^2(D)$, będzie funkją ściśle plurisubharmoniczną taką, że*

$$c(z)\sum_{j=1}^{n}|X_j|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\,\varphi(z)}{\partial\, z_j\,\partial\,\overline{z}_k}X_j\overline{X}_k, z\in D, X\in\mathbb{C}^n, \tag{3.3}$$

gdzie c jest dodatnią, ciągłą funkją na D. Jeżeli $g \in L^2_{(0,1),loc}(D)$ i $\overline{\partial}\, g = 0$ w sensie dystrybucyjnym, to istnieje $u \in L^2(D,\varphi), \overline{\partial}\, u = g$ i zachodzi następująca nierówność:

$$\int_D |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda^{2n} \leq \int_D \frac{|g|^2}{c} e^{-\varphi} d\lambda^{2n},$$

o ile prawa strona nierówności jest skończona.

Zauważmy, że twierdzenie to niesie dwie istotne treści: że problem $\overline{\partial}$ przy takich założeniach zawsze ma rozwiązanie, oraz oszacowanie na normę rozwiązania.

Dowód: Pierwszym krokiem w dowodzie będzie skonstruowanie odpowiednich ciągłych wag $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ takich, aby spełniały założenia Lematu 3.0.4.

Z pseudowypukłości i Lematu 2.1.11 wynika istnienie gładkiej i ściśle plurisubharmonicznej funkcji wyczerpującej η. $D_a := \{\eta < a\}$, jest podzbiorem relatywnie zwartym w D. Stąd, ustalając a, możemy wybrać $\psi \in \mathcal{C}^1(D) : \psi_{|D_{a+1}} \equiv 0$ i $e^{-\psi}c$ jest funkcją ograniczoną na D. Szukając ciągu χ_j, spełniającego założenia Lematu 3.0.4, zauważmy, że skoro supporty funkcji $\chi_j - 1$ mają wyczerpywać D, to z góry możemy założyć, że $\chi_{j|D_{a+2}} \equiv 1,\ \forall j$. Możemy też założyć, że

$$|\,\overline{\partial}\,\chi_j|^2 \leq Ce^{\psi}, \tag{3.4}$$

dla stałej C niezależnej od j. Wybierzmy wypukłą funkcję $\kappa \geq 0$, klasy $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ taką, że $\kappa_{|(-\infty,a)} = 0$ (dla naszego ustalonego a), $\kappa(\eta) \geq 2\psi$, oraz dla pewnego ustalonego ε

$$\kappa'(\eta) \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\,\eta(z)}{\partial\, z_j\, \partial\, \overline{z}_k} X_j \overline{X}_k \geq \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big) |\,\partial\,\psi|^2 \sum_{j=1}^{n} |X_j|^2,\ \forall z \in D,\ \forall X \in \mathbb{C}^n. \tag{3.5}$$

Definiujemy

$$\varphi_1 := \varphi + \kappa(\eta) - 2\psi,\ \varphi_2 := \varphi + \kappa(\eta) - \psi,\ \varphi_3 := \varphi + \kappa(\eta).$$

Ze względu na ciągłość składników w sumach, funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ są ciągłe. Mamy

$$e^{-\varphi_2}|\,\overline{\partial}\,\chi_j|^2 \overset{(3.4)}{\leq} e^{-\varphi-\kappa(\eta)+\psi} Ce^{\psi} = e^{-\varphi_1}$$

i

$$e^{-\varphi_3}|\,\overline{\partial}\,\chi_j|^2 \overset{(3.4)}{\leq} e^{-\varphi-\kappa(\eta)} Ce^{\psi} = e^{-\varphi_2}.$$

Zatem przy tak wybranych wagach $\mathcal{C}^\infty_{(0,1)o}$ są gęste w Dom $\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} \cap$Dom $\overline{\partial}$ w normie $\|\cdot\|_{graph}$, a więc drugi krok, jakim będzie wykazanie nierówności

$$\|f\|^2_{L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)} \leq C^2(\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|^2_{L^2(D,\varphi_1)} + \|\,\overline{\partial}\, f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}),\ f \in \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} \cap \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}, \tag{3.6}$$

sprowadza się do wykazania tej nierówności dla $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,1)o}$. Zauważmy też, że warunek $\kappa(\eta) \geq 2\psi$, nałożony na początku dowodu na funkcję κ daje nam

$$\varphi_2 - \varphi - \psi = \varphi + \kappa(\eta) - \psi - \varphi - \psi \geq 0. \tag{3.7}$$

Operator $\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}$ działa według wzoru:

$$\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f = -e^{\varphi+\kappa(\eta)-2\psi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi+\psi-\kappa(\eta)} f_j)$$

(zobacz rozdział „Oznaczenia i konwencje”). Wprowadźmy pomocniczy operator

$$\delta_j g := e^{\varphi+\kappa(\eta)} \frac{\partial}{\partial z_j}(g e^{-\varphi-\kappa(\eta)})$$

Jest to analogon operatora δ_j wprowadzonego w Lemacie 2.4.1, z uwzględnieniem faktu, że mamy w tej sytuacji inne wagi. Odnotujmy ważną własność operatora δ_j. Niech $u, v \in L^2(D, \varphi + \kappa(\eta))$, będą gładkimi funkcjami o supportach zwartych. Wtedy

$$\langle \delta_j u, v\rangle_{L^2(D,\varphi+\kappa(\eta))} = \int_D e^{\varphi+\kappa(\eta)} \frac{\partial}{\partial z_j}(u e^{-\varphi-\kappa(\eta)}) \overline{v} e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} = \int_D \frac{\partial}{\partial z_j}(u e^{-\varphi-\kappa(\eta)}) \overline{v} d\lambda^{2n}$$

$$\overset{2.1.20}{=} -\int_D u e^{-\varphi-\kappa(\eta)} \frac{\partial}{\partial z_j} \overline{v} d\lambda^{2n} = -\int_D u \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} v} e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} = \langle u, -\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} v\rangle_{L^2(D,\varphi+\kappa(\eta))}. \tag{3.8}$$

Oczywiście

$$e^{\psi}\, \overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f = -\,\partial\,\psi \cdot f - \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_j.$$

Stąd dostajemy, że

$$\int_D \Big| \sum_{j=1}^{n} \delta_j f_j \Big|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} = \int_D |e^{\psi}\, \overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f + \partial\,\psi \cdot f|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} =$$

$$= \int_D |\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f|^2 e^{2\psi-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} + \int_D |\,\partial\,\psi \cdot f|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} +$$

$$+ \int_D 2Re(e^{\psi}(\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f) \overline{\partial\,\psi \cdot f}) e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n}.$$

Z nierówności Schwarza i elementarnej nierówności $2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$

$$\le \int_D |\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda^{2n} + \int_D |\,\partial\,\psi \cdot f|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} +$$

$$+\varepsilon \int_D |\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda^{2n} + \frac{1}{\varepsilon} \int_D |\,\partial\,\psi \cdot f|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n},$$

gdzie ε jest tym samym ε, które ustaliliśmy przy definicji κ.

$$|\,\overline{\partial}\, f|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \Big| \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} \Big|^2$$

Współczynnik $\frac{1}{2}$ pojawia się dlatego, że sumujemy po wszystkich j i k, a nie tylko po rosnących wskaźnikach

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \Big|\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k}\Big|^2 - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k}\overline{\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}} \tag{3.9}$$

$$\int_D \frac{\partial^2(\varphi+\kappa(\eta))}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_j \overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} \overset{(2.4)}{=} \int_D \Big(\Big[\delta_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\delta_j\Big] f_j\Big)\overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} =$$

$$= \int_D \Big[(\delta_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} f_j)\overline{f}_k - (\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\delta_j f_j)\overline{f}_k\Big] e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} = \langle \delta_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} f_j, f_k\rangle_{L^2(D,\varphi+\kappa(\eta))} +$$

$$+\langle -\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\delta_j f_j, f_k\rangle_{L^2(D,\varphi+\kappa(\eta))} \overset{(3.8)}{=} \langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} f_j, -\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} f_k\rangle_{L^2(D,\varphi+\kappa(\eta))} + \langle \delta_j f_j, \delta_k f_k\rangle_{L^2(D,\varphi+\kappa(\eta))} =$$

$$= \int_D \Big(\delta_j f_j \overline{\delta_k f_k} - \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k}\overline{\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}}\Big) e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n}.$$

Sumując te nierówności po j i po k dostajemy

$$\int_D \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2(\varphi+\kappa(\eta))}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_j \overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} \overset{(3.9)}{\leq} \int_D \Big|\sum_{j=1}^{n} \delta_j f_j\Big|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} + \int_D |\,\overline{\partial} f|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n}$$

$$\leq (1+\varepsilon)\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|_{L^2(D,\varphi_1)} + (1+\frac{1}{\varepsilon})\int_D |f|^2 |\,\partial\psi|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} + \|\,\overline{\partial} f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}.$$

Ścisła plurisubharmoniczność φ (3.3) daje nam

$$\|\,\overline{\partial} f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)} + (1+\varepsilon)\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1} f\|_{L^2(D,\varphi_1)} \geq \int_D (c - (1+\frac{1}{\varepsilon})|\,\partial\psi|^2)|f|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} +$$

$$+\int_D \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \kappa(\eta)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_j \overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n}$$

Ostatnią całkę możemy oszacować od dołu

$$\int_D \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \kappa(\eta)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_j \overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} = \int_D \kappa''(\eta)\Big|\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\Big|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} +$$

$$+\int_D \kappa'(\eta) \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_j \overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n}$$

