UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
INSTYTUT MATEMATYKI

Regularność zespolonego równania Monge'a-Ampère'a

Szymon Pliś

ROZPRAWA DOKTORSKA

promotor: dr hab. Zbigniew Błocki

Kraków 2007

Spis treści

Wstęp

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a zaczęło być intensywnie badane w latach siedemdziesiątych. Najsłynniejszym wynikiem jest twierdzenie Yau [**Y**], które było w istocie rozwiązaniem tego równania na zwartych rozmaitościach kählerowskich. Dało ono pozytywną odpowiedź na ważne hipotezy w geometrii zespolonej, postawione w latach pięćdziesiątych przez Calabiego, i było jedną z głównych przyczyn przyznania Yau medalu Fieldsa w 1982 r.

Powodem, dla którego zespolony operator Monge'a-Ampére'a jest bardzo przydatny w geometrii jest fakt, że krzywizna Ricciego rozmaitości kählerowskich wyraża się przy jego pomocy. W związku z tym np. znalezienie metryki zupełnej Kählera-Einsteina (co jest również często ważne dla fizyków) sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego równania Monge'a-Ampère'a. Równanie to ma także związki z jądrem Bergmana, badane w pracy Feffermana [**F**] (zob. także [**C-Y**]).

Jeszcze przed pracą Yau ukazał się artykuł Bedforda i Taylora [**B-T1**], w którym pokazali oni istnienie ciągłych rozwiązań problemu Dirichleta dla zespolonego równania Monge'a-Ampère'a w obszarach ściśle pseudowypukłych w $\mathbb{C}^n$. Okazało się to fundamentalnym rezultatem pozwalającym na rozwój teorii pluripotencjału, której najważniejsze rezultaty zostały udowodnione przez tych samych autorów w pracy [**B-T2**]. Operator Monge'a-Ampère'a pełni w tej teorii podobną rolę jak laplasian w teorii potencjału.

Z punktu widzenia równań różniczkowych cząstkowych bardzo ważną pracą w teorii zespolonego równania Monge'a-Ampère'a był artykuł [**C-K-N-S**], gdzie autorzy wykazali istnienie gładkich rozwiązań problemu Dirichleta w obszarach ściśle pseudowypukłych w $\mathbb{C}^n$. Wcześniej analogiczny rezultat dla rzeczywistego równania Monge'a-Ampère'a udowodniono w pracy [**C-N-S**] (podobne rezultaty zostały też wykazane niezależnie przez Krylowa). Zarówno w pracy Yau [**Y**], jak i [**C-K-N-S**] (oraz [**C-N-S**]) sposobem konstruowania rozwiązań jest metoda ciągłości, która sprowadza całe zagadnienie do udowodnienia odpowiednich oszacowań a priori.

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a jest również wykorzystywane w geometrii, jednak nie do badania krzywizny Ricciego, tak więc z geometrycznego punktu widzenia przypadek rzeczywisty i zespolony są dość różne. Z kolei z punktu widzenia równań różniczkowych metody stosowane w przypadku rzeczywistym i zespolonym są często podobne. Z drugiej strony bardzo często zdarza się jednak, że przypadek zespolony jest znacznie trudniejszy niż rzeczywisty. Celem tej pracy jest udowodnienie pewnych rezultatów dotyczących regularności rozwiązań równania zespolonego, które znane są już w przypadku rzeczywistym, jednak odpowiednich metod z przypadku rzeczywistego nie da sie bezpośrednio zastosować w przypadku zespolonym.

Guan, Trudinger i Wang w pracy [**G-T-W**] udowodnili optymalną regularność zdegenerowanego rzeczywistego równania Monge'a-Ampère'a. W rozdziale 2 wykazano częściowy analogiczny rezultat w przypadku zespolonym, w przypadku, gdy wartości brzegowe znikają. Pokazano jednak w szczególności, podobnie jak w [**G-T-W**] dla przypadku rzeczywistego, optymalność wykładnika $1/(n-1)$.

W rozdziale 3 udowodniono gładkość (C^∞) rozwiązań pewnego zespolonego równania Monge'a-Ampére'a, będącego uogólnieniem równania badanego w pracy Chenga i Yau [**C-Y**], przy nieskończonym warunku brzegowym. W pracy doktorskiej Ivarssona [**I1**] (zob. także [**I2**]) pokazano, że takie rozwiązania spełniają lokalnie warunek Lipschitza.

Na początku ustalimy pewne podstawowe oznaczenia i definicje. Potem w preliminariach zaprezentujemy niektóre twierdzenia dotyczące teorii operatora i równania Monge'a-Ampère'a, najpierw w przypadku lokalnym, to znaczy na obszarach w $\mathbb{C}^n$, a potem w przypadku rozmaitości kählerowskich. Następnie przedstawimy teorię równania Monge'a-Ampère'a w przypadku zdegenerowanym, oraz dalej z nieskończonym warunkiem brzegowym, co bezpośrednio wprowadzi nas w tematykę drugiego i trzeciego rozdziału, w których znajdują się wyniki własne autora. Na końcu preliminariów podamy pewne twierdzenia, które będą dla nas przydatne w dalszej części pracy.

Oczywiście w tym doktoracie zostanie pokazana tylko mała część teorii operatora Monge'a-Ampère'a i jego zastosowań. Jest wiele dobrych opracowań na ten temat, na przykład [**B6**], [**D1, D2**], [**K**] i [**K2**]. Dobrą książką dotyczącą rozmaitości kählerowskich jest [**T**], dotyczy ich też [**B7**] (raczej z punktu widzenia równania Monge'a-Ampère'a niż geometrii), gdzie zostały zaprezentowane dwie wersje dowodu (najtrudniejszego) oszacowania rozwiązania w normie L^∞, pierwsza klasyczną metodą Yau (uproszczoną przez innych) a druga metodą Kołodzieja. Godną polecenia książką o równaniach eliptycznych jest [**G-T**]. W [**M**] znajduje się bogata bibliografia o równaniach eliptycznych w kontekście warunku brzegowego $+\infty$.

