Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a w geometrii kählerowskiej

Zbigniew Błocki

(Uniwersytet Jagielloński)

http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki

II Forum Matematyków Polskich

Częstochowa, 1 lipca 2008

Rozmaitości kählerowskie

M - rozmaitość zespolona
$J : TM \to TM$ - endomorfizm dany lokalnie przez

$$J(\partial/\partial x^j) = \partial/\partial y^j, \quad J(\partial/\partial y^j) = -\partial/\partial x^j$$

przedłuża się $\mathbb{C}$-liniowo do $J : T_{\mathbb{C}}M \to T_{\mathbb{C}}M$, t. że

$$J(\partial_j) = i\partial_j, \quad J(\partial_{\bar{j}}) = -i\partial_{\bar{j}},$$

gdzie $\partial_j := \partial/\partial z^j$, $\partial_{\bar{j}} := \partial/\partial \bar{z}^j$.

$Uwaga$: Dla dowolnej rozmaitości rzeczywistej M i $J : TM \to TM$ spełn. $J^2 = -id$, J $pochodzi$ od pewnej struktury zespolonej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0$$

dla $X, Y \in TM$ (Newlander-Nirenberg, 1957).

$h : TM \times TM \to \mathbb{C}$ - forma hermitowska

Lokalnie: $h = g_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k$, gdzie $\overline{g_{j\bar{k}}} = g_{k\bar{j}}$, $(g_{j\bar{k}}) > 0$.

Formę hermitowską można utożsamiać z dodatnią $(1,1)$-formą

$$\omega := g_{j\bar{k}}\, i dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

Metryka riemannowska $Re\, h$ generuje koneksję Levi-Civity ∇ na M. Można pokazać, że

$$\nabla J = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla\omega = 0 \;\Leftrightarrow\; d\omega = 0 \;\Leftrightarrow\; g_{j\bar{k}} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}$$

(lokalnie dla pewnej gładkiej funkcji g)

Mówimy wtedy, że (1,1)-forma ω jest kählerowska.

(Innymi słowy, gładka (1,1)-forma ω jest kählerowska, jeżeli $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$ oraz $d\omega = 0$.)

Dla zwartej rozmaitości kählerowskiej (M, ω) mamy $b_{2k}(M) \neq 0$ (bo $\{\omega^k\} \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$).

Przykład (powierzchnia Hopfa):

$$M = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$M \simeq S^1 \times S^3 \;\Rightarrow\; b_2(M) = 0$
Na M nie istnieje żadna forma kählerowska.

(p,q)-formy i operatory ∂, $\bar\partial$, d^c

Zespolone (p,q)-formy (lokalnie):

$$\sum_{|J|=p,|K|=q}{}' f_{JK} dz^J \wedge d\bar z^K,$$

gdzie $J = (j_1, \ldots, j_p)$, $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$,
$dz^J = dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p}$ (i podobnie dla K).

$$\partial : C^\infty_{(p,q)} \to C^\infty_{(p+1,q)}, \quad \bar\partial : C^\infty_{(p,q)} \to C^\infty_{(p,q+1)}$$

$$\partial f := \sum_j \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j, \quad \partial(f\, dz^J \wedge d\bar z^K) := \partial f \wedge dz^J \wedge d\bar z^K,$$

$$\bar\partial f := \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar z^j} dz^j, \quad \bar\partial(f\, dz^J \wedge d\bar z^K) := \bar\partial f \wedge dz^J \wedge d\bar z^K.$$

$d = \partial + \bar{\partial}$, $d^2 = 0 \;\Rightarrow\; \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0,\; \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$

$d^c := \frac{i}{2}(\bar{\partial} - \partial)$ - operator rzeczywisty (odwzorowuje formy rzeczywiste w formy rzeczywiste) zależny od struktury zespolonej na M

$dd^c = i\partial\bar{\partial}$

Lemat „dd^c". Na zwartej rozmaitości kählerowskiej d-dokładne (p, q)-formy są dd^c-dokładne.

Dowód: teoria Hodge'a $+$ lokalne wzory na przemienność pewnych operatorów na rozmaitości kählerowskiej.

Pierwsza klasa Cherna

$\omega = g_{j\bar{k}}\, i dz^j \wedge d\bar{z}^k$ - forma kählerowska na M
Można pokazać, że $Ric_\omega = -dd^c \log\det(g_{j\bar{k}})$.
Jeżeli $\widetilde{\omega} = \widetilde{g}_{j\bar{k}}\, i dz^j \wedge d\bar{z}^k$ jest inną formą kählerowską na M, to

$$Ric_\omega - Ric_{\widetilde{\omega}} = dd^c \varphi,$$

gdzie

$$\varphi = \log \frac{\det(\widetilde{g}_{j\bar{k}})}{\det(g_{j\bar{k}})}$$

jest globalnie zdefiniowaną funkcją na M.