W założeniach na funkcję κ mamy (3.5)

$$\kappa'(\eta) \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} X_j \overline{X}_k \geq (1+\frac{1}{\varepsilon})|\,\partial\psi|^2 \sum_{j=1}^{n} |X_j|^2$$

po podstawieniu $X_j = f_j$ i oszacowaniu dostajemy

$$\int_D \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \kappa(\eta)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_j \overline{f}_k e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n} \geq \int_D (1+\frac{1}{\varepsilon})|\,\partial\psi|^2 \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 e^{-\varphi-\kappa(\eta)} d\lambda^{2n}$$

Ostatecznie

$$\int_D c|\,\partial\,\psi|^2|f|^2e^{-\varphi-\kappa(\eta)}d\lambda^{2n}=\int_D\Big(c-(1+\frac{1}{\varepsilon})|\,\partial\,\psi|^2+(1+\frac{1}{\varepsilon})|\,\partial\,\psi|^2\Big)|f|^2e^{-\varphi-\kappa(\eta)}d\lambda^{2n}\leq$$

$$\leq\|\,\overline{\partial}\,f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}+(1+\varepsilon)\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}f\|^2_{L^2(D,\varphi_1)},$$

gdy f jest formą gładką o supporcie zwartym, a zatem z Lematu 3.0.4 dla każdego

$$f\in\operatorname{Dom}\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}\cap\operatorname{Dom}\overline{\partial}\,.$$

W założeniach na g mamy, że

$$g\in L^2_{(0,1)loc}(D),\ \overline{\partial}\,g=0,\ g\in L^2_{(0,1)}(D,\varphi+\log(c))$$

Stąd mamy

$$\int_D|g|^2e^{-\varphi_2}d\lambda^{2n}\overset{(3.7)}{\leq}\int_D|g|^2\frac{e^{-\varphi}}{c}ce^{-\psi}d\lambda^{2n}$$

Z ograniczoności $ce^{-\psi}$ i z $g\in L^2_{(0,1)}(D,\varphi+\log(c))$ dostajemy, że $g\in L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)$.

$$|\langle g,f\rangle_{L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)}|^2=\Big|\int_D(g_1\overline{f}_1+g_2\overline{f}_2+...+g_n\overline{f}_n)e^{-\varphi_2}d\lambda^{2n}\Big|^2\leq$$

$$\leq\Big(\int_D|g_1\overline{f}_1+g_2\overline{f}_2+...+g_n\overline{f}_n|\frac{e^{-\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{c}}\sqrt{c}e^{-\varphi_2+\frac{\varphi}{2}}d\lambda^{2n}\Big)^2\overset{Tw.2.2.2}{\leq}\int_D|g|^2\frac{e^{-\varphi}}{c}d\lambda^{2n}\int_D c|f|^2e^{-2\varphi_2+\varphi}d\lambda^{2n}$$

Wagę w drugiej całce możemy oszacować

$$-2\varphi_2+\varphi=-\varphi_2-\varphi-\kappa(\eta)+\psi+\varphi\overset{(3.7)}{\leq}-\psi-\varphi-\varphi-\kappa(\eta)+\psi+\varphi=-\varphi-\kappa(\eta).$$

Stąd szacując dalej

$$\leq\int_D|g|^2\frac{e^{-\varphi}}{c}d\lambda^{2n}\int_D c|f|^2e^{-\varphi-\kappa(\eta)}d\lambda^{2n}\leq$$

$$\leq\Big(\|\,\overline{\partial}\,f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}+(1+\varepsilon)\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}f\|^2_{L^2(D,\varphi_1)}\Big)\int_D|g|^2\frac{e^{-\varphi}}{c}d\lambda^{2n}.$$

Gdy $f\in\operatorname{Dom}\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}$ udowodnimy, że

$$|\langle g,f\rangle_{L^2_{(0,1)}(D,\varphi_2)}|^2\leq(1+\varepsilon)\|\,\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}f\|_{L^2(D,\varphi_1)}\int_D|g|^2\frac{e^{-\varphi}}{c}d\lambda^{2n},$$

czyli, że możemy się pozbyć czynnika $\|\,\overline{\partial}\,f\|^2_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}$. Najpierw rozpatrzmy sytuację gdy $f\in\operatorname{Dom}\overline{\partial}$, $\overline{\partial}\,f=0$. Jest to treścią przed chwilą udowodnionego oszacowania. Gdy $f\perp\operatorname{Ker}\overline{\partial}$, to $\langle g,f\rangle_{L^2_{(0,2)}(D,\varphi_3)}=0$, ponieważ $\overline{\partial}\,g=0$, czym dokonaliśmy przejścia z $\operatorname{Dom}\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}\cap\operatorname{Ker}\overline{\partial}$ na $\operatorname{Dom}\overline{\partial}^*_{\varphi_2\varphi_1}$.

W trzecim kroku wykorzystamy słabą zbieżność. Z Lematu 3.0.3 istnieje więc element $u_a \in L^2(D, \varphi_1)$ (rozwiązanie problemu $\overline{\partial} u_a = g$), zależny od a, które ustaliliśmy na początku dowodu, oraz od ε taki, że

$$\int_D |u_a|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda^{2n} \leq (1+\varepsilon) \int_D |g|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c} d\lambda^{2n}.$$

$\varphi_1 = \varphi + \kappa(\eta) - 2\psi$, co z własności funkcji κ, oraz z zerowania się ψ na D_{a+1} daje nam $\varphi_{1|D_{a+1}} = \varphi$. Z twierdzenia Eberleina (zobacz Twierdzenie 2.2.13) możemy wybrać ciągi $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\varepsilon_j \searrow 0$ i $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, $a_j \nearrow \infty$ takie, że u_{a_j} jest słabo zbieżny w $L^2(D_a)$, dla każdego a, do granicy u. (Istotne jest tu, że waga jest ciągła, a więc przy D_a zwartym, zawartym w D, zbiory $L^2(D_a)$ i $L^2(D_a, \varphi)$ pokrywają się). Treścią rozdziału **3.1** jest fakt, że $\overline{\partial} u = g$ w całym D. Dla każdego a graniczna funkcja u będzie spełniać nierówność

$$\int_{D_a} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda^{2n} \leq \int_D |g|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c} d\lambda^{2n}.$$

Stąd też

$$\int_D |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda^{2n} \leq \int_D |g|^2 \frac{e^{-\varphi}}{c} d\lambda^{2n}.$$

Nieco prościej dowodzi się oszacowania słabszego niż oszacowanie Hörmandera, w którym dodatkowo prawa strona nierówności jest pomnożona przez 2.

Istnieje wiele wersji oszacowania Hörmandera. Szczególnie przydatna w zastosowaniach jest następująca (zobacz [D1] lub [Be2]).

Twierdzenie 3.0.6 *Niech φ będzie ściśle plurisubharmoniczną funkcją klasy $\mathcal{C}^2$ na ograniczonym obszarze pseudowypukłym D. Niech $g \in L^2_{(0,1),loc}(D)$ będzie $\overline{\partial}$ zamkniętą formą. Wtedy istnieje $u \in L^2_{loc}(D)$ taka, że $\overline{\partial} u = g$ i*

$$\int_D |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda^{2n} \leq \int_D |g|^2_{i\partial\overline{\partial}\varphi} e^{-\varphi} d\lambda^{2n},$$

gdzie $|g|^2_{i\partial\overline{\partial}\varphi}$ oznacza $\sum_{j,k=1}^n \varphi^{j,k} g_j \overline{g}_k$, gdzie $\varphi^{j,k}$ to macierz odwrotna do $\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right]_{j,k=1,..,n}$.

Ogólniejszą wersję, bez dodatkowych założeń na plurisubharmoniczną funkcję φ można znaleźć np. w [Bl1] lub [Bl2]. Wersja ta ma znaczenie np. w problemach związanych z metryką Bergmana (zobacz np. [Bl2]), prawa strona nierówności to norma formy g względem metryki kählerowskiej $i\partial\overline{\partial}\varphi$.

Dowód: $|g|^2_{i\partial\overline{\partial}\varphi}$ jest najmniejszą funkcją h taką, że $i\overline{g} \wedge g \leq hi\partial\overline{\partial}\varphi$ jako nierówność prądów. Stąd oszacowanie sprowadza się do wykazania, że

$$\int_D |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda^{2n} \leq \int_D |h|^2 e^{-\varphi} d\lambda^{2n},$$

dla każdego h takiego, że $i\overline{g} \wedge g \leq hi\partial\overline{\partial}\varphi$. Dalej dowód w dużej mierze powtarza dowód Twierdzenia 3.0.5. Teraz funkcję κ musimy wybrać tak, aby

$$\kappa'(\eta) i\partial\overline{\partial}\eta \geq (1+\frac{1}{\varepsilon})|\partial\psi|^2 i\partial\overline{\partial}|z|^2.$$

Reszta dowodu to mechaniczne powtórzenie rozumowań z uwzględnieniem nowej funkcji κ.

Twierdzenie 3.0.7 *Niech ψ będzie funkcją gładką. Jeżeli g jest $\overline{\partial}$-zamkniętym $(0,1)$-prądem, zdefiniowanym w pewnym otoczeniu $\overline{D}$ i u jest L^1 funkcją na D taką, że*

$$\int_D g \cdot \overline{\alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n} = \int_D u \overline{\overline{\partial}_\psi^* \alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n} \tag{3.10}$$

dla wszystkich gładkich, $\overline{\partial}$-zamkniętych $(0,1)$-form α na $\overline{D}$, spełniających warunki brzegowe $\overline{\partial}$- Neumanna, to $\overline{\partial} u = g$ w sensie dystrybucyjnym.