Autor chciałby złożyć szczególne podziekowania dr. hab. Zbigniewowi Błockiemu — za temat pracy, cenne wskazówki i dyskusje, ogromną pomoc w trakcie pisania tej pracy oraz za cierpliwość; mamie - za cenne uwagi; żonie - za to, że przy nim była w trakcie pisania tej pracy i wszystkim innym którzy się przyczynili do jej powstania.

Praca była częściowo finansowana z projektu promotorskiego MNiSW nr 3342/H03/2006/31.

Podstawowe oznaczenia i definicje

Podamy tu niektóre podstawowe oznaczenia i definicje wykorzystywane dalej w pracy. W naturalny sposób utożsamiamy $\mathbb{R}^{2n}$ z $\mathbb{C}^n$ i piszemy $(x_1, \ldots, x_{2n}) = (z_1, \ldots, z_n)$ gdzie $x_{2k-1} = Rez_k$ i $x_{2k} = Imz_k$ dla $k = 1, \ldots, n$. Oznaczamy także

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2} \text{ dla } z \in \mathbb{C}^n.$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^m.$$

Pochodne cząstkowe będziemy standardowo oznaczali poprzez dolne indeksy np.:

$$\frac{\partial u}{\partial z_p} = u_p, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} = u_{p\bar{q}}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_l \partial \bar{z}_p} = u_{x_k x_l \bar{p}} \text{ itp.}$$

Różniczkowanie funkcji u w kierunku wektora X będziemy oznaczali przez Xu lub u_X. Często będziemy używali operatora

$$L = L_u = u^{p\bar{q}} \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q},$$

gdzie $(u^{p\bar{q}})$ jest macierzą odwrotną do $(\overline{u_{p\bar{q}}})$.Przez $d\mathcal{L}$ będziemy oznaczać miarę Lebesgue'a (z kontekstu będzie wiadomo ilu wymiarową).Stosujemy również standardowe oznaczenia na kulę jednostkową

$$B = B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}.$$

Dla zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ i funkcji $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ niech

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{0 \leqslant |\beta| \leqslant k} \sup_{\Omega} |D^\beta f| + \sum_{|\beta|=k} \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

dla $k = 0, 1, 2 \ldots$ i $\alpha \in (0, 1]$. Natomiast (ogólniej) dla zbioru zwartego $K \subset \bar{\Omega}$ definiujemy

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(K)} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{U})} : U \text{ otwarty,} K \subset \bar{U} \subset \bar{\Omega}\},$$

dla $k = 0, 1, 2 \ldots$ i $\alpha \in (0, 1]$. Wtedy

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} < +\infty\},$$

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{U})} < +\infty, \text{ dla } U \Subset \Omega\},$$

natomiast $\mathcal{C}^{k,0}(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega)$. Mówimy, że funkcja u jest *prawie* $\mathcal{C}^{1,1}$ na $\bar{\Omega}$ jeśli $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ oraz

$$\sup_{\Omega} \triangle u < +\infty.$$

Teraz przypomnimy definicje przestrzeni Sobolewa. Dla $k = 0, 1, 2 \ldots$ i $p \geqslant 1$ (oraz Ω jak wyżej) niech

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ dla } |\alpha| \leqslant k\},$$
$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^p_{loc}(\Omega), \text{ dla } |\alpha| \leqslant k\}.$$

Jeśli będziemy pisać, że stała C zależy od perwnych wielkości, na przykład diamΩ i $\|f\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})}$ to oznacza to, że zależy od oszacowań górnych na te wielkości. W szczególności jeśli je zmniejszymy (na przykład weźmiemy zbiór Ω o mniejszej średnicy) to stałą C dalej możemy wziąć taką samą.

ROZDZIAŁ 1

Preliminaria

1.1. Podstawowe fakty z teorii operatora Monge'a-Ampère'a

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ nazywamy *plurisubharmoniczną* jeżeli:

1) jest półciągła z góry,

2) nie jest równa tożsamościowo $-\infty$ na żadnej składowej spójnej zbioru Ω,

3) dla każdych a, $b \in \mathbb{C}^n$ funkcja

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda a + b \in \Omega\} \ni \lambda \longmapsto u(\lambda a + b) \in [-\infty, +\infty)$$

jest subharmoniczna lub równa tożsamościowo $-\infty$.

Funkcje plurisubharmoniczne wprowadzili niezależnie Oka [**O**] oraz Lelong [**L**]. Zbiór funkcji plurisubharmonicznych na Ω oznaczamy przez $\mathcal{PSH}(\Omega)$. Funkcję u nazywamy *plurisuperharmoniczną* jeżeli funkcja $-u$ jest plurisubharmoniczna. Podstawowe własności funkcji plurisubharmonicznych można znaleźć na przykład w [**B6**] lub [**K**]. Szukać będziemy takich rozwiązań równania Monge'a-Ampère'a, które są funkcjami plurisubharmonicznymi.

Funkcję $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ nazywamy *ściśle plurisubharmoniczną*, jeśli dla każdego zbioru otwartego $D \Subset \Omega$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $u - \varepsilon|z|^2 \in \mathcal{PSH}(D)$. Nietrudno sprawdzić, że funkcja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ jest ściśle plurisubharmoniczna wtedy i tylko wtedy gdy wartości własne zespolonej macierzy Hessego $(u_{p\bar{q}})$ są większe od zera.

Ograniczony obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *ściśle pseudowypukłym klasy* $\mathcal{C}^k$ gdzie $k = \infty, 2, 3, \ldots$ (odpowiednio *klasy* $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ gdzie $(k, \alpha) = (1, 1)$ lub $k = 2, 3, \ldots$ a $\alpha \in [0, 1]$), jeśli istnieje ściśle plurisubharmoniczna funkcja ρ klasy $\mathcal{C}^k$ (odpowiednio klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$) określona w otoczeniu $\bar{\Omega}$, której gradient nie znika na $\partial\Omega$ i taka, że $\Omega = \{\rho < 0\}$ (wtedy ρ nazywamy *funkcją definiującą* dla Ω).