$\{Ric_\omega\} =: c_1(M) \; (= c_1(M)_{\mathbb{R}}/2\pi)$

(M, ω) - zwarta rozmaitość kählerowska

Hipoteza Calabiego (1954) Dla dowolnej $(1,1)$-formy $R \sim Ric_\omega$ istnieje metryka kählerowska $\widetilde{\omega} \sim \omega$ taka, że $R = Ric_{\widetilde{\omega}}$.

Mamy $R = Ric_\omega + dd^c\eta$ dla pewnego $\eta \in C^\infty(M)$, szukamy $\varphi \in C^\infty(M)$, t.że $\omega + dd^c\varphi > 0$ oraz

$$\det(g_{j\bar{k}} + \varphi_{j\bar{k}}) = e^{-\eta+c} \det(g_{j\bar{k}})$$

dla pewnej stałej c. Równoważnie:

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = e^{-\eta+c}\omega^n.$$

Stała c jest jednoznacznie determinowana przez warunek

$$\int_M e^{-\eta+c}\omega^n = \int_M \omega^n.$$

Rozwiązanie hipotezy Calabiego jest więc równoważne udowodnieniu następującego rezultatu:

Twierdzenie (Yau, 1976). $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, t.że

$$\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n.$$

Wtedy istnieje jedyne (z dokł. do stałej) $\varphi \in C^\infty(M)$, t.że $\omega + dd^c\varphi > 0$ oraz

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n.$$

(M, ω) - zwarta rozmaitość kählerowska

Hipoteza Calabiego (1954) Dla dowolnej $(1,1)$-formy $R \sim Ric_\omega$ istnieje metryka kählerowska $\widetilde{\omega} \sim \omega$ taka, że $R = Ric_{\widetilde{\omega}}$.

$$\mathcal{H} := \{\omega + dd^c\varphi : \varphi \in C^\infty(M),\ \omega + dd^c\varphi > 0\}$$

Odwzorowanie

$$\mathcal{H} \ni \widetilde{\omega} \longmapsto Ric_{\widetilde{\omega}} \in c_1(M)$$

jest bijekcją.

Wniosek. Jeżeli $c_1(M) = 0$, to istnieje jedyna metryka kählerowska o znikającej krzywiźnie Ricciego.

Twierdzenie (Yau, 1976). $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, t.że

$$\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n.$$

Wtedy istnieje jedyne (z dokł. do stałej) $\varphi \in C^\infty(M)$, t.że $\omega + dd^c\varphi > 0$ oraz

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n.$$

Podstawowe etapy w dowodzie:

- jednoznaczność rozwiązań;
- $metoda\ ciągłości$ redukująca problem do oszacowań a priori;
- oszacowanie a priori na normę L^∞ rozwiązania;
- oszacowanie a priori na normę C^2 rozwiązania;
- oszacowanie a priori na normę $C^{2,\alpha}$ rozwiązania.

Twierdzenie (Kołodziej, 1998). Załóżmy, że $\varphi \in C^2(M)$, $\omega + dd^c\varphi \geq 0$ oraz

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n.$$

Dla $p > 1$ istnieje stała $C > 0$, zależna od M, p oraz $||f||_{L^p(M)}$, t.że

$$\operatorname{osc}\varphi := \sup_M \varphi - \inf_M \varphi \leq C.$$

Twierdzenie (Aubin, Yau, 1976, B., 2003, B., 2008). Załóżmy, że $\varphi \in C^4(M)$, $\omega + dd^c\varphi > 0$ oraz

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n.$$

Istnieje stała $C > 0$, zależna od $\sup \operatorname{osc}\varphi$, $\sup f$, $\inf f^{1/(n-1)}\Delta(\log f)$, n, $\sup$ scal, $\inf$ bisec, t.że

$$\Delta\varphi \leq C.$$

Teoria Evansa-Kryłowa, 1982-1983

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0$$

$(\partial F/\partial u_{jk}) > 0$, F wklęsłe wzgl. D^2u
Wtedy lokalnie można oszacować normę $C^{2,\alpha}$ rozwiązania przy pomocy normy C^2.

Odwzorowanie $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ jest wklęsłe na zbiorze dodatnich macierzy hermitowskich.