Dowód: Twierdzenie to sprowadza się do sprawdzenia gęstości tych form. Wiemy, że gęste są formy gładkie o supporcie zwartym (ponieważ ψ jest gładka, formy te należą do przestrzeni $L^2(D,\psi)$), a więc bazując na informacji o tym, że wzór zachodzi dla form takich jak w twierdzeniu, wystarczy udowodnić, że wzór ten zachodzi dla dowolnej gładkiej formy o supporcie zwartym w D. Weźmy dowolną taką formę α. Możemy formę α rozłożyć jednoznacznie $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$, gdzie $\alpha^1 \in \operatorname{Ker} \overline{\partial}, \alpha^2 \in \left(\operatorname{Ker} \overline{\partial}\right)^\perp$ (α^2 jest rozwiązaniem Kohna pewnego problemu $\overline{\partial}$, porównaj Lemat 3.2.6). Z regularności problemu $\overline{\partial}$ (patrz rozdział **3.2**, z zastrzeżeniem, że w tym przypadku mamy formy a nie funkcje) wynika, że α^1, a zatem i α^2 są gładkie.

$$\overline{\partial}\,\overline{\partial} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \overline{\partial} \subset \operatorname{Ker} \overline{\partial} \Rightarrow \alpha^2 \perp \operatorname{Im} \overline{\partial} \Rightarrow \overline{\partial}_\psi^* \alpha^2 = 0$$

i α^2 spełnia brzegowe warunki $\overline{\partial}$-Neumanna. Prawa strona wzoru (3.10) zastosowana do formy α^2 wynosi zero. Ponieważ g można aproksymować $\overline{\partial}$-zamkniętymi formami (zobacz Twierdzenie 2.1.19), po przejściu do granicy otrzymujemy

$$\int_D g \cdot \overline{\alpha}^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n} = 0$$

Oczywiście. ze zwartości supportu α wynika natychmiast, że brzegowe warunki $\overline{\partial}$-Neumanna spełnia też forma α^1. Z założeń mamy, że dla formy α^1 zachodzi równość. Ostatecznie dla formy α dostajemy

$$\int_D g \cdot \overline{\alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n} = \int_D g \cdot \overline{\alpha}^1 e^{-\psi} d\lambda^{2n} + 0 = \int_D u \overline{\overline{\partial}_\psi^* \alpha^1} e^{-\psi} d\lambda^{2n} + 0 = \int_D u \overline{\overline{\partial}_\psi^* \alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n}$$

Teraz z dowolności wyboru α i gęstości dostajemy wynik.

Twierdzenie 3.0.8 *Jeżeli g i D są jak powyżej i nierówność*

$$\Big| \int_D g \cdot \overline{\alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n} \Big|^2 \le C \int_D |\, \overline{\partial}_\psi^* \alpha|^2 \frac{e^{-\psi}}{\tau} d\lambda^{2n},$$

gdzie $\frac{1}{\tau}$ jest całkowalną i nieujemną funkcją, zachodzi dla wszystkich gładkich, $\overline{\partial}$-zamkniętych form α, spełniających brzegowe warunki $\overline{\partial}$-Neumanna , wtedy istnieje u takie, że $\overline{\partial} u = g$ (również w sensie dystrybucyjnym) i

$$\int_D |u|^2 \tau e^{-\psi} \le C.$$

Dowód: Powtarzając rozumowanie z Lematu 3.0.3 znajdziemy element v taki, że

$$\int_D g \cdot \alpha\, e^{-\psi} d\lambda^{2n} = \int_D v\overline{\overline{\partial}_\psi^* \alpha}\frac{e^{-\psi}}{\tau} d\lambda^{2n},$$

dla wszystkich α, spełniających założenia twierdzenia i

$$\int_D |v|^2 \frac{e^{-\psi}}{\tau} d\lambda^{2n} \le C.$$

Niech $u := \frac{v}{\tau}$. Oczywiście powyższy wzór daje nam $\int_D |u|^2 \tau\, e^{-\psi} d\lambda^{2n} \le C$ i

$$\int_D |u| d\lambda^{2n} \overset{Tw.2.2.2}{\le} \int_D |u|^2 \tau\, e^{-\psi} d\lambda^{2n} \int_D \frac{e^{\psi}}{\tau} d\lambda^{2n} < \infty,$$

czyli $u \in L^1(D)$. Z Twierdzenia 3.0.7 dostajemy $\overline{\partial}\, u = g$.

3.1 Stabilność operatora $\overline{\partial}$ względem przechodzenia do słabych granic

Słaba zbieżność w przestrzeniach L^2 z wagami charakteryzuje się tym, że nie musimy sprawdzać zbieżności dla wszystkich funkcjonałów (zobacz Definicję 2.2.7), lecz jedynie dla tych postaci $f(u) = \langle u, f \rangle$, gdzie f jest funkcją (formą) gładką o supporcie zwartym. Wynika to z gęstości tych ostatnich w wyjściowej przestrzeni.

W tej części przedstawimy dowód następującego faktu

Twierdzenie 3.1.1 *Jeżeli* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *jest ciągiem elementów z* $L^2(D, \psi) \cap Dom\, \overline{\partial}$*, słabo zbieżnym do elementu* $u \in L^2(D, \psi)$ *(tzn. w topologii* $\sigma(L^2(D, \psi), (L^2(D, \psi))')$ *wprowadzonej na zbiorze* $L^2(D, \psi)$ *, to* $\overline{\partial}\, u_j$ *dąży słabo do* $\overline{\partial}\, u$*.*

Zauważmy, że jest to specyficzna cecha operatora $\overline{\partial}$, bowiem oznacza to, że operator ten jest ciągowo słabo ciągły, a więc własność ciągłości w normie przechodzi na ciągłość w słabej topologii.

Dowód: Gdy waga jest gładka, jedynym problemem jest czy $u \in \mathrm{Dom}\, \overline{\partial}$. Jeżeli tak jest, to dla dowolnej formy gładkiej o supporcie zwartym α

$$\int_D \overline{\partial}\, u_j \cdot \overline{\alpha}\, e^{-\psi} d\lambda^{2n} = \langle \overline{\partial}\, u_j, \alpha \rangle_{L^2_{(0,1)}(D,\psi)} = \langle u_j, \overline{\partial}_\psi^* \alpha \rangle_{L^2(D,\psi)}$$

$\overline{\partial}_\psi^* \alpha$ jest funkcją gładką (tu istotna jest gładkość wagi) o supporcie zwartym, a więc ze słabej zbieżności u_j mamy

$$\langle u_j, \overline{\partial}_\psi^* \alpha \rangle_{L^2(D,\psi)} \to \langle u, \overline{\partial}_\psi^* \alpha \rangle_{L^2(D,\psi)} = \int_D u\overline{\overline{\partial}_\psi^* \alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n} = \int_D T \cdot \overline{\alpha}\, e^{-\psi} d\lambda^{2n},$$

czyli $\overline{\partial}\, u_j$ dąży słabo do T, dla jakiegoś prądu T. $\overline{\partial}$ jest operatorem domkniętym więc jego wykres jest domknięty w $L^2(D, \psi) \times L^2_{(0,1)}(D, \psi)$, a zatem słabo domknięty (jest to fakt z analizy funkcjonalnej, dotyczący słabego domknięcia zbiorów wypukłych). Skoro u_j dąży słabo do u, $\overline{\partial}\, u_j$ jest słabo zbieżny, więc $u \in \mathrm{Dom}\, \overline{\partial}$ i $T = \lim_{j\to\infty} \overline{\partial}\, u_j = \overline{\partial}\, u$. Przypadek ogólny osiągamy poprzez regularyzację wag (zobacz Twierdzenie 2.1.11).

3.2 Regularność problemu $\overline{\partial}$

Regularność problemu $\overline{\partial}$ jest ciekawą własnością operatora $\overline{\partial}$, szeroko badaną w literaturze. Dowody przedstawione w tej części bazują na książce [K] (zob. też [F-K], gdzie część dowodów używa metod analizy Fouriera).

Lemat 3.2.1 *Niech $g \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie gładką funkcją o supporcie zwartym. Wtedy*

$$|g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^n g(t)}{\partial t_1 \partial t_2 .. \partial t_n}\right| d\lambda^n$$

Dowód: Dowód przebiega indukcyjnie:

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n g(t)}{\partial t_1 \partial t_2 .. \partial t_n} dt_n dt_{n-1} .. dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \frac{\partial^{n-1} g(t)}{\partial t_1 \partial t_2 .. \partial t_{n-1}}\Big|_{-\infty}^{x_n} dt_{n-1} .. dt_1,$$

zważywszy na fakt, że mamy funkcję o supporcie zwartym, element pod całką brany w punkcie $-\infty$ znika, a więc dostajemy

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \frac{\partial^{n-1} g(t', x_n)}{\partial t_1 \partial t_2 .. \partial t_{n-1}} dt_{n-1} .. dt_1 = .. = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial g(t_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{\partial t_1} dt_1 = g(x).$$

Zatem

$$|g(x)| = \Big|\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n g(t)}{\partial t_1 \partial t_2 .. \partial t_n} dt_n dt_{n-1} .. dt_1\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^n g(t)}{\partial t_1 \partial t_2 .. \partial t_n}\right| d\lambda^n.$$

Lemat 3.2.2 *Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ będzie funkcją o supporcie zwartym taką, że $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g \in L^2, \forall \alpha - wielowskaźnik : |\alpha| \leq n+1$, pochodne brane są w sensie dystrybucyjnym. (Takie funkcje tworzą tak zwane przestrzenie Sobolewa). Wtedy g prawie wszędzie równa się funkcji ciągłej.*

Dowód: Regularyzujemy funkcję $g_\varepsilon = g * \phi_\varepsilon$. Prostym rachunkiem możemy wykazać

$$\Big\|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha g_\varepsilon\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \Big\|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha g\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

stąd

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_j} g_\varepsilon\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \overset{3.2.1}{\leq} \Big\|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{(1,..,1,2,1..1)} g_\varepsilon\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Wynika stąd, że funkcje g_ε tworzą rodzinę równociągłą, a więc możemy spośród nich wybrać ciąg zbieżny lokalnie jednostajnie. Granica jenostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. Jednocześnie $g_\varepsilon \to g$ w L^2, a więc g prawie wszędzie równa się uzyskanej ciągłej funkcji granicznej.