Funkcję $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ nazywamy *maksymalną* jeśli dla każdej funkcji $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ takiej, że $u \geqslant v$ poza pewnym zwartym podzbiorem Ω mamy $u \geqslant v$ na Ω. W swojej pracy [**BR**] z lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku Bremermann pokazał, że jeśli Ω jest ściśle pseudowypukłym obszarem klasy $\mathcal{C}^2$, to dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ istnieje funkcja $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ maksymalna w Ω taka, że

$$\lim_{z \to z_0} u(z) = \varphi(z_0)$$

dla $z_0 \in \partial\Omega$. Funkcję tę zdefiniował jako supremum po funkcjach plurisubharmonicznych których górna granica na brzegu jest mniejsza lub równa φ. Pokazał również, że maksymalna funkcja u klasy $\mathcal{C}^2$ spełnia równanie $\det(u_{p\bar{q}}) = 0$. W latach sześćdziesiątych Walsh (zobacz [**W**]) pokazał, że funkcja zdefiniowana przez Bremermanna jest ciągła.

Przełomowe w teorii zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a były wyniki Bedforda i Taylora z lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych. W [**B-T2**] korzystając z teorii prądów dodatnich zdefiniowali go dla dowolnej lokalnie ograniczonej funkcji plurisubharmonicznej u jako regularną miarę borelowską oznaczaną przez $(dd^c u)^n$, przy czym jeśli u jest klasy $\mathcal{C}^2$ albo przynajmniej $W^{2,n}_{loc}$, to

$$(dd^c u)^n = 2^{2n} n! \det(u_{p\bar{q}}) d\mathcal{L} \tag{1.1}$$

(jest to wtedy zwykła n-ta potęga zewnętrzna $(1,1)$ formy $dd^c u$, gdzie $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$). Zachodzi też następujące

Twierdzenie 1.1 ([**B-T2**]). *Niech $u, u_1, u_2, \ldots \in \mathcal{PSH} \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, ciąg u_k jest monotoniczny oraz zmierza prawie wszędzie do u. Wtedy $(dd^c u_k)^n$ zmierza słabo do $(dd^c u)^n$.*

Niech Ω będzie ściśle pseudowypukłym obszarem klasy $\mathcal{C}^{1,1}$, $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ jest funkcją nieujemną i $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Rozważmy następujący problem Dirichleta

$$\begin{cases} u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ (dd^c u)^n = f d\mathcal{L} \text{ w } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{1.2}$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ to równanie

$$(dd^c u)^n = f d\mathcal{L}$$

jest równoważne równaniu

$$\det(u_{p\bar{q}}) = \frac{1}{n! 2^{2n}} f$$

i w takiej formie będziemy je czasami zapisywać.

W poniższym twierdzeniu są zebrane trzy ważne wyniki z [**B-T1**].[1]

[1] W [**B-T1**] w założeniach twierdzeń występowała klasa $\mathcal{C}^2$ w miejsce $\mathcal{C}^{1,1}$ ale (na przykład z punktu widzenia dowodu) nie jest to istotna różnica. Klasa $\mathcal{C}^{1,1}$ jest jednak optymalna i gdybyśmy ją zamienili na $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ dla jakiegoś $\alpha < 1$ to twierdzenie przestałoby być prawdziwe.

Twierdzenie 1.2. *Przy powyższych założeniach mamy*
(i) Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie u problemu (1.2)*;*
(ii) Jeśli $\varphi \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$ *oraz* $f^{1/n} \in \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})$*, to* $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})$*;*
(iii) Jeśli $\Omega = B$ *oraz* $\varphi, f^{1/n} \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$*, to* $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$*.*

Dla funkcji $u \in \mathcal{PSH} \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ można dowieść (zobacz na przykład [**B6**]), że jest maksymalna wtedy i tylko wtedy gdy $(dd^c u)^n = 0$. Widzimy więc, że funkcja skonstruowana przez Bremermanna jest rozwiązaniem problemu (1.2) dla $f = 0$, a punkt (i) powyższego twierdzenia jest uogólnieniem wspomnianego wyniku Walsha.

Ważnym twierdzeniem, z którego między innymi natychmiast wynika jedyność rozwiązania problemu (1.2) jest zasada porównawcza

Twierdzenie 1.3 ([**B-T2**]). *Niech* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *będzie obszarem ograniczonym oraz* $u, v \in \mathcal{PSH} \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$*. Wtedy jeśli*

$$\limsup_{z \to \partial\Omega} (v(z) - u(z)) \leqslant 0 \ \ i \ \ (dd^c u)^n \leqslant (dd^c v)^n,$$

to

$$v \leqslant u \ \ w \ \Omega.$$

Będziemy również korzystali z zasady porównawczej w poniższej formie która jest trochę ogólniejsza, ale prosto wynika z powyższej.

Twierdzenie 1.4. *Niech* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *będzie obszarem ograniczonym oraz* $u, v \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega)$*. Niech* $f \in \mathcal{C}(\Omega \times \mathbb{R})$ *będzie taką funkcją nieujemną, że dla każdego* $z \in \Omega$*, funkcja* $(f(z, \cdot))$ *jest niemalejęca. Wtedy jeśli*

$$\limsup_{z \to \partial\Omega} (v(z) - u(z)) \leqslant 0,$$
$$(dd^c u)^n \leqslant f(\cdot, u) d\mathcal{L} \ \ oraz \ \ f(\cdot, v) d\mathcal{L} \leqslant (dd^c v)^n$$

to

$$v \leqslant u \ \ na \ \Omega.$$

Bardzo istotną pracą dotyczącą regularności rozwiązań równania Monge'a-Ampère'a jest [**C-K-N-S**]. Będziemy korzystali z technik tam użytych oraz z następującego fundamentalnego twierdzenia

Twierdzenie 1.5. *Niech* Ω *będzie ściśle pseudowypukłym obszarem klasy* $\mathcal{C}^\infty$*. Niech* $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ *będzie taką funkcją dodatnią, że dla każdego* $z \in \Omega$ *funkcja* $(f(z, \cdot))'$ *jest nieujemna. Niech* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$*. Wtedy istnieje jedyne rozwiązanie problemu*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \\ \det(u_{p\bar{q}}) = f(\cdot, u) \ \ w \ \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.2. Równanie Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich

