Równanie Monge'a-Ampère'a

Zbigniew Błocki
(Uniwersytet Jagielloński)

http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki

Minikonferencja 3 SSDNM
Kraków, 14 X 2011

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a:

$$\det D^2 u = f(x, u, Du)$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a:

$$\det D^2 u = f(x, u, Du)$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Przykłady:

1. Krzywizna Gaussa hiperpowierzchni $\operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \frac{\det D^2 u}{(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2}}$$

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a:

$$\det D^2 u = f(x, u, Du)$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Przykłady:

1. Krzywizna Gaussa hiperpowierzchni $\operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \frac{\det D^2 u}{(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2}}$$

2. Problem lokalnego zanurzenia M^2 w $\mathbb{R}^3$

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a:

$$\det D^2 u = f(x, u, Du)$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Przykłady:

1. Krzywizna Gaussa hiperpowierzchni $\operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \frac{\det D^2 u}{(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2}}$$

2. Problem lokalnego zanurzenia M^2 w $\mathbb{R}^3$

$$\det D^2 u = K(1 - |Du|^2) \quad \text{(równanie Darboux)}$$

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a:

$$\det D^2 u = f(x, u, Du)$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Przykłady:

1. Krzywizna Gaussa hiperpowierzchni $\operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \frac{\det D^2 u}{(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2}}$$

2. Problem lokalnego zanurzenia M^2 w $\mathbb{R}^3$

$$\det D^2 u = K(1 - |Du|^2) \quad \text{(równanie Darboux)}$$

$$\det(u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k) = \det(g_{ij})\, K\, (1 - g^{pq} u_p u_q)$$

3. Problem Weyla (Pogorełow/Nirenberg): dla dowolnej metryki g na S^2, t. że $K > 0$, (S^2, g) można zanurzyć w $\mathbb{R}^3$.

3. Problem Weyla (Pogorełow/Nirenberg): dla dowolnej metryki g na S^2, t. że $K > 0$, (S^2, g) można zanurzyć w $\mathbb{R}^3$.

Słabe rozwiązania (A.D. Aleksandrow)

3. Problem Weyla (Pogorełow/Nirenberg): dla dowolnej metryki g na S^2, t. że $K > 0$, (S^2, g) można zanurzyć w $\mathbb{R}^3$.

Słabe rozwiązania (A.D. Aleksandrow)

Jeżeli $u \in C^2(\Omega)$ jest funkcją ściśle wypukłą, to

$$\int_E \det D^2 u \, d\lambda = vol(Du(E)), \quad E \subset \Omega.$$

3. Problem Weyla (Pogorełow/Nirenberg): dla dowolnej metryki g na S^2, t. że $K > 0$, (S^2, g) można zanurzyć w $\mathbb{R}^3$.

Słabe rozwiązania (A.D. Aleksandrow)

Jeżeli $u \in C^2(\Omega)$ jest funkcją ściśle wypukłą, to

$$\int_E \det D^2 u \, d\lambda = vol(Du(E)), \quad E \subset \Omega.$$

Dla dowolnej funkcji wypukłej $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiujemy

$$Du(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : u(x) + \langle \cdot - x, y \rangle \leq u\}, \quad x \in \Omega,$$

$$Du(E) = \bigcup_{x \in E} Du(x), \quad E \subset \Omega,$$

$$MA(u)(E) := vol(Du(E)).$$

Twierdzenie (A.D. Aleksandrow)

Ω - ograniczony, ściśle wypukły obszar w $\mathbb{R}^n$,
$\varphi \in C(\partial\Omega)$, μ - miara regularna na Ω, t.że $\mu(\Omega) < \infty$.
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in CVX(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ MA(u) = \mu \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Twierdzenie (A.D. Aleksandrow)
Ω - ograniczony, ściśle wypukły obszar w $\mathbb{R}^n$,
$\varphi \in C(\partial\Omega)$, μ - miara regularna na Ω, t.że $\mu(\Omega) < \infty$.
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in CVX(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ MA(u) = \mu \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Globalna regularność
(Kryłow/Caffarelli-Nirenberg-Spruck)
$\partial\Omega \in C^\infty$, silnie wypukły, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$,
$\mu = f d\lambda$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f > 0$
$\Rightarrow\ u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Lokalna regularność

Przykład (Pogorełow): $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2\beta}$, $\beta \geq 0$, gdzie $x' = (x_2, \ldots, x_n)$.