Twierdzenie 3.2.3 (Sobolew) *Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ będzie funkcją o supporcie zwartym taką, że $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g \in L^2$, dla wszystkich $|\alpha| \leq n + 1 + k$, wtedy g prawie wszędzie równa się funkcji klasy $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$*

Dowód: Twierdzenie to udowodnimy przez indukcję. Podstawą indukcji będzie Lemat 3.2.2. Przypuśćmy, że udowodniliśmy już twierdzenie dla wielowskaźników do rzędu s. Na mocy założenia indukcyjnego $\frac{\partial}{\partial x_i} g$ jest klasy $\mathcal{C}^{s-n-1}(\mathbb{R}^n)$, $\forall i \in \{1,..,n\}$, przy czym $s-n-1 \geq 0$ czyli wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe. Stąd $g \in \mathcal{C}^{s-n}(\mathbb{R}^n)$. Ostatecznie dostajemy $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

Lemat 3.2.4 *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem otwartym i niech $g : D \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g \in L^2_{loc}$, dla wszystkich α. Wtedy prawie wszędzie g równa się funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty$.*

Dowód: Oczywiście dla funkcji o supporcie zwartym byłby to bezpośredni wniosek z twierdzenia Sobolewa. Niech $\eta \in \mathcal{C}^\infty_o$ wtedy funkcja ηg ma zwarty support, każda pochodna dalej należy do L^2 , bo wszytskie pochodne funkcji gładkiej o supporcie zwartym są ograniczone, a zatem na mocy twierdzenia Sobolewa ηg jest funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$. Z dowolności η (możemy tę funkcję tak wybrać, aby była równa jedynce tożsamościowo na dowolnym zbiorze zwartym, zawartym w D), dostajemy, że g jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ na wnętrzu każdego takiego zbioru. Wyczerpując zbiór D zbiorami zwartymi otrzymujemy, że $g \in \mathcal{C}^\infty(D)$.

Możemy teraz przystąpić do rozpatrzenia sytuacji zespolonej. Oczywiście $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, a więc powyższe rozumowania przechodzą bez zmian na obszary zespolone. Naturalniejsze jednak w tej sytuacji jest rozpatrywanie pochodnych $\frac{\partial}{\partial z_i}$ i $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$.

Lemat 3.2.5 *Jeżeli $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ jest funkcją o nośniku zwartym (nie zakładamy gładkości), oraz $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \in L^2$, dla $j = 1,..,n$ to również pochodne sprzężone $\frac{\partial f}{\partial z_j} \in L^2$ oraz zachodzi równość*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} = \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\right\|_{L^2(\mathbb{C}^n)}.$$

Dowód: Najpierw załóżmy, że f jest gładka. Ponieważ f ma support zwarty, to jej norma w L^2 (i wszystkich jej pochodnych) jest równa normie na kuli o dostatecznie dużym promieniu $\mathbb{B}_n$. Z twierdzenia o całkowaniu przez części (Twierdzenie 2.1.20) mamy

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{L^2(\mathbb{B}_n)} = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_j} d\lambda^{2n} =$$

$$= -\int_{\mathbb{B}_n} f \frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j \partial \overline{z}_j} d\lambda^{2n} + \int_{\partial \mathbb{B}_n} f \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_j} \overrightarrow{n_j} d\lambda^{2n-1}.$$

Całka po brzegu znika, bo funkcja ma zwarty support. Jednocześnie

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\right\|_{L^2(\mathbb{B}_n)} = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}} d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j} d\lambda^{2n} =$$

$$= -\int_{\mathbb{B}_n} f \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_j \partial z_j} d\lambda^{2n} + \int_{\partial \mathbb{B}_n} f \frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j} \overrightarrow{\overline{n_j}} d\lambda^{2n-1}$$

i także całka powierzchniowa znika, a pozostałe składniki są sobie równe. Teraz z gęstości funkcji gładkich o supporcie zwartym w L^2, możemy aproksymować dowolną funkcję z kontrolą pochodnych. Zwartość supportu funkcji aproksymowanej gwarantuje, że ciąg funkcji aproksymujących możemy wybrac tak, aby miały supporty wspólnie ograniczone (porównaj Twierdzenie 2.1.19).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial z_j} f + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} f, \ \frac{\partial}{\partial y_j} f = i\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} f - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} f\Big),$$

a więc stosowne twierdzenia dla $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ przenoszą się na twierdzenia w których mamy $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta$ (nie „omijamy" żadnej pochodnej cząstkowej rzeczywistej).

Twierdzenie 3.2.6 *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem pseudowypukłym. Niech f będzie $\overline{\partial}$-zamkniętą $(0,1)$ formą, dla której $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta f \in L^2_{loc}, \forall \alpha, \beta : |\alpha| + |\beta| \leq s$, dla pewnego ustalonego s. Wtedy każde rozwiązanie u, problemu $\overline{\partial}\, u = f$ posiada własność*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)^\alpha \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^\beta u \in L^2_{loc}, \forall \alpha, \beta : |\alpha| + |\beta| \leq s+1.$$

Dowód : Pierwszą obserwacją jest, że jeżeli jedno rozwiązanie posiada tą własność, to każde rozwiązanie ją posiada.

Niech u i u', będą dwoma rozwiązaniami. Mamy więc

$$\overline{\partial}(u - u') = \overline{\partial}\, u - \overline{\partial}\, u' = f - f = 0.$$

Ustalmy $\eta \in \mathcal{C}^\infty_o(D)$

$$\frac{\partial (u-u')\eta}{\partial \overline{z}_j} = 0 + (u - u')\frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j} \in L^2,$$

dla każdego j. Z Lematu 3.2.5 to samo dotyczy pochodnych $\frac{\partial}{\partial z_j}$. Iterując rozumowanie dostajemy, że $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta \eta(u - u') \in L^2$, $\forall \alpha, \beta$. Stąd z Lematu 3.2.4 $\eta(u - u') \in C^\infty$ (tzn. można znaleźć funkcję klasy $\mathcal{C}^\infty$, która prawie wszędzie równa się $\eta(u - u')$), a zatem powtarzając rozumowanie z wyczerpywaniem dostajemy $u - u' \in C^\infty(D)$. Zatem z $u = u' + (u - u')$ i nierówności trójkąta dla stosownych norm dostajemy tezę. Oczywiście trywialnym wnioskiem z powyższych rozważań jest fakt , że jeżeli $f \in L^1_{loc}(D)$ i $\overline{\partial}\, f = 0$ (tą równość traktujemy jako równość prądów, w sensie dystrybucyjnym) to funkcja f prawie wszędzie równa się funkcji holomorficznej. Wystarczy więc wykazać własność dla jednego rozwiązania. Niech u będzie rozwiązaniem $\overline{\partial}\, u = f$, gdzie f ma własności założone w twierdzeniu. Teraz załóżmy, że wszystkie pochodne cząstkowe u do rzędu $s' \leq s$ (tzn. $|\alpha| + |\beta| \leq s'$) należą do L^2_{loc} i niech $\eta \in \mathcal{C}^\infty_o(D)$. Zatem

$$\overline{\partial}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)^\alpha \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^\beta \eta u\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)^\alpha \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^\beta (u\,\overline{\partial}\,\eta) + \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)^\alpha \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^\beta (\eta f),$$

różniczkowanie rozumiemy jako różniczkowanie po współczynnikach. Wszystkie pochodne cząstkowe η są ograniczone, co wynika z gładkości i zwartości supportu. W obu składnikach sumy, stosując regułę Leibniza dostajemy sumę iloczynów pewnej pochodnej współczynnika formy (prądu) f lub u, które z założenia należą do L^2_{loc} i pewnej pochodnej funkcji η. Stąd wszystkie współczynniki $\overline{\partial}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta \eta u$ należą do L^2, a skoro

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta}\eta u \in L^2$ to na mocy Lematu 3.2.5 również $\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta}\eta u \in L^2$, $\forall j \in \{1,..,n\}$ Czyli mamy własność dla $s'+1$. W ten sposób indukcyjnie[6] dowodzimy własności dla pochodnych ηu do rzędu $s+1$, zatem wyczerpywując obszar dostajemy oszacowania dla wszystkich pochodnych do rzędu $s+1$ dla u.

Twierdzenie 3.2.7 (regularność problemu $\overline{\partial}$) *Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem pseudowypukłym, f jest $\overline{\partial}$-zamkniętą $(0,1)$ formą o współczynnikach gładkich to każda funkcja u taka, że $\overline{\partial} u = f$, jest gładka na D*

Dowód: Wybieramy u. f ma współczynniki gładkie, a więc w szczególności należą one (i wszystkie ich pochodne) do L^2_{loc}. Rozpatrując zestaw wszystkich pochodnych do rzędu $m-1$, z Twierdzenia 3.2.6 dostajemy, że wszystkie pochodne do rzędu m funkcji u należą do L^2_{loc}. Z Twierdzenia 3.2.3 dostajemy, że u jest klasy $\mathcal{C}^{m-2n-1}$. Przy $m \to \infty$ zawsze możemy wybierać to samo rozwiązanie, więc dostajemy $u \in \mathcal{C}^{\infty}$, co razem z obserwacją w Twierdzeniu 3.2.6 daje nam gładkość wszystkich rozwiązań (oczywiście gładkość modulo zmiana na zbiorze miary zero).