Niech M będzie (gładką) rozmaitością zespoloną, a ω gładką $(1,1)$-formą na M. Parę (M,ω) nazywamy *rozmaitością kählerowską* jeśli ω jest dodatnio określoną rzeczywistą formą zamkniętą (to znaczy $\omega > 0$ jest rzeczywistą 2-formą i $d\omega = 0$). W lokalnym układzie współrzędnych można zapisać

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{p,q} g_{p\bar{q}} dz_p \wedge d\bar{z}_q.$$

Formę ω taką jak wyżej nazywamy *formą kählerowską*. Jest z nią stowarzyszona metryka h dana wzorem

$$h = \sum_{p,q} g_{p\bar{q}} dz_p \otimes d\bar{z}_q,$$ [2]

którą nazywamy *metryką kählerowską*. Lokalnie istnieje gładka ściśle plurisubharmoniczna funkcja g taka, że $\omega = dd^c g$. Wtedy w lokalnym układzie współrzędnych mamy $g_{p\bar{q}} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_p \partial \bar{z}_q}$.

Krzywizna Ricciego to $(1,1)$-forma dana wzorem

$$Ric_\omega = -dd^c \log(\det(g_{p\bar{q}})).$$

Formę kählerowską ω nazywamy *formą Kählera-Einsteina* jeśli

$$Ric_\omega \;=\; \lambda\omega$$

dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy stowarzyszoną z nią metrykę również nazywamy *metryką Kählera-Einsteina*.

Załóżmy dalej, że rozmaitość M jest zwarta. W tym przypadku na M nie ma niestałych funkcji plurisubharmonicznych. Rozpatruje się więc równanie Monge'a-Ampère'a w trochę innej postaci, a mianowicie

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n, \tag{1.4}$$

gdzie f jest funkcją nieujemną, przy czym szukamy funkcji φ spełniającej nierówność $\omega + dd^c\varphi \geqslant 0$[3] (czyli takich, że lokalnie $g+\varphi$ jest funkcją plurisubharmoniczną). Dzięki teorii Bedforda i Taylora funkcja φ może

[2] To znaczy $h(\frac{\partial}{\partial z_p}, \frac{\partial}{\partial z_q}) = h(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_p}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_q}) = 0$ oraz $h(\frac{\partial}{\partial z_p}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_q}) = g_{p\bar{q}}$.

[3] Przypomnijmy potrzebną tu definicję. Jeżeli funkcja $\varphi \in L^1(M)$, to $dd^c\varphi$ jest (1,1)-prądem czyli (1,1)-formą o współczynnikach będących dystrybucjami, dokładniej lokalnie możemy napisać $dd^c\varphi = 2i\sum_{p,\bar{q}} \varphi_{p\bar{q}} dz_p \wedge d\bar{z}_q$ przy czym pochodne bierzemy w sensie dystrybucyjnym. Wtedy $\omega + dd^c\varphi$ jest również (1,1)-prądem (lokalnie równym $dd^c(\rho + \varphi)$). Mówimy, że prąd T lokalnie dany wzorem $T = 2i\sum_{p,\bar{q}} T_{p\bar{q}} dz_p \wedge d\bar{z}_q$ jest prądem *nieujemnym* i piszemy $T \geqslant 0$, jeżeli mamy $(T_{p\bar{q}}) \geqslant 0$ (w słabym sensie). Wtedy $T_{p\bar{q}}$ są dystrybucjami rzędu 0, czyli miarami zespolonymi.

być niegładka, wystarczy, że jest ograniczona i półciągła z góry. Z twierdzenia Stokesa wynika, że jeśli istnieje rozwiązanie równania (1.4), to f spełnia warunek

$$\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n. \tag{1.5}$$

W latach siedemdziesiątych Yau w swojej słynnej pracy [**Y**] pokazał następujące

TWIERDZENIE 1.6. *Niech $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ będzie dodatnią funkcją spełniającą warunek konieczny* (1.5). *Wtedy istnieje funkcja $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ taka, że $\omega + dd^c\varphi > 0$, będąca rozwiązaniem równania* (1.4).

Pierwszą klasą Cherna nazywamy następujący zbiór

$$c_1(M) = \{Ric_\omega + dd^c\eta : \eta \in \mathcal{C}^\infty(M)\}.$$

Mimo takiej definicji nie zależy ona od wyboru formy kählerowskiej na M to znaczy jeśli $\tilde{\omega}$ jest formą kählerowską na M to istnieje $\eta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ taka, że $Ric_{\tilde{\omega}} = Ric_\omega + dd^c\eta$.

W latach sześćdziesiątych Calabi postawił następującą hipotezę: Dla każdego $R \in c_1(M)$ istnieje metryka $\tilde{\omega}$, kohomologiczna z ω, taka, że $Ric_{\tilde{\omega}} = R$. Yau w wyżej wymienionej pracy pokazał, że jest prawdziwa i wynika natychmiast z twierdzenia 1.6 zastosowanego do funkcji $f = e^{-\eta+c}$ gdzie $R = Ric_\omega + dd^c\eta$ a c jest tak dobraną stałą, żeby był spełniony warunek (1.5). Istotnie, połóżmy $\tilde{\omega} = \omega + dd^c\varphi$ gdzie φ jest rozwiązaniem (1.4). Wtedy

$$Ric_{\tilde{\omega}} = -dd^c(\log\det(g_{p\bar{q}} + \varphi_{p\bar{q}})) = -dd^c(-\eta + c + \log\det(g_{p\bar{q}})) = R.$$