Lokalna regularność

Przykład (Pogorełow): $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2\beta}$, $\beta \geq 0$,
gdzie $x' = (x_2, \ldots, x_n)$. Wtedy

$$\det(u_{x_i x_j}) = c(1+x_1^2)^{n-2}\left[(2\beta-1)-(2\beta+1)x_1^2\right]|x'|^{2(\beta n+1-n)}.$$

- u wypukła w otoczeniu $0 \Leftrightarrow \beta > 1/2$
- $\det(u_{x_i x_j})$ - gładkie i > 0, gdy $\beta = 1 - 1/n$.

Lokalna regularność

Przykład (Pogorełow): $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2\beta}$, $\beta \geq 0$, gdzie $x' = (x_2, \ldots, x_n)$. Wtedy

$\det(u_{x_i x_j}) = c(1+x_1^2)^{n-2}\left[(2\beta-1)-(2\beta+1)x_1^2\right]|x'|^{2(\beta n+1-n)}$.

- u wypukła w otoczeniu $0 \Leftrightarrow \beta > 1/2$
- $\det(u_{x_i x_j})$ - gładkie i > 0, gdy $\beta = 1 - 1/n$.

Zatem $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2(1-1/n)}$ (gdzie $n \geq 3$!) spełnia

$$MA(u) \in C^\infty, \quad MA(u) > 0, \quad u \notin W^{2,n(n-1)/2}_{loc}.$$

Lokalna regularność

Przykład (Pogorełow): $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2\beta}$, $\beta \geq 0$, gdzie $x' = (x_2, \ldots, x_n)$. Wtedy

$$\det(u_{x_i x_j}) = c(1+x_1^2)^{n-2}\left[(2\beta-1)-(2\beta+1)x_1^2\right]|x'|^{2(\beta n+1-n)}.$$

- u wypukła w otoczeniu $0 \Leftrightarrow \beta > 1/2$
- $\det(u_{x_i x_j})$ - gładkie i > 0, gdy $\beta = 1 - 1/n$.

Zatem $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2(1-1/n)}$ (gdzie $n \geq 3!$) spełnia

$$MA(u) \in C^\infty, \quad MA(u) > 0, \quad u \notin W^{2,n(n-1)/2}_{loc}.$$

Twierdzenie (Urbas) $n \geq 3$, $u \in CVX \cap W^{2,p}_{loc}$ dla pewnego $p > n(n-1)/2$. Wtedy

$$(*) \qquad MA(u) \in C^\infty,\ MA(u) > 0 \ \Rightarrow\ u \in C^\infty.$$

Lokalna regularność

Przykład (Pogorełow): $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2\beta}$, $\beta \geq 0$, gdzie $x' = (x_2, \ldots, x_n)$. Wtedy

$$\det(u_{x_i x_j}) = c(1+x_1^2)^{n-2}\left[(2\beta-1)-(2\beta+1)x_1^2\right]|x'|^{2(\beta n+1-n)}.$$

- u wypukła w otoczeniu $0 \Leftrightarrow \beta > 1/2$
- $\det(u_{x_i x_j})$ - gładkie i > 0, gdy $\beta = 1 - 1/n$.

Zatem $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2(1-1/n)}$ (gdzie $n \geq 3$!) spełnia

$$MA(u) \in C^\infty, \quad MA(u) > 0, \quad u \notin W^{2,n(n-1)/2}_{loc}.$$

Twierdzenie (Urbas) $n \geq 3$, $u \in CVX \cap W^{2,p}_{loc}$ dla pewnego $p > n(n-1)/2$. Wtedy

$$(*) \qquad MA(u) \in C^\infty,\ MA(u) > 0 \ \Rightarrow\ u \in C^\infty.$$

Twierdzenie (Pogorełow) $n = 2,\ u \in CVX \ \Rightarrow\ (*)$

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a (CMA)

$$\det(u_{j\bar{k}}) = f(z, u, Du),$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, jest funkcją plurisubharmoniczną (psh), tj. $(u_{j\bar{k}}) \geq 0$

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a (CMA)

$$\det(u_{j\bar{k}}) = f(z, u, Du),$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, jest funkcją plurisubharmoniczną (psh), tj. $(u_{j\bar{k}}) \geq 0$

Przykłady zastosowań geometrycznych:

1. Krzywiznę Ricciego na rozmaitościach kählerowskich można wyrazić przy pomocy operatora MA, hipoteza Calabiego oraz problem istnienia metryk Kählera-Einsteina sprowadzają się do rozwiązania niezdegenerowanego CMA (Yau).