Teza Twierdzenia 3.2.7 jest prawdziwa wyłącznie dla funkcji, dla form nadal prawdziwe jest twierdzenie, że istnieje rozwiązanie gładkie (takie jest rozwiązanie Kohna, patrz poniżej), lecz nie wszystkie rozwiązania muszą być gładkie. Dowód tych faktów jest jednak trudny.

Rozwiązania $\overline{\partial} u = f$ stanowią podprzestrzeń afiniczną przestrzeni Hilberta $L^2_{(p,q)}(D,\varphi_1)$ (waga i bistopień nie są tu istotne), postaci $u' + \operatorname{Ker}\overline{\partial} \cap L^2_{(p,q)}(D,\varphi_1)$, gdzie u' jest jednym, konkretnym rozwiązaniem. Możemy zatem wybrać z tej przestrzeni jedyny element u taki, że $u \perp_{L^2_{(p,q)}(D,\varphi_1)} \operatorname{Ker}\overline{\partial} \cap L^2_{(p,q)}(D,\varphi_1)$. Ten element u nazywamy rozwiązaniem Kohna (lub rozwiązaniem kanonicznym) $\overline{\partial} u = f$.

4 Dowód twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego

W tej części przedstawimy dowód Twierdzenia 1.0.2. Dowód będzie przebiegał w kilku etapach. Najpierw, wykorzystując wzór z Lematu 2.4.2, będziemy dążyli do otrzymania oszacowania, które gwarantuje istnienie odpowiedniego rozszerzenia (podobna technika została wykorzystana w Twierdzeniu 3.0.5). Przedstawione rozważania w istocie są bardzo bliskie do metod użytych w [Be1]. Na koniec, wykorzystując procedurę wyboru słabo zbieżnego podciągu i aproksymację, wykażemy, że twierdzenie zachodzi dla szerokiej klasy obszarów.

Zanim rozpoczniemy właściwy dowód, wykażemy prosty fakt, że Wniosek 1.0.3 wynika z Twierdzenia 1.0.2. Wystarczy podstawić $2(G_\Omega(0,z_1) - \log|z_1|)$ za $\varphi(z_1,z')$. Na mocy klasycznych twierdzeń o usuwaniu osobliwości, jest to harmoniczna funkcja zmiennej z_1, a więc plurisubharmoniczna jako funkcja zestawu zmiennych. Oszacowanie jest optymalne pod względem obszaru Ω (ale nie pod względem stałej 4π), ponieważ pojemność jest niezerowa gdy Ω ma niepolarne dopełnienie w $\mathbb{C}$ (zobacz definicję pojemności 2.1.8), co w jednowymiarowej sytuacji jest równoważne istnieniu niezerowej, całkowalnej z kwadratem funkcji holomorficznej.

[6] podstawą indukcji jest fakt, że u (pochodna rzędu zerowego) należy do L^2_{loc}

Bez straty ogólności możemy założyć, że przekrój $D \cap H$ jest identyczny z $\{z_1 = 0\} \cap D$. Przy tym założeniu $\log d(z, H)$ redukuje się do $\log |z_1|$.

4.1 Przypadek gładki i ograniczony

Niech D będzie ograniczonym obszarem, o gładkim brzegu, zdefiniowanym jako podpoziomica $\rho < 0$, $\mathcal{C}^\infty$ i ściśle plurisubharmonicznej funkcji ρ. Oczywiście D jest ściśle pseudowypukły. Niech waga ψ będzie plurisubharmoniczna i (tymczasowo) załóżmy, że jest ona gładka.

Niech

$$c' = \sup_{z \in D} \{\varphi(z) + 2 \log |z_1|\}.$$

Niech $w = \frac{-1}{\pi}(\varphi + 2 \log |z_1|\text{-}c^{'})$. Współczynnik $\frac{1}{\pi}$ pełni funkcje normalizujące. Oczywiście $D \subset \{w \geq 0\}$. Wtedy

$$w_{j\overline{k}}(z) = \frac{-\varphi_{j\overline{k}}(z)}{\pi} - \delta_{j,1}\delta_{1,k}\mu_{\{z_1=0\}}(z),$$

gdzie $\mu_{\{z_1=0\}}$ oznacza $2n-2$-wymiarową miarę Lebesgue'a skoncentrowaną na $\{z_1 = 0\}$. Z nieujemności w, plurisubharmoniczności ψ i ρ, jak i z $\overline{\partial}$-zamkniętości α, oraz warunków brzegowych $\overline{\partial}$-Neumanna, wzór z Lematu 2.4.2 przybiera postać następującej nierówności:

$$\int_D |\alpha_1|^2 e^{-\psi}\mu_{\{z_1=0\}} + \int_D \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\varphi_{j\overline{k}}(z)}{\pi}\alpha_j\overline{\alpha}_k e^{-\psi} d\lambda^{2n} + \int_D w|\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n}$$

$$\leq 2Re \int_D w\,\overline{\partial}\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha \cdot \overline{\alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n}.$$

Pierwsze dwie całki pochodzą z tego samego składnika wzoru. Są to stosownie całki po singularnej i regularnej części miary którą dostajemy. Dalej

$$= 2Re\langle w\,\overline{\partial}\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha, \alpha\rangle_{L^2_{(0,1)}(D,\psi)} = 2\langle w\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha, \overline{\partial}_\psi^*\,\alpha\rangle_{L^2(D,\psi)} - 2Re\langle \overline{\partial}_\psi^*\,\alpha\,\overline{\partial}\,w, \alpha\rangle_{L^2_{(0,1)}(D,\psi)}$$

$$= 2\int_D w|\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n} - 2Re\int_D \overline{\partial}_\psi^*\,\alpha\,\overline{\partial}\,w \cdot \overline{\alpha} e^{-\psi} d\lambda^{2n}.$$

Z plurisubharmoniczności φ, otrzymujemy

$$\int_{\{z_1=0\}\cap D} |\alpha_1|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n-2} \tag{4.1}$$

$$\leq \int_D \frac{-(\varphi + 2\log|z_1|\text{-}c^{'})}{\pi}|\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n} + 2\int_D |\,\overline{\partial}_\psi^*\,\alpha|\Big|\,\overline{\partial}\left(\frac{\varphi + 2\log|z_1|\text{-}c^{'}}{\pi}\right)\cdot\overline{\alpha}\Big| e^{-\psi} d\lambda^{2n}.$$

Teraz wybierzemy nowe w i powtórzymy powyższe rozumowanie.

Niech $w = 1 - e^{\delta(\varphi + 2\log|z_1|\text{-}c^{'})}$ (δ domyślnie ma być liczbą nieznacznie mniejszą niż 1).

$$\frac{\partial^2}{\partial\, z_i\, \partial\, \overline{z}_j}\Big(1 - \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c^{'})}\Big) = \frac{\partial}{\partial\, z_i}\Big[- \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c^{'})}\left(\delta\varphi_{\overline{z}_j} + \frac{\delta_{1,j}\delta}{\overline{z}_1}\right)\Big]$$

$$= - \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\Big[\delta\varphi_{z_i\overline{z}_j} + \pi\delta_{i,1}\delta_{1,j}\delta\mu_{\{z_1=0\}} + \Big(\delta\varphi_{z_i} + \frac{\delta_{i,1}\delta}{z_1}\Big)\Big(\delta\varphi_{\overline{z}_j} + \frac{\delta_{1,j}\delta}{\overline{z}_j}\Big)\Big].$$

składnik ze skoncentrowaną miarą znika, bo $\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')} = 0$ na $\{z_1 = 0\} \cap D$.

$$\int_D \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\,|\delta\,\overline{\partial}(\varphi + 2\log|z_1|\text{-}c') \cdot \overline{\alpha}|^2\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} =$$

$$= \int_D \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\Big(\delta\varphi_{z_i} + \frac{\delta_{i,1}\delta}{z_1}\Big)\Big(\delta\varphi_{\overline{z}_j} + \frac{\delta_{1,j}\delta}{\overline{z}_j}\Big)\alpha_i\overline{\alpha}_j e^{-\psi} d\lambda^{2n}$$

$$\leq \int_D \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\delta\varphi_{z_i\overline{z}_j} + \Big(\delta\varphi_{z_i} + \frac{\delta_{i,1}\delta}{z_1}\Big)\Big(\delta\varphi_{\overline{z}_j} + \frac{\delta_{1,j}\delta}{\overline{z}_j}\Big)\Big]\alpha_i\overline{\alpha}_j e^{-\psi} d\lambda^{2n}.$$

Składnik pod sumą to dokładnie $\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial\overline{z}_j}\Big(1 - \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\Big)\alpha_i\overline{\alpha}_j$. Stąd możemy mechanicznie powtórzyć rozumowanie dzięki któremu dostaliśmy wzór (4.1). Ostatecznie dostajemy

$$\leq \int_D (1 - \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')})|\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} + 2\int_D |\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha||\,\overline{\partial}(1 - \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}) \cdot \overline{\alpha}|\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n}$$

$$= \int_D (1 - \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')})|\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} +$$

$$+2\int_D |\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|\,\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\,|\,\overline{\partial}\Big[\delta(\varphi + 2\log|z_1|\text{-}c')\Big] \cdot \overline{\alpha}|\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n}\,.$$

Używamy elementarnej nierówności $xy \leq x^2 + \frac{1}{4}y^2$ w drugiej całce i przestawiając składniki dostajemy

$$\int_D \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}\,|\,\overline{\partial}(w) \cdot \overline{\alpha}|^2\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} \tag{4.2}$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2}\int_D (1 + \mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')})|\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} \leq \frac{4}{\delta^2}\int_D |\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n}\,.$$

Stosując nierówność $xy \leq \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}} + \frac{\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}}{4}y^2$ do (4.1) i używając (4.2), dostajemy

$$\int_{\{z_1=0\}\cap D} |\alpha_1|^2 e^{-\psi} d\lambda^{2n-2} \tag{4.3}$$

$$\leq \int_D |\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2\Big(\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{e^{\varphi+2\log|z_1|\text{-}c'}} + \frac{2}{\pi\,\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}} + \frac{2}{\pi\delta^2}\Big)\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n},$$

co jest (znowu poprzez elementarną nierówność $\log\frac{1}{x^{1/\delta}} + \frac{2}{x} + \frac{2}{\delta^2} \leq (2 + \frac{2}{\delta^2})\frac{1}{x}$, dla $x \leq 1$) majoryzowane przez

$$\frac{1}{\pi}\Big(2 + \frac{2}{\delta^2}\Big)\int_D |\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|\text{-}c')}}\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n}\,. \tag{4.4}$$

Jak zauważono w [Be1], δ gwarantuje, że ostatnia całka jest skończona (zauważmy, że φ jest gładka, a więc lokalnie ograniczona).