Ważny w geometrii zwartych rozmaitości kählerowskich jest również problem istnienia formy Kählera-Einsteina. Jeśli taka forma istnieje, to musi być spełniony jeden z następujących warunków: $c_1(M) < 0$, $c_1(M) = 0$ lub $c_1(M) > 0$ (czyli istnieje element z $c_1(M)$ taki, że odpowiednio jest ujemnie określony, zerowy lub dodatnio określony). Jeśli jeden z powyższych koniecznych warunków jest spełniony to istnieją $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz forma kählerowska ω, takie, że $\lambda\omega \in c_1(M)$ a więc $Ric_\omega = \lambda\omega + dd^c\eta$ dla pewnego $\eta \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Wtedy jeśli $\tilde{\omega}$ jest formą Kählera-Einsteina to (po ewentualnym przemnożeniu przez stałą dodatnią) możemy przyjąć, że $Ric_{\tilde{\omega}} = \lambda\tilde{\omega}$ oraz $\tilde{\omega} = \omega + dd^c\varphi$ dla pewnego $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Rozpisując przedostatnią równość dostajemy $-dd^c(\log\det(g_{p\bar{q}} + \varphi_{p\bar{q}}) - \log\det(g_{p\bar{q}}) - \eta + \lambda\varphi) = 0$. To oznacza, że funkcja $\log\det(g_{p\bar{q}} + \varphi_{p\bar{q}}) - \log\det(g_{p\bar{q}}) - \eta + \lambda\varphi$ jako funkcja plurisubharmoniczna jest stała, czyli φ spełnia następujące równanie Monge'a-Ampère'a

$$\det(g_{p\bar{q}} + \varphi_{p\bar{q}}) = e^{\eta-\lambda\varphi+c}\det(g_{p\bar{q}}). \tag{1.6}$$

Odwrotnie, istnienie rozwiązania powyższego równania łatwo daje nam formę Kählera-Einsteina. Sprowadziliśmy więc problem istnienia takiej formy do problemu istnienia rozwiązania równania (1.6). Gdy $c_1(M) = 0$ to $\lambda = 0$ i rozwiązanie istnieje dzięki twierdzeniu 1.6. W przypadku $c_1(M) < 0$ mamy $\lambda < 0$ i istnienie rozwiązania równania (1.6) zostało pokazane w pracach [**A**] i [**Y**]. Przypadek $c_1(M) > 0$ nie został jeszcze do końca zbadany. Wiadomo, że na niektórych rozmaitościach z pierwszą klasą Cherna dodatnią istnieje forma Kählera-Einsteina, a na niektórych nie (zobacz na przykład [**T**]).

W latach dziewięćdziesiątych Kołodziej pokazał odpowiednik Twierdzenia 1.2 (i) dla rozmaitości kählerowskiej.[4]

TWIERDZENIE 1.7 ([**K1**]). *Niech $f \in \mathcal{C}(M)$ będzie nieujemną funkcją spełniającą warunek konieczny* (1.5). *Wtedy na M istnieje funkcja ciągła φ spełniająca warunek $\omega + dd^c\varphi \geqslant 0$ i będąca rozwiązaniem równania* (1.4).

Błocki wykazał w [**B5**], że lokalnie ograniczone rozwiązanie równania (1.4) jest zawsze jedyne z dokładnością do stałej (to znaczy dwa lokalnie ograniczone rozwiązania różnią się o stałą).

1.3. Przypadek zdegenerowany

Równanie $(dd^c u)^n = f d\mathcal{L}$ nazywamy zdegenerowanym jeśli dopuszczamy zerowanie się funkcji f. Rozpatrzmy następujący przykład podany przez Gamelina i Sibony'ego

Przykład 1.8 ([**G-S**]).
Niech $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, $\Omega = B$, $\varphi(z) = (|z_1|^2 - \frac{1}{2})^2 = (|z'|^2 - \frac{1}{2})^2$ dla $z \in \partial B$, $f = 0$ oraz $u = (\max\{0, |z_1|^2 - \frac{1}{2}, |z'|^2 - \frac{1}{2}\})^2$ dla $z \in \bar{B}$. Wtedy u jest rozwiązaniem klasy $\mathcal{C}^{1,1}(\bar{B})$ problemu (1.2), ale nie jest klasy $\mathcal{C}^2$ w B mimo, że B, f i φ są bardzo gładkie.

Dowód: Ponieważ u jest funkcją maksymalną, więc jest rozwiązaniem problemu (1.2). Gładkość u psuje się na zbiorze

$$\{|z_1|^2 - \frac{1}{2} = 0\} \cup \{|z'|^2 - \frac{1}{2} = 0\}.$$

To że u jest klasy $\mathcal{C}^{1,1}$ łatwo widać (a także wynikać to będzie z następnego twierdzenia). $\square$

[4] Kołodziej pokazał to również w przypadku gdy $f \in L^p(M)$ dla pewnego $p > 0$ (zamiast $f \in \mathcal{C}(M)$).

Widzimy zatem, że w przypadku zdegenerowanego równania Monge'a-Ampère'a raczej nie uzyskamy wyższej regularności niż $\mathcal{C}^{1,1}$. [5] Najsilniejsze twierdzenie o takiej regularności udowodnił Krylov

TWIERDZENIE 1.9 ([**KR1, KR2**]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie ściśle pseudowypukłym obszarem klasy $\mathcal{C}^{3,1}$, $\varphi \in \mathcal{C}^{3,1}(\bar{\Omega})$ oraz $f^{1/n} \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$. Wtedy istnieje $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$ będące rozwiązaniem problemu* (1.2).

Założenie o φ jest tu silniejsze niż w twierdzeniu 1.2(iii), ale też dostajemy coś więcej czyli globalne oszacowanie dla drugich pochodnych rozwiązania. Pokażemy teraz, że założenia o φ i Ω są optymalne.

Ustalmy $\alpha < 1$. Dla $z \in \mathbb{C}^n$ niech $z = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-1}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : (1-x_1)^2 + |x'|^2 < 1\}$, $u = x_1^{(3+\alpha)/2}$, $\varphi = u|_{\partial\Omega}$ oraz $f = \det(u_{p\bar{q}})$. Wtedy ponieważ u zależy tylko od x_1, więc $f = 0$. Funkcja φ jest gładka poza zerem, a w otoczeniu zera na brzegu Ω mamy

$$\varphi(z) = u\Big(\frac{|x'|^2}{1+\sqrt{1-|x'|^2}}, x'\Big) \leqslant C|x'|^{3+\alpha}.$$

Stąd $\varphi \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$, ale u nie jest oczywiście klasy $\mathcal{C}^{1,1}$ na $\bar{\Omega}$. Czyli założenie o φ w powyższym twierdzeniu jest optymalne.