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a (CMA)

$$\det(u_{j\bar{k}}) = f(z, u, Du),$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, jest funkcją plurisubharmoniczną (psh), tj. $(u_{j\bar{k}}) \geq 0$

Przykłady zastosowań geometrycznych:

1. Krzywiznę Ricciego na rozmaitościach kählerowskich można wyrazić przy pomocy operatora MA, hipoteza Calabiego oraz problem istnienia metryk Kählera-Einsteina sprowadzają się do rozwiązania niezdegenerowanego CMA (Yau).

2. Równanie dla geodezyjnych w przestrzeni metryk kählerowskich jest równoważne jednorodnemu CMA (Mabuchi, Semmes, Donaldson).

Słabe rozwiązania

Słabe rozwiązania

Przykład (Shiffman-Taylor/Kiselman)

$$u(z) = (-\log|z_1|)^{1/n}(|z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - 1)$$

- u jest psh w otoczeniu 0
- u jest gładka na $\{z_1 \neq 0\}$
- $\det(u_{j\bar{k}})$ nie jest całkowalne w pobliżu $\{z_1 = 0\}$

Słabe rozwiązania

Przykład (Shiffman-Taylor/Kiselman)

$$u(z) = (-\log|z_1|)^{1/n}(|z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - 1)$$

- u jest psh w otoczeniu 0
- u jest gładka na $\{z_1 \neq 0\}$
- $\det(u_{j\bar{k}})$ nie jest całkowalne w pobliżu $\{z_1 = 0\}$

$d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$, $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u = 4^n n! \det(u_{j\bar{k}})\, d\lambda$$

Słabe rozwiązania

Przykład (Shiffman-Taylor/Kiselman)

$$u(z) = (-\log|z_1|)^{1/n}(|z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - 1)$$

- u jest psh w otoczeniu 0
- u jest gładka na $\{z_1 \neq 0\}$
- $\det(u_{j\bar{k}})$ nie jest całkowalne w pobliżu $\{z_1 = 0\}$

$d = \partial + \bar\partial$, $d^c = i(\bar\partial - \partial)$, $dd^c = 2i\partial\bar\partial$

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u = 4^n n! \det(u_{j\bar{k}})\, d\lambda$$

Twierdzenie (Bedford-Taylor) Dla $u \in PSH \cap L^\infty_{loc}$ można dobrze zdefiniować miarę regularną $(dd^c u)^n$, t.że jest ona ciągła dla ciągów monotonicznych.

Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$u \in \mathcal{D}$ jeżeli $\exists$ miara μ, t.że $\forall$ $u_j \in PSH \cap C^\infty$, $u_j \downarrow u$, mamy $(dd^c u_j)^n \rightsquigarrow \mu$

Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$u \in \mathcal{D}$ jeżeli $\exists$ miara μ, t.że $\forall\ u_j \in PSH \cap C^\infty$, $u_j \downarrow u$, mamy $(dd^c u_j)^n \rightsquigarrow \mu$

Można łatwo pokazać, że $\mathcal{D}$ jest maksymalną podklasą klasy funkcji psh, w której można dobrze zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a tak, że jest on ciągły względem ciągów malejących.

Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$u \in \mathcal{D}$ jeżeli $\exists$ miara μ, t.że $\forall\ u_j \in PSH \cap C^\infty$, $u_j \downarrow u$, mamy $(dd^c u_j)^n \rightsquigarrow \mu$

Można łatwo pokazać, że $\mathcal{D}$ jest maksymalną podklasą klasy funkcji psh, w której można dobrze zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a tak, że jest on ciągły względem ciągów malejących.

$n = 2$

$$\int \varphi (dd^c u)^2 = -\int du \wedge d^c u \wedge dd^c \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$u \in \mathcal{D}$ jeżeli $\exists$ miara μ, t.że $\forall\ u_j \in PSH \cap C^\infty$, $u_j \downarrow u$, mamy $(dd^c u_j)^n \rightsquigarrow \mu$

Można łatwo pokazać, że $\mathcal{D}$ jest maksymalną podklasą klasy funkcji psh, w której można dobrze zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a tak, że jest on ciągły względem ciągów malejących.

$n = 2$

$$\int \varphi (dd^c u)^2 = -\int du \wedge d^c u \wedge dd^c \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Twierdzenie (B.) $n = 2 \ \Rightarrow\ \mathcal{D} = PSH \cap W^{1,2}_{loc}$

Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$u \in \mathcal{D}$ jeżeli $\exists$ miara μ, t.że $\forall\ u_j \in PSH \cap C^\infty$, $u_j \downarrow u$, mamy $(dd^c u_j)^n \rightsquigarrow \mu$

Można łatwo pokazać, że $\mathcal{D}$ jest maksymalną podklasą klasy funkcji psh, w której można dobrze zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a tak, że jest on ciągły względem ciągów malejących.