Niech $g = f\,\overline{\partial}\,\frac{1}{z_1}$. Jeżeli α jest gładką, $\overline{\partial}$-zamkniętą formą spełniającą brzegowe warunki $\overline{\partial}$-Neumanna, dostajemy

$$\Big|\int_D g\cdot\overline{\alpha}\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n}\Big|^2 = \pi^2\Big|\int_{\{z_1=0\}\cap D} f\overline{\alpha}_1 e^{-\psi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}\Big|^2$$

$$\overset{Tw.2.2.2}{\leq} \pi^2\int_{\{z_1=0\}\cap D}|\alpha_1|^2 e^{-\psi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}\int_{\{z_1=0\}\cap D}|f|^2 e^{-\psi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}$$

$$\overset{(4.4)}{\leq}\Big(2+\frac{2}{\delta^2}\Big)\pi\int_D|\,\overline{\partial}^*_\psi\,\alpha|^2\frac{1}{\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|-c')}}\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n}\int_{\{z_1=0\}\cap D}|f|^2 e^{-\psi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}.$$

Teraz z Lematu 3.0.8 wynika, że istnieje u_δ taka, że $\overline{\partial}\,u_\delta = g$ i

$$\int_D |u_\delta|^2\,\mathrm{e}^{\delta(\varphi+2\log|z_1|-c')}\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} \leq \Big(2+\frac{2}{\delta^2}\Big)\pi\int_{\{z_1=0\}\cap D}|f|^2 e^{-\psi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}.$$

Poprzez wzięcie słabej granicy u, co możemy uczynić na mocy twierdzenia Eberleina (zobacz Twierdzenie 2.2.13), podciągu u_δ gdy $\delta \longrightarrow 1$, dostajemy na mocy stabilności (zobacz rozdział **3.1**), $\overline{\partial}\,u = g$ i

$$\int_D |u|^2|z_1|^2 e^{\varphi-c'}\, e^{-\psi}\, d\lambda^{2n} \leq 4\pi\int_{\{z_1=0\}\cap D}|f|^2 e^{-\psi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}. \qquad (4.5)$$

Zauważmy, że uz_1 jest holomorficzna (i $uz_1 = f$ na $\{z_1 = 0\}\cap D$), ponieważ $\overline{\partial}(uz_1) = z_1\,\overline{\partial}\,u = z_1 f\,\overline{\partial}\,\frac{1}{z_1} = 0$ i $uz_1 = z_1(u-\frac{f}{z_1})+f$, gdzie $u-\frac{f}{z_1}$ jest holomorficzna.

Teraz wystarczy zaobserwować, że od samego początku mogliśmy wybrać $\psi = \nu+\varphi-c'$, co nie psuje założeń gładkości i plurisubharmoniczności. Po lewej stronie wzoru (4.5) dostajemy $\int_D |u|^2|z_1|^2 e^{-\nu} d\lambda^{2n}$, a po prawej

$$4\pi e^{c'}\int_{\{z_1=0\}\cap D}|f(z)|^2 e^{-\nu_{|\{z_1=0\}\cap D}-\varphi_{|\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}.$$

4.2 Przypadek ogólny

Zajmijmy się teraz ogólnym przypadkiem, gdy D jest tylko pseudowypukły (bez warunków ograniczoności i gładkości brzegu), oraz ψ niekoniecznie należy do klasy $\mathcal{C}^\infty$. Wiadomo, że dla każdego zbioru pseudowypukłego istnieje ściśle plurisubharmoniczna i gładka funkcja wyczerpująca η (jest to treść Twierdzenia 2.1.11). Z twierdzenia Sarda (zobacz Twierdzenie 2.1.21) wynika, że podpoziomice $D_x = \{\eta < x\}$, funkcji η są ograniczone i o gładkim brzegu dla prawie wszystkich rzeczywistych x (funkcją definiującą jest poprostu $\rho = \eta - x$). Możemy wybrać rosnący ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ x-ów takich, że D_{x_n} jest obszarem ograniczonym, o gładkim brzegu, oraz zbiory D_{x_n} wyczerpują D. Niech $\nu_{\varepsilon,x}, \varphi_{\varepsilon,x}$ będą ε-regularyzacjami $\nu_{|D_x}$ i $\varphi_{|D_x}$, zdefiniowanymi jako splot z funkcją regularyzującą (zobacz Twierdzenie 2.1.19). Dla każdego x: $\nu_{\varepsilon,x} \searrow \nu_{|D_x}, \varphi_{\varepsilon,x} \searrow \varphi_{|D_x}$, przy $\varepsilon \searrow 0$. Stosując metodę przekątniową, możemy wybrać ciąg $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n \searrow 0$ taki, że $\nu_{\varepsilon_n} := \nu_{\varepsilon_n,x_n}$,

$\varphi_{\varepsilon_n} := \varphi_{\varepsilon_n, x_n}$, są gładkie na $D^{\varepsilon_n} := (D_{x_n})_{\varepsilon_n} := \{z \in D_{x_n} : dist(z, \partial D_{x_n}) > \varepsilon_n\}$, i $D_{x_{n-1}} \subset D^{\varepsilon_n}$.[7]

$$4\pi e^{c'} \int_{\{z_1=0\}\cap D} |f|^2 e^{-\nu|_{\{z_1=0\}\cap D} - \varphi|_{\{z_1=0\}\cap D}} d\lambda^{2n-2}$$

$$\geq 4\pi e^{c''} \int_{\{z_1=0\}\cap D^{\varepsilon_n}} |f|^2 e^{-\nu|_{\{z_1=0\}\cap D^{\varepsilon_n}} - \varphi|_{\{z_1=0\}\cap D^{\varepsilon_n}}} d\lambda^{2n-2},$$

gdzie $c'' \leq c'$ to supremum $\varphi(\cdot) + 2\log|z_1|$ na D^{ε_n}

$$\geq 4\pi e^{c''} \int_{\{z_1=0\}\cap D_{x_{n-1}}} |f|^2 e^{-\nu_{\varepsilon_n}|_{\{z_1=0\}\cap D_{x_{n-1}}} - \varphi_{\varepsilon_n}|_{\{z_1=0\}\cap D_{x_{n-1}}}} d\lambda^{2n-2}.$$

Teraz możemy (stosując Twierdzenie 1.0.2, które w tej sytuacji już zostało wykazane) znaleźć rozszerzenie f dla $D_{x_{n-1}}, \nu_{\varepsilon_n}$ i φ_{ε_n}

$$\geq \frac{4\pi e^{c''}}{4\pi e^{c''_{\varepsilon_n}}} \int_{D_{x_{n-1}}} |F_{\varepsilon_n}|^2 e^{-\nu_{\varepsilon_n}} d\lambda^{2n},$$

gdzie c''_{ε_n} oznacza supremum $\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot) + 2\log|z_1|$ na $D_{x_{n-1}}$.

Czyli F_{ε_n} posiada podciąg, słabo zbieżny na każdym $D_{x_{n-1}}$ do granicy F w $L^2(D, \nu_{\varepsilon_n})$, dla każdego ν_{ε_n} i ta granica jest holomorficzna z twierdzenia o stabilności $\overline{\partial}$. Oczywiście $\frac{4\pi e^{c''}}{4\pi e^{c''_{\varepsilon_n}}} \to 1$. Teraz przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$, dostajemy Twierdzenie 1.0.2.

Otrzymaliśmy $C_1 \leq 4\pi e^{c'}$.

5 Pewne zastosowania

Wprowadźmy pojęcie na potrzeby tylko i wyłącznie tego rozdziału.

Definicja 5.0.1 *Jądrem Bergmana będziemy nazywać*

$$K_\Omega(z) := \sup\Big\{\frac{|f(z)|^2}{\int_\Omega |f(z)|^2 d\lambda^2}, f \in \mathcal{O}(\Omega), f \textit{ nie równa się tożsamościowo } 0\Big\}.$$

Definicja 5.0.2 *Jądrem Bergmana z wagą będziemy nazywać*

$$K_\Omega^\varphi(z) := \sup\Big\{\frac{|f(z)|^2}{\int_\Omega |f(z)|^2 e^{-\varphi} d\lambda^2}, f \in \mathcal{O}(\Omega), f \textit{ nie równa się tożsamościowo } 0\Big\}.$$

Jeżeli $\{\sigma_j\}_{j=1}^\infty$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{O} \cap L^2(\Omega)$ (lub ogólniej $\mathcal{O} \cap L^2(\Omega, \varphi)$), to $K_\Omega(z) = \sum_{j=1}^\infty |\sigma_j(z)|^2$ (albo w drugim przypadku $K_\Omega^\varphi(z) = \sum_{j=1}^\infty |\sigma_j(z)|^2$).