Niech teraz $u(z) = t^{3+\alpha}$ jeśli $x_1 = t^2 + t^{3+\alpha}$ i $t \geqslant 0$ (znowu funkcja u zależy tylko od x_1). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie takim ściśle pseudowypukłym obszarem o brzegu klasy $\mathcal{C}^\infty$ poza zerem, że dla pewnego otoczenia zera U,

$$\partial\Omega \cap U = \{z \in \mathbb{C}^n : x_1 = |x'|^2 + |x'|^{3+\alpha}\} \cap U$$

oraz

$$\bar{\Omega} \cap \{x_1 = 0\} = \{0\}.$$

Niech φ i f będą zdefiniowane jak wyżej. Wtedy znowu $f = 0$, natomiast na zbiorze U $\varphi = x_1 - |x'|^2$, więc rozszerza się do funkcji gładkiej w $\mathbb{C}^n$ i Ω jest klasy $\mathcal{C}^{3,\alpha}$. Ponieważ istnieje stała C taka, że $C^{-1}x_1^{1+\alpha} \leqslant u(z) \leqslant Cx_1^{1+\alpha}$ dla $z \in \Omega$, więc u nie może mieć ograniczonych drugich pochodnych.

Ostatni przykład jest może trochę sztuczny, bo zazwyczaj zakłada się co najwyżej taką regularność warunku brzegowego co brzegu (ale jak pokazuje powyższy przykład, to że $\varphi \in \mathcal{C}^{3,1}(\bar{\Omega})$ nie implikuje, że Ω jest ściśle pseudowypukły klasy $\mathcal{C}^{3,1}$).

[5] Również $\varphi = 0$ i gładkie Ω i f nie wystarczają żeby dostać $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, zobacz [**B-F**].

Można więc zadać pytanie o optymalność założeń o funkcji f, w szczególności o to, czy wykładnik $\frac{1}{n}$ jest optymalny. W przypadku rzeczywistego równania Monge'a-Ampère'a[6] Krylov również udowodnił rezultat analogiczny do Twierdzenia 1.9, jednak Guan w swojej pracy [**G**] uzyskał pewne wyniki dla wykładnika $\frac{1}{n-1}$ i ostatecznie twierdzenie Krylowa zostało poprawione przez Guana, Trudingera i Wanga do następującego

TWIERDZENIE 1.10 ([**G-T-W**]). *Niech $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ściśle wypukłym klasy $\mathcal{C}^{3,1}$, $\varphi \in \mathcal{C}^{3,1}(\bar{\Omega})$ oraz $f^{1/(n-1)} \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$. Wtedy rozwiązanie problemu*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \textit{ jest funkcją wypukłą} \\ \det(\frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q}) = f \textit{ w } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

istnieje i jest klasy $\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$.

Przypomnijmy, że Ω jest obszarem ściśle wypukłym klasy $\mathcal{C}^{3,1}$ jeśli istnieje ściśle wypukła (to znaczy wartości własne rzeczywistej macierzy Hessego są dodatnie) funkcja ρ klasy $\mathcal{C}^{3,1}$ określona na otoczeniu $\bar{\Omega}$ taka, że jej gradient nie znika na $\partial\Omega$ oraz $\Omega = \{\rho < 0\}$.

Dowód powyższego twierdzenia w cytowanej pracy ma drobną lukę zauważoną przez Błockiego, to znaczy nie musi być prawdziwa wielokrotnie używana tam nierówność

$$|\bigtriangledown(f^{1/(n-1)})| \leqslant C f^{1/(2n-2)}. \tag{1.8}$$

Ale dowód można poprawić, w szczególności niewykorzystujący powyższej nierówności dowód Lematu 2.1 (oczywiście z [**G-T-W**]) znajduje się w [**G**], dowód Lematu 2.2 podał Błocki [**B8**], a w pozostałych przypadkach wystarczy stosować powyższą nierówność dla pochodnych w kierunkach stycznych do brzegu. Jej prawdziwość w tym wypadku wynika z następującego elementarnego lematu

LEMAT 1.11. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ będzie takim obszarem, że $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$, $\xi : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ będzie (gładkim) polem wektorowym takim, że dla $x \in \partial\Omega$, $\xi(x)$ jest wektorem stycznym do $\partial\Omega$, oraz niech $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ będzie funkcją nieujemną. Wtedy istnieje stała C zależna tylko od $\|g\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})}$ i od $\|\xi\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}$ taka, że*

$$|g_\xi| < C\sqrt{g} \textit{ na } \bar{\Omega}.$$

[6]Zobacz na przykład w [**GU**] definicje i własności rzeczywistego operatora Monge'a-Ampère'a.

Dowód: Możemy założyć, że ξ ma nośnik zwarty a więc indukuje globalny potok $\phi : \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ taki, że $\phi(\mathbb{R} \times \bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$. Niech $\phi_x(t) := \phi(t,x)$ dla $x \in \bar{\Omega}$ (wtedy $\phi_x' = \xi \circ \phi_x$). Istnieje stała $\tilde{C}$ (zależna tylko od $\|g\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})}$ i od $\|\xi\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}$), taka, że

$$|(g \circ \phi_x)'(0) - (g \circ \phi_x)'(th)| \leqslant \tilde{C}|h|$$

dla $h \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ i $x \in \bar{\Omega}$. Wynika stąd, że

$$0 \leqslant \min\{g \circ \phi_x(-h), g \circ \phi_x(h)\} \leqslant g(x) - |h|(|g_\xi| - \tilde{C}|h|).$$

Podstawiając $h = \frac{g_\xi}{2\tilde{C}}$ dostajemy

$$0 \leqslant g(z) - \frac{g_\xi}{4\tilde{C}},$$

co daje nam nierówność z Lematu dla $C = 2\sqrt{\tilde{C}}$. $\square$

Wykładnik $\frac{1}{n-1}$ w Twierdzeniu 1.10 jest optymalny co pokazuje przykład z pracy Wanga [**WA**]. Wydaje się więc, że także w przypadku zespolonym optymalny wykładnik w Twierdzeniu 1.9 to $\frac{1}{(n-1}$. Przykład 2.12 (jest to adaptacja wspomnianego wyżej przykładu Wanga) pokaże, że nie może on być większy. Również w przypadku zespolonym wykładnik ten nie może być większy od $\frac{1}{n-1}$ co pokaże przy (jest to adaptacja przykładu Wanga do sytuacji zespolonej).