Twierdzenie. Niech $u \in C^4(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{C}^n$), $(u_{j\bar{k}}) > 0$, $f := \det(u_{j\bar{k}})$. Wtedy dla $\Omega' \subset\subset \Omega$ istnieje $\alpha \in (0,1)$ zależne od n, $||u||_{C^1(\Omega)}$, $sup\,\Delta u$, $||f||_{C^1(\Omega)}$, $\inf f$, oraz $C > 0$ zależne w dodatku od dist$(\Omega', \partial\Omega)$, t.że

$$||u||_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \le C.$$

Przestrzeń metryk kählerowskich (Mabuchi, 1987)

(M, ω) - zwarta przestrzeń kählerowska

$$\mathcal{H} = \{\omega + dd^c\varphi : \varphi \in C^\infty(M),\ \omega + dd^c\varphi > 0\}$$

$\mathcal{H}$ możemy traktować jako otwarty podzbiór $C^\infty(M)$, a więc dla $\varphi \in \mathcal{H}$ przestrzenią styczną $T_\varphi\mathcal{H}$ jest $C^\infty(M)$. Na $T_\varphi\mathcal{H}$ definiujemy normę

$$||\psi||_\varphi^2 := \frac{1}{n!}\int_M \psi^2(\omega + dd^c\varphi)^n, \quad \psi \in T_\varphi\mathcal{H}.$$

Długość krzywej $\Phi \in C^\infty([1,2], \mathcal{H}) \subset C^\infty([1,2]\times M)$:

$$l(\Phi) := \int_1^2 ||\dot{\varphi}_t||_{\varphi_t} dt.$$

Powyższa metryka (riemannowska) na $\mathcal{H}$ determinuje koneksję Levi-Civity. Równanie geodezyjnej ma postać

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}||\nabla\dot{\varphi}||^2_{\varphi} = 0.$$

Można pokazać (Semmes, 1993, Donaldson, 1997), że jest ono równoważne równaniu

$$\det \begin{pmatrix} & & & \dot{\varphi}_1 \\ & (g_{j\bar{k}} + \varphi_{j\bar{k}}) & & \vdots \\ & & & \dot{\varphi}_n \\ \dot{\varphi}_{\bar{1}} & \dots & \dot{\varphi}_{\bar{n}} & \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = 0$$

Znalezienie geodezyjnej łączącej metryki $\omega + dd^c\varphi_1$ oraz $\omega + dd^c\varphi_2 \in \mathcal{H}$ jest równoważne rozwiązaniu jednorodnego równania Monge'a-Ampère'a

$$(\Omega + dd^c\varphi)^{n+1} = 0$$

na zwartej rozmaitości kählerowskiej z brzegiem $M \times \{1 \leq |z_{n+1}| \leq 2\}$, gdzie

$$\Omega := \omega + dd^c|z_{n+1}|^2,$$

przy warunku brzegowym

$$\varphi = \varphi_j \quad \text{na } M \times \{|z_{n+1}| = j\},\ j = 1, 2.$$

Hipotezy Donaldsona (1997):

1. Dowolne metryki $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}$ można połączyć geodezyjną klasy C^∞.

2. $d(\omega_1, \omega_2) := \inf\{l(\Phi) : \Phi$ - krzywa łącząca ω_1 z $\omega_2\}$ jest metryką na $\mathcal{H}$.

Twierdzenie (X.X.Chen, 2001). 1. Dowolne metryki $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}$ można połączyć geodezyjną klasy $C^{1,1}$.

2. d jest metryką.

Twierdzenie (B., 2008). Załóżmy, że $\varphi \in C^3(M)$, $\omega + dd^c\varphi > 0$ oraz

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n.$$

Istnieje stała $C > 0$, zależna od $\sup \operatorname{osc} \varphi$, $\sup f$, $\sup |\nabla f^{1/n}|$, n, $\inf$ bisec, t.że

$$|\nabla\varphi| \le C.$$

Twierdzenie (Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck, 1985).
Ω - ograniczony, gładki, silnie pseudowypukły (np. kula) obszar w $\mathbb{C}^n$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f > 0$, $h \in C^\infty(\partial\Omega)$. Wtedy istnieje dokł. jedno $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, t.że $(u_{j\bar{k}}) > 0$,

$$\det(u_{j\bar{k}}) = f \ \text{ w } \Omega, \quad u = h \ \text{ na } \partial\Omega.$$

Przykład (Gamelin-Sibony, 1980)
$\mathbb{B} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 < 1\}$
$h(z,w) = \left(|z|^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(|w|^2 - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (z,w) \in \partial\mathbb{B}.$
Wtedy $u(z,w) = \left(\max\left\{|z|^2 - \frac{1}{2}, |w|^2 - \frac{1}{2}, 0\right\}\right)^2$ jest klasy $C^{1,1}$ (ale nie C^2!), $(u_{j\bar{k}}) \geq 0$, $\det(u_{j\bar{k}}) = 0$ oraz $u = h$ na $\partial\mathbb{B}$.