Przede wszystkim odnotujmy, że twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego daje nam następującą nierówność

$$K_D(z) \geq \frac{1}{C_0} K_{D\cap H}(z),$$

[7] Wiadomo, że $D_{x_{n-1}} \subset D_{x_n}$. $D_{x_{n-1}}$ wprowadzamy po to aby zastąpić D^{ε_n}. Chodzi nam o to aby obszary na których prowadzimy rozważania były pseudowypukłe.

(chodzi o wersję 1.0.1 twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego, stała C_0 jest stałą, która się pojawia w Twierdzeniu 1.0.1).

Dowód: Dla każdej funkcji f, holomorficznej na $D \cap H$ istnieje rozszerzenie F:

$$\|F\|_{L^2(D)} \leq C_0 \|f\|_{L^2(D\cap H)}, F(z) = f(z)$$

$$C_0 \inf_{f \in L^2 \cap \mathcal{O}(D\cap H)} \|f\|_{L^2(D\cap H)} \geq \inf_{F \in L^2 \cap \mathcal{O}(D)} \|F\|_{L^2(D)}$$

$$K_D(z) = \sup \frac{|F(z)|^2}{\|F\|^2_{L^2(D)}} \geq \sup \frac{|f(z)|^2}{C_0 \|f\|^2_{L^2(D\cap H)}} = \frac{1}{C_0} K_{D\cap H}(z).$$

Nierówność tą często wykorzystuje się do wykazania, że jądro Bergmana dąży do nieskończoności blisko brzegu obszaru, w konkretnych sytuacjach (zobacz [J-P]). Podobne nierówności dostajemy dla jądra Bergmana z wagą

Inną natychmiastową konsekwencją jest oszacowanie na normę operatora minimalnego rozszerzenia (zobacz [Be3], [D-H]).

Operator $L^2(D \cap H, \nu + \varphi) \ni f \to F \in L^2(D, \nu)$ zdefiniowany jako branie rozszerzenia o minimalnej normie jest liniowy, a twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego (wersja 1.0.2) gwarantuje nam, że mamy uniwersalną stałą, ograniczającą normę tego operatora od góry bez względu na wybór D , H i ν (Zauważmy, że może się zdażyć, że przestrzeń wyjściowa jest trywialna. W takim razie możemy formalnie założyć, że norma tego operatora również jest ograniczona przez tą stałą).

Dowód: Zauważmy, że z prostych własności odległości w przestrzeniach Hilberta, rozszerzenie o minimalnej normie musi być prostopadłe do podprzestrzeni rozszerzeń funkcji zerowej. Stąd otrzymujemy liniowość. Teraz wystarczy bezpośrednio zastosować twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego.

5.1 Hipoteza Suity

W 1972 roku Suita (w [S]) postawił problem z teorii powierzchni Riemanna. Jego szczególna wersja (gdy powierzchnią Riemanna jest zbiór otwarty Ω na płaszczyźnie) brzmi:

Hipoteza 1 (Suita) *Dla $\Omega \subset \mathbb{C}$ -otwartego $\pi K_\Omega(z) \geq (c(\Omega, z))^2$.*

W świetle dzisiejszych badań, problem sprowadza się do optymalizacji stałej po lewej stronie nierówności (przełomem w tej dziedzinie była praca [O2], gdzie wykazano po raz pierwszy, że są to wielkości porównywalne). Stałej π nie dałoby się zastąpić żadną mniejszą stałą, gdyż w przypadku gdy Ω jest na przykład kołem, a z jego środkiem zachodzi równość, o czym łatwo można się przekonać bezpośrednio.

Wniosek 5.1.1 *Dla $\Omega \subset \mathbb{C}$-otwartego $4\pi K_\Omega(z) \geq (c(\Omega, z))^2$.*

Dowód: Stosując Wniosek 1.0.3 do jednowymiarowego przypadku, z $\nu = 0$ (wtedy oczywiście przekrój $\{z_1 = 0\} \cap D$ redukuje się do punktu i zamiast całki mamy wartościowanie po prawej stronie), dostajemy

$$4\pi K_\Omega(0) \geq (c(\Omega, 0))^2.$$

Ze względu na fakt, że rozważania są niezależne od przesunięć płaszczyzny zespolonej, dostajemy nierówność dla dowolnego z.

Aktualnie najlepszy wynik w tym kierunku (2π) został uzyskany przez Z.Błockiego ([Bl3]).

5.2 Aproksymacja Demailly'ego

W tej części przedstawimy wynik Demailly'ego dotyczącego aproksymacji funkcji plurisubharmonicznych logarytmami modułów funkcji holomorficznych (zobacz [D2] lub [D3]). Wprowadźmy definicję

Definicja 5.2.1 *Niech φ będzie funkcją plurisubharmoniczną na obszarze pseudowypukłym D. Liczbę Lelonga funkcji φ w punkcie $x_0 \in D$ będziemy nazywać*

$$\nu(\varphi, x_0) := \liminf_{z \to x_0} \frac{\varphi(z)}{\log \|z - x_0\|_{\mathbb{C}^n}} = \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\{z : \|z - x_0\|_{\mathbb{C}^n} \leq r\}} \varphi}{\log r}.$$

W szczególności, gdy φ jest postaci $\log|f|$, gdzie $f \in \mathcal{O}(D)$ to $\nu(\varphi, x_0)$ równa się krotności zera funkcji f w punkcie x_0.

Twierdzenie 5.2.2 *Niech φ będzie plurisubharmoniczną funkcją na ograniczonym obszarze pseudowypukłym $D \subset \mathbb{C}^n$. Niech $\varphi_m := \frac{1}{2m} \log \sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|^2$, gdzie $\{\sigma_l\}_{l=1}^{\infty}$ jest pewną bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathcal{O}(D) \cap L^2(D, 2m\varphi)$. Wtedy istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, niezależne od m takie, że*

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leq \varphi_m(z) \leq \sup_{\|\zeta - z\|_{\mathbb{C}^n} < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n},$$

dla każdego $z \in D$ i $r < dist(z, \partial D)$. W szczególności φ_m dąży punktowo do φ, oraz w topologii $L^1_{loc}(D)$, gdy $m \to \infty$. Ponadto

$$\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z),$$

dla wszystkich $z \in D$.

Wybór φ_m nie jest przypadkowy. Jest to z dokładnością do stałej logarytm z jądra Bergmana z wagą $e^{-2m\varphi}$ ($\frac{1}{2m} \log K_\Omega^{2m\varphi}$, porównaj z tożsamością po Definicji 5.0.2).

Dowód: Szereg $\sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|^2$ jest zbieżny jednostajnie na D, skąd wynika, że jego suma jest $\mathbb{R}$-analityczna.

$$\varphi_m(z) = \frac{1}{2m} \sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l(z)|^2 = \frac{1}{2m} \log \Big(\sup_{\{f : \|f\|_{L^2(D, 2m\varphi)} \leq 1\}} |f(z)|^2 \Big) = \sup_{\{f : \|f\|_{L^2(D, 2m\varphi)} \leq 1\}} \frac{1}{m} \log |f(z)|. \tag{5.1}$$

Funkcje $|f|^2$ są plurisubharmoniczne, więc zachodzą dla nich nierówności całkowe

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}\{\zeta : \|\zeta - z\|_{\mathbb{C}^n} < r\}} \int_{\|\zeta - z\|_{\mathbb{C}^n} < r} |f(\zeta)|^2 d\lambda^{2n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^n \frac{r^{2n}}{n!}} e^{2m \sup_{\|\zeta - z\|_{\mathbb{C}^n} < r} \varphi(\zeta)} \int_D |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda^{2n},$$

oczywiście dla $r < dist(z, \partial D)$. Teraz biorąc supremum we wzorze (5.1) dostajemy

$$\varphi_m(z) \leq \sup_{\|\zeta - z\|_{\mathbb{C}^n} < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{2m} \log \frac{1}{\pi^n \frac{r^{2n}}{n!}} C,$$

co dowodzi jednej z nierówności z tezy. Twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego (wersja 1.0.1), możemy iterować (zbiorem wyjściowym jest D, całkę po nim możemy oszacować przez całkę po $D \cap H$, dalej ją możemy oszacować przez całkę po $D \cap H \cap H_1$, gdzie H_1 jest hiperpłaszczyzną w $\mathbb{C}^{n-1}$, przecinającą $D \cap H$. W ten sposób w każdym kroku dostaniemy zbiór pseudowypukły i ograniczony, o coraz mniejszym wymiarze, a więc dostaniemy oszacowanie całki po D, przez „całkę" po $D \cap H \cap ... \cap H_{n-1}$, co redukuje się do punktu (porównaj Wniosek 5.1.1)). Zastosowane do naszego przypadku ziterowane twierdzenie Ohsawy-Takegoshiego daje nam, że dla każdego $a \in \mathbb{C}$, istnieje funkcja holomorficzna f na D taka, że $f(z) = a$ i

$$\int_D |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda^{2n} \leq C_3 |a|^2 e^{-2m\varphi(z)},$$

gdzie C_3 zależy tylko od n (ilości kroków iteracyjnych) i średnicy D (formalnie też od średnic $D \cap H$, $D \cap H \cap H_1$,...,$D \cap H \cap ... \cap H_{n-1}$, ale wszystkie te średnice są majoryzowane przez średnicę D). Możemy wybrać takie a aby prawa strona wzoru była równa 1. Stąd mamy nierówność

$$\varphi_m(z) \overset{(5.1)}{\geq} \frac{1}{m} \log |f(z)| = \frac{1}{m} \log |a| = \varphi(z) - \frac{\log C_3}{2m}.$$