Pełny odpowiednik Twierdzenia 1.10 w przypadku zespolonym pozostaje nadal problemem otwartym. Rozdział 2 zawiera pewne wyniki częściowe dotyczące tego problemu. Najważniejszy (Twierdzenie 2.1) to taki, że jeśli Ω jest obszarem ściśle pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^{2,1}$, $\varphi \equiv 0$, $f^{1/n} \in \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})$ oraz $f^{1/(n-1)} \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$ to jedyne rozwiązanie u problemu (1.2) jest prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ na Ω.

Podobna sytuacja zachodzi dla równania Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich. Błocki udowodnił następujące

TWIERDZENIE 1.12 ([**B3**]). *Niech (M,ω) będzie zwartą rozmaitością kählerowską i niech f będzie taką funkcją nieujemną na M spełniającą warunek* (1.5), *że $f^{1/(n-1)} \in \mathcal{C}^{1,1}(M)$. Wtedy istnieje φ rozwiązanie równania* (1.4) *które jest prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ na M.*

Przykład 2.13 pokazuje, że i w tym wypadku wykładnika $\frac{1}{n-1}$ nie da się poprawić.

1.4. Przypadek wartości brzegowych równych $+\infty$

Pierwszym który rozpatrywał równanie eliptyczne z warunkiem brzegowym nieskończonym był Bieberbach. W pracy [**B**] z 1916 roku rozważał on problem

$$(1.9) \qquad \begin{cases} \triangle u = e^u \text{ w } \Omega \\ \lim_{z\to z_0} u(z) = +\infty \text{ dla każdego } z_0 \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie Ω jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{C}$. Cheng i Yau [**C-Y**] na początku lat osiemdziesiątych rozważali następujący problem

$$(1.10) \qquad \begin{cases} \det(u_{p\bar{q}}) = ge^{Ku} \text{ w } \Omega \\ \lim_{z\to z_0} u(z) = +\infty \text{ dla każdego } z_0 \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie Ω jest ściśle pseudowypukłym obszarem klasy $\mathcal{C}^\infty$, $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ i $K > 0$ jest stałą. Jest to uogólnienie na wiele zmiennych problemu Bieberbacha. Przy tych założeniach pokazali

TWIERDZENIE 1.13. *Istnieje dokładnie jedna funkcja plurisubharminiczna $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ będąca rozwiązaniem problemu* (1.10).

Zobaczmy, że powyższe twierdzenie natychmiast daje nam zupełną metrykę Kählera-Einsteina na Ω. Niech $\omega = dd^c u$, gdzie u jest rozwiązaniem problemu (1.10) przy $g = 1$. Wtedy

$$Ric_\omega = -dd^c(\log\det(u_{p\bar{q}})) = -dd^c(Ku) = -K\omega.$$

Zupełność metryki stowarzyszonej z ω wynika z tego, że u jest równe $+\infty$ na brzegu Ω. Mok i Yau [**M-Y**] pokazali, że zupełna metryka Kählera-Einsteina istnieje na $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy Ω jest obszarem pseudowypukłym.[7]

Z punktu widzenia równań różniczkowych ciekawe wydaje się rozważanie ogólniejszego problemu niż rozważali Cheng i Yau, a mianowicie

$$(1.11) \qquad \begin{cases} (dd^c u)^n = f(u)d\mathcal{L} \text{ w } \Omega \\ \lim_{z\to z_0} u(z) = +\infty \text{ dla każdego } z_0 \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie f jest nieujemną i gładką funkcją spełniającą pewne dodatkowe warunki. Taki problem był rozważany w doktoracie Ivarssona [**I1**] z którego pochodzą poniższe wyniki.

Niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ będzie dodatnią funkcją rosnącą spełniającą warunek

$$(1.12) \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{1/(n+1)}} < +\infty,$$

gdzie $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ i niech $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ będzie funkcją dodatnią.

[7] Przypomnijmy, że obszar $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *pseudowypukłym* jeżeli istnieje funkcja $u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega)$ taka, że $\lim_{z\to z_0} u(z) = +\infty$ dla każdego $z_0 \in \partial\Omega$.

Twierdzenie 1.14 ([**I1, I-M**]). *Przy powyższych założeniach jeśli* $\Omega = B$ *i* $g(z)$ *zależy tylko od* $|z|$, *to istnieje funkcja* $u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}^\infty(B)$ *będąca rozwiązaniem problemu* (1.11) *taka, że* $u(z)$ *zależy tylko od* $|z|$.

Twierdzenie 1.15 ([**I1, I2**]). *Przy powyższych założeniach, jeśli* Ω *jest silnie pseudowypukłym obszarem klasy* $\mathcal{C}^\infty$, $g = 1$ *oraz istnieje* $k > 0$ *takie, że dla* $x > 0$ *spełniony jest warunek*

$$\frac{(F(x)+k)f'(x)}{f^2(x)} \geqslant \frac{n-1}{n+1},$$ [8]

to istnieje $u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega)$ *lokalnie lipshitzowskie rozwiązanie problemu* (1.11).

Ivarsson w [**I1, I2**] udowadnia też przy pewnych założeniach jedyność rozwiązania, ale w ogólnym przypadku nie jest jasne czy istnieje tylko jedno rozwiązanie.

Problemowi (1.11) poświęcony jest Rozdział 3. Twierdzenie 3.5 mówi o tym, że dla funkcji f spełniającej pewne techniczne założenie, mianowicie $f' > 0$ na $\mathbb{R}$ oraz istnieją stałe α, β, $\gamma \geqslant 1$, oraz $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że dla $x > x_0$ zachodzą nierówności

$$\alpha^{-1} f^{-\beta}(x) \leqslant f'(x) \leqslant \alpha f^\beta(x),$$
$$(\log f)''(x) \leqslant \gamma (\log f)'^2(x),$$

istnieje gładkie rozwiązanie tego problemu. Ponieważ, założenia tego twierdzenia spełnione są też przez funkcję $f(x) = e^{Kx}$, więc mamy tam też alternatywny dowód istnienia gładkiego rozwiązania w twierdzeniu 1.13. Można pokazać, że założenia te spełnione są na przykład dla funkcji $f(x) = x^k$ dla $k > n$ (dla $k \leqslant n$ pokazano w Rozdziale 3, że rozwiązanie problemu (1.11) nie istnieje).