$n = 2$

$$\int \varphi (dd^c u)^2 = -\int du \wedge d^c u \wedge dd^c \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Twierdzenie (B.) $n = 2 \ \Rightarrow\ \mathcal{D} = PSH \cap W^{1,2}_{loc}$
Można również scharakteryzować $\mathcal{D}$ dla $n \geq 3$.

Problem Dirichleta

Twierdzenie (Bedford-Taylor)

Ω - ograniczony, silnie pseudowypukły obszar w $\mathbb{C}^n$
$f \in C(\bar{\Omega})$, $f \geq 0$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ (dd^c u)^n = f\, d\lambda \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Problem Dirichleta

Twierdzenie (Bedford-Taylor)

Ω - ograniczony, silnie pseudowypukły obszar w $\mathbb{C}^n$
$f \in C(\bar{\Omega})$, $f \geq 0$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ (dd^c u)^n = f\, d\lambda \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Kołodziej: wystarczy założyć, że $f \in L^p(\Omega)$ dla pewnego $p > 1$

Problem Dirichleta

Twierdzenie (Bedford-Taylor)

Ω - ograniczony, silnie pseudowypukły obszar w $\mathbb{C}^n$
$f \in C(\bar{\Omega})$, $f \geq 0$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ (dd^c u)^n = f\, d\lambda \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Kołodziej: wystarczy założyć, że $f \in L^p(\Omega)$ dla pewnego $p > 1$

B.: wystarczy założyć, że Ω jest hiperwypukły i że φ można przedłużyć do pewnego $v \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Globalna regularność (Kryłow/Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck)

$\partial\Omega \in C^\infty$, silnie pseudowypukły, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f > 0 \Rightarrow\ u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Globalna regularność
(Kryłow/Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck)
$\partial\Omega \in C^\infty$, silnie pseudowypukły, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$,
$f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f > 0 \Rightarrow \; u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Twierdzenie (Cheng-Yau, Mok-Yau)
Ω - ograniczony obszar pseudowypukły w $\mathbb{C}^n$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in PSH \cap C^\infty(\Omega) \\ (\det(u_{j\bar{k}}) = e^{(n+1)u} \\ u = \infty \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

$u_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k$ jest jedyną zupełną metryką
Kählera-Einsteina na Ω.

Lokalna regularność

Przykład: $u(z) = (1 + |z_1|^2)|z'|^{2(1-1/n)}$

• $u \in PSH(\mathbb{C}^n) \setminus W^{2,n(n-1)}_{loc}$

• $\det(u_{j\bar{k}}) = c(1 + |z_1|^2)^{n-2}$

W szczególności, dla $u(z_1, z_2) = 2(1 + |z_1|^2)|z_2|$ mamy $\det(u_{j\bar{k}}) = 1$.

Lokalna regularność

Przykład: $u(z) = (1 + |z_1|^2)|z'|^{2(1-1/n)}$

• $u \in PSH(\mathbb{C}^n) \setminus W^{2,n(n-1)}_{loc}$

• $\det(u_{j\bar{k}}) = c(1 + |z_1|^2)^{n-2}$

W szczególności, dla $u(z_1, z_2) = 2(1 + |z_1|^2)|z_2|$ mamy $\det(u_{j\bar{k}}) = 1$.

Przypadek $n = 2$ dla zespolonego równania MA nie jest wyjątkowy!

Lokalna regularność

Przykład: $u(z) = (1 + |z_1|^2)|z'|^{2(1-1/n)}$

- $u \in PSH(\mathbb{C}^n) \setminus W^{2,n(n-1)}_{loc}$
- $\det(u_{j\bar{k}}) = c(1 + |z_1|^2)^{n-2}$

W szczególności, dla $u(z_1, z_2) = 2(1 + |z_1|^2)|z_2|$ mamy $\det(u_{j\bar{k}}) = 1$.

Przypadek $n = 2$ dla zespolonego równania MA nie jest wyjątkowy!