Powyższa nierówność implikuje $\nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z)$. Nierówność z tezy dla φ_m wykorzystujemy do

$$\sup_{\|x - z\|_{\mathbb{C}^n} < r} \varphi_m(x) \leq \sup_{\|\zeta - z\|_{\mathbb{C}^n} < 2r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}.$$

Stąd wynika, że

$$\nu(\varphi_m, x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\|x - z\|_{\mathbb{C}^n} < r} \varphi_m(z)}{\log r} \geq$$

$$\geq \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\|\zeta - x\|_{\mathbb{C}^n} < 2r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}}{\log 2r} . \frac{\log 2r}{\log r} = \nu(\varphi, x) - \frac{n}{m}$$

Ciąg φ_m ma następującą ciekawą własność (zobacz [DPS])

Twierdzenie 5.2.3 *Niech $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji zdefiniowanych w Twierdzeniu 5.2.2. Przy zachowaniu reszty założeń z tego twierdzenia, istnieje stała C taka, że ciąg $\{\varphi_{2^s} + \frac{C}{2^s}\}_{s=1}^{\infty}$ jest malejący.*

Dowód: Niech $f \in L^2(D, 2(m_1 + m_2)\varphi)$ będzie funkcją taką, że $\|f\|_{L^2(D, 2(m_1+m_2)\varphi)} \leq 1$. D możemy rozpatrywać jako przekątną $\{(z, z) : z \in D\}$ zbioru $D \times D$. Ze ziterowanego twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego (tym razem iterujemy ze zbioru o wymiarze rzeczywistym $4n$ ($D \times D$) do zbioru o wymiarze $2n$) istnieje funkcja

$$u \in \mathcal{O} \cap L^2(D \times D, 2m_1\varphi(z) + 2m_2\varphi(w))$$

taka, że $u_{|\{(z,z): z\in D\}\cong D} = f$ i

$$\int_{D\times D} |u(z,w)|^2 e^{-2m_1\varphi(z)-2m_2\varphi(w)} d\lambda^{2n}(z) d\lambda^{2n}(w) \le C_0 \int_D |f|^2 e^{-2(m_1+m_2)\varphi} d\lambda^{2n} \le C_0. \tag{5.2}$$

Niech $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $\{\sigma'_k\}_{k=1}^{\infty}$ będą bazami ortogonalnymi przestrzeni $L^2(D, 2m_1\varphi)$ i $L^2(D, 2m_2\varphi)$. W takim razie łatwo sprawdzić, że $\{\sigma_j \otimes \sigma'_k\}_{j,k=1}^{\infty}$, gdzie $\sigma_j \otimes \sigma'_k(z,w) := \sigma_j(z)\sigma'_k(w)$, jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{O} \cap L^2(D\times D, 2m_1\varphi(z) + 2m_2\varphi(w))$. Rozpisujemy u w tej bazie

$$u(z,w) = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_{j,k}\sigma_j(z)\sigma'_k(w)$$

Ponadto

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |c_{j,k}|^2 = \|u\|^2_{L^2(D\times D, 2m_1\varphi(z)+2m_2\varphi(w))} \overset{(5.2)}{\le} C_0.$$

A więc

$$\Big|\sum_{j,k=1}^{\infty} c_{j,k}\sigma_j\sigma'_k\Big| \overset{Tw.2.2.2}{\le} \Big(\sum_{j,k=1}^{\infty} |c_{j,k}|^2\Big)\Big(\sum_{j,k=1}^{\infty} |\sigma_j|^2|\sigma'_k|^2\Big) \tag{5.3}$$

$$|f(z)|^2 = |u(z,z)|^2 \overset{(5.3)}{\le} C_0\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\sigma(z)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\sigma'(z)|^2\Big) = C_0 e^{2m_1\varphi_{m_1}(z)} e^{2m_2\varphi_{m_2}(z)}.$$

Po zlogarytmowaniu dostajemy

$$2\log|f(z)| \le \log C_0 + 2m_1\varphi_{m_1}(z) + 2m_2\varphi_{m_2}(z),$$

dla dowolnego f takiego, że $\|f\|_{L^2(D,2(m_1+m_2)\varphi)} \le 1$. Wzór (5.1) daje nam, że

$$\varphi_{m_1+m_2}(z) = \sup_{f:\|f\|_{L^2(D,2(m_1+m_2)\varphi)}\le 1} \frac{1}{m_1+m_2}\log|f(z)|.$$

A więc przechodząc do supremum dostajemy

$$2(m_1+m_2)\varphi_{m_1+m_2}(z) \le \log C_0 + 2m_1\varphi_{m_1}(z) + 2m_2\varphi_{m_2}(z).$$

Wstawiając $m_1 = m_2 = 2^s$ dostajemy

$$\varphi_{2^{s+1}}(z) \le \frac{C}{2^{s+1}} + \varphi_{2^s}(z).$$

Ostatecznie

$$\varphi_{2^{s+1}}(z) + \frac{C}{2^{s+1}} \le \varphi_{2^s}(z) + \frac{C}{2^s}.$$

5.3 Twierdzenie Siu

W tej części przedstawimy dowód pewnej wersji twierdzenia Siu (zobacz [Siu]), autorstwa J.P.Demailly. Do tego celu wykorzystamy Twierdzenie 5.2.2.

Twierdzenie 5.3.1 (Siu) *Niech φ będzie plurisubharmoniczną funkcją na zbiorze otwartym D. Wtedy dla każdego $c > 0$, zbiór*

$$E_c(\varphi) := \{z \in D : \nu(\varphi, z) \geq c\}$$

jest analitycznym podzbiorem D.

Dowód: Analityczność zbioru jest własnością lokalną. Stąd możemy założyć, że D jest ograniczony (i pseudowypukły). Nierówności dotyczące liczb Lelonga w Twierdzeniu 5.2.2 dają nam

$$E_c(\varphi) = \bigcap_{m \geq m_0} E_{c-\frac{n}{m}}(\varphi_m).$$

$E_c(\varphi_m)$ jest zbiorem analitycznym, ponieważ jest on dany jako

$$\{z \in D : \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} \sigma_l(z) = 0, \ \forall l, \ \forall \alpha : |\alpha| < mc\}.$$

Stąd wynika, że $E_c(\varphi)$ jest przecięciem przeliczalnej ilości zbiorów analitycznych, a zatem jest zbiorem analitycznym (zobacz Definicje 2.1.23).

Literatura

[Be1] B.Berndtsson, *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman,* Ann.Inst.Fourier **46** (1996), 1083-1094.

[Be2] B.Berndtsson, *Weighted estimates for the $\overline{\partial}$-equation,* Complex Analysis and Geometry, Columbus, Ohio, 1999, Ohio State Univ., Math.Res. Inst.Publ. **9,** Walter de Gruyter, 2001, 43-57.

[Be3] B.Berndtsson, *Integral formulas and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem,* Sci. in China Ser. A **48** (2005), 61-73.

[Bl1] Z.Błocki, *The complex Monge-Ampère operator in pluripotential theory,* unfinished lecture notes.

[Bl2] Z.Błocki, *The Bergman metric and the pluricomplex Green function,* Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 2613-2625.

[Bl3] Z.Błocki, *Some estimates for the Bergman kernel and metric in terms of logarithmic capacity,* Nagoya Math. J. to appear.

[Ch] E.M.Chirka, *Kompleksnye analiticheskie mnozhestva,* Nauka, Moskwa, 1985.

[D1] J.P.Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète,* Ann.Sci.École Norm.Sup. **15** (1982), 457-511.

[D2] J.P.Demailly, *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory,* J.Alg.Geom. **1** (1992), 361-409.

[D3] J.P.Demailly, *On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem,* Proceedings of the Conference in honour of the 85th birthday of Pierre Lelong, Progress in Mathematics, Birkhäuser, **188** (2000), 47-82.

[DPS] J.P.Demailly, T.Peternell, M.Schneider, *Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds,* Internat.J.Math. **12** (2001), 689-741.

[D-H] K.Diederich, G.Herbort, *An alternative proof of an extension theorem of T.Ohsawa,* Michigan Math. J. **46** (1999), 347-360.

[Di] Ż.Dinew, *The Ohsawa-Takegoshi extension theorem on some unbounded sets,* preprint.

[E] R.Engelking, *Topologia Ogólna,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975.

[H] L.Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables,* North-Holland, 1989.

[F-K] G.Folland, J.Kohn, *The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex,* Princeton University Press, Princeton, 1972.

[J-J] P.Jakóbczak, M.Jarnicki, *Wstęp do Teorii Funkcji Holomorficznych Wielu Zmiennych Zespolonych,* Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 2002.

[J-P] M.Jarnicki, P.Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis - Revisited, Diss. Math.* **430** (2005), 1-192.

[K-A] L.Kantorovich, G.Akilov, *Funkcjonalnyj Analiz,* Nauka, Moskwa, 1977.

[K] S.Krantz, *Teoria Funkcji Wielu Zmiennych Zespolonych,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1991.

[O1] T.Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions III: negligible weights,* Math.Z. **219** (1995), 215-226.

[O2] T.Ohsawa, *Addendum to "On the Bergman kernel of hyperconvex domains",* Nagoya Math. J. **137** (1995), 145-148.

[O3] T.Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions V - effects of generalization,* Nagoya Math. J. **161** (2001), 1-21.

[O-T] T.Ohsawa, K.Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* Math.Z. **195** (1987), 197-204.

[Siu] Y.T.Siu, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and extension of closed positive currents,* Inv.Math. **27** (1974), 53-156.

[S] N.Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces,* Arch. Ration. Mech. Anal. **46** (1972), 212-217.