Twierdzenie (B.-S. Dinew) $u \in PSH \cap W^{2,p}_{loc}$ dla pewnego $p > n(n-1)$. Wtedy

$$\det(u_{j\bar{k}}) \in C^\infty,\ \det(u_{j\bar{k}}) > 0 \ \Rightarrow\ u \in C^\infty.$$

CMA w geometrii kählerowskiej

CMA w geometrii kählerowskiej

(M,ω) - zwarta rozmaitość kählerwska wymiaru n,
tzn. lok. $\omega = g_{j\bar{k}} i dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$, $d\omega = 0$

CMA w geometrii kählerowskiej

(M, ω) - zwarta rozmaitość kählerwska wymiaru n,
tzn. lok. $\omega = g_{j\bar{k}} i dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$, $d\omega = 0$

$$Ric_\omega = -dd^c(\log \det(g_{j\bar{k}}))$$

CMA w geometrii kählerowskiej

(M, ω) - zwarta rozmaitość kählerwska wymiaru n,
tzn. lok. $\omega = g_{j\bar{k}} i dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$, $d\omega = 0$

$$Ric_\omega = -dd^c(\log \det(g_{j\bar{k}}))$$

$$Ric_\omega - Ric_{\widetilde{\omega}} = dd^c \log \frac{\widetilde{\omega}^n}{\omega^n}$$

CMA w geometrii kählerowskiej

(M,ω) - zwarta rozmaitość kählerwska wymiaru n,
tzn. lok. $\omega = g_{j\bar{k}} i dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$, $d\omega = 0$

$$Ric_\omega = -dd^c(\log\det(g_{j\bar{k}}))$$

$$Ric_\omega - Ric_{\widetilde{\omega}} = dd^c \log \frac{\widetilde{\omega}^n}{\omega^n}$$

$$c_1(M) = \{Ric_\omega\}$$

CMA w geometrii kählerowskiej

(M, ω) - zwarta rozmaitość kählerwska wymiaru n,
tzn. lok. $\omega = g_{j\bar{k}} i dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$, $d\omega = 0$

$$Ric_\omega = -dd^c(\log\det(g_{j\bar{k}}))$$

$$Ric_\omega - Ric_{\widetilde{\omega}} = dd^c \log \frac{\widetilde{\omega}^n}{\omega^n}$$

$$c_1(M) = \{Ric_\omega\}$$

Hipoteza Calabiego: Odwzorowanie

$$\{\omega\} \ni \widetilde{\omega} \longmapsto Ric_{\widetilde{\omega}} \in c_1(M)$$

jest surjekcją.

Twierdzenie (Yau) (M,ω) - zwarta rozm. kählerowska
$f \in C^\infty(M)$, $f>0$, t.że $\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty(M),\ \omega + dd^c\varphi > 0 \\ (\omega + dd^c\varphi)^n = f\,\omega^n \\ \int_M \varphi\omega^n = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie (Yau) (M, ω) - zwarta rozm. kählerowska
$f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, t.że $\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty(M), \ \omega + dd^c\varphi > 0 \\ (\omega + dd^c\varphi)^n = f\,\omega^n \\ \int_M \varphi\omega^n = 0. \end{cases}$$

Słabe rozwiązania

Twierdzenie (Yau) (M, ω) - zwarta rozm. kählerowska
$f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, t.że $\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty(M),\ \omega + dd^c\varphi > 0 \\ (\omega + dd^c\varphi)^n = f\,\omega^n \\ \int_M \varphi\omega^n = 0. \end{cases}$$

Słabe rozwiązania

Jednoznaczność (B.): $\varphi, \psi \in L^\infty(M)$, $\omega + dd^c\varphi \geq 0$,
$\omega + dd^c\psi \geq 0$, $(\omega + dd^c\varphi)^n = (\omega + dd^c\psi)^n$
$\Rightarrow\ \varphi - \psi = const$

Twierdzenie (Yau) (M, ω) - zwarta rozm. kählerowska
$f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, t.że $\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty(M),\ \omega + dd^c\varphi > 0 \\ (\omega + dd^c\varphi)^n = f\,\omega^n \\ \int_M \varphi\omega^n = 0. \end{cases}$$

Słabe rozwiązania

Jednoznaczność (B.): $\varphi, \psi \in L^\infty(M)$, $\omega + dd^c\varphi \geq 0$,
$\omega + dd^c\psi \geq 0$, $(\omega + dd^c\varphi)^n = (\omega + dd^c\psi)^n$
$\Rightarrow\ \varphi - \psi = const$

Istnienie (Kołodziej): $f \in L^p(M)$ dla pewnego $p > 1$
$(f \geq 0)\ \Rightarrow\ \exists$ ciągłe rozwiązanie