Ciekawym problemem do zbadania wydaje się też istnienie rozwiązania tego typu równania w obszarach pseudowypukłych to znaczy uzyskanie pewnego uogólnienia wyniku Moka i Yau.

Warto chyba też wspomnieć, że w przypadku rzeczywistego równania Monge'a-Ampère'a rozważano podobne problemy. Na przykład ciekawy wynik uzyskał Mohammed w niedawnej pracy [**M**], z której autor zaczerpnął sposób konstrukcji rozwiązania w rozdziale trzecim. Rozpatruje on tam w obszarach ściśle wypukłych problem analogiczny do (1.11) i dostaje gładkie rozwiązania dla gładkich, rosnących funkcji f spełniających warunek 1.12 bez żadnych dodatkowych technicznych warunków. Jest tam pewna luka w dowodzie która dotyczy tylko przypadków gdy f się zeruje. Wtedy rozważane jest tam równanie

[8] W [**I1, I2**] jest podany warunek $\frac{Ff'}{f^2} \geqslant \frac{n-1}{n+1}$ ale nie był on w tej formie zrozumiały dla autora ponieważ nigdy nie jest spełniony w zerze.

$\det(\frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q}) = \lambda f$ zamiast $\det(\frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q}) = f$ gdzie λ jest stałą która w niektórych przypadkach jest różna od 1. Ale rozwiązanie takiego równania nie daje nam automatycznie rozwiązania równania wyjściowego. Autorowi wydaje się, że właściwe byłoby tam założyć, że zachodzi warunek W2 z rozdziału trzeciego (wtedy w dowodzie w [**M**] $\lambda = 1$).

1.5. Narzędzia

Teraz podamy jeszcze kilka twierdzeń, które będą nam przydatne w dalszej części. Pierwsze z nich to szczególny przypadek głównego twierdzenia z z [**B1**].

TWIERDZENIE 1.16. *Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^n$, niech $u,\ v \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Załóżmy, że $u \leqslant 0$ i $\lim_{z \to z_0} v(z) = 0$ dla $z_0 \in \partial\Omega$. Wtedy zachodzi nierówność*

$$\int_\Omega (-v)^n (dd^c u)^n \leqslant n! \|u\|^n \int_\Omega (dd^c v)^n.$$

Dzięki następnemu twierdzeniu otrzymujemy jednostajną stabilność rozwiązań problemu (1.2).

TWIERDZENIE 1.17 ([**B-T1**]). *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$ i niech $u, v \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Wtedy na Ω zachodzi nierówność*

$$(dd^c(u+v))^n \geqslant (dd^c u)^n + (dd^c v)^n. \tag{1.13}$$

Następne twierdzenie dotyczy funkcji prawie $\mathcal{C}^{1,1}$. Dowód można znaleźć na przykład w [**K**], gdzie jest częścią dowodu Twierdzenia 4.3.3.

TWIERDZENIE 1.18. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. Jeśli u jest funkcją subharmoniczną na Ω taką, że $\sup_\Omega \triangle u < +\infty$, to $u \in W^{2,p}$ dla $1 \leqslant p < +\infty$.*

Poniższy rezultat to znane twierdzenie Sobolewa.

TWIERDZENIE 1.19. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy $W^{k,p}_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{l,\alpha}$, dla $k, l = 0, 1, 2 \ldots, p > 1, \alpha \in (0,1)$ takich, że $l + \alpha < k - \frac{n}{p}$.*

Poniższe dwa twierdzenia znajdują się w [**B2**]. Pierwsze wynika z twierdzeń Trudingera z [**TR**] a drugie jest prostą konsekwencją Lematu 17.16 z [**G-T**].

TWIERDZENIE 1.20. *Jeżeli $u \in \mathcal{PSH} \cap W^{2,p}(\Omega)$ dla pewnego $p > 2n(n-1)$, gdzie Ω jest obszarem w $\mathbb{C}^n$, $\det(u_{p\bar{q}}) \in W^{2,2n}(\Omega)$, oraz $\det(u_{p\bar{q}}) > 0$ to $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ dla pewnego $\alpha \in (0,1)$.*

TWIERDZENIE 1.21. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ i niech $\alpha \in (0,1)$. Jeśli $u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\det(u_{p\bar{q}}) \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, oraz $\det(u_{p\bar{q}}) > 0$ to $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\Omega)$.*

Sformułujemy teraz lemat Hopfa (nazywany też zasadą Zaremby).

Twierdzenie 1.22. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$ o brzegu klasy $\mathcal{C}^1$ i niech u będzie niestałą funkcją harmoniczną w Ω i ciągłą na $\bar{\Omega}$. Jeśli $z_0 \in \partial\Omega$ jest punktem, w którym u przyjmuje wartość największą, a ξ wektorem prostopadłym w z_0 do brzegu Ω i zwróconym do wnętrza, to $u_\xi(z_0) < 0$.*

Niech S i T będą liniowymi operatorami różniczkowymi pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Poniższe wzory są bardzo często używane w pracach o regularności równania Monge'a-Ampère'a

$$S(\log f) = u^{p\bar{q}} S u_{p\bar{q}}, \tag{1.14}$$

$$TS(\log f) = u^{p\bar{q}} TS u_{p\bar{q}} - u^{p\bar{j}} u^{i\bar{q}} T u_{i\bar{j}} S u_{p\bar{q}}. \tag{1.15}$$

Dowód: Niech $(M^{p\bar{q}})$ będzie macierzą minorów macierzy $(u_{p\bar{q}})$. Policzmy

$$S(\log f) = S(\log\det(u_{p\bar{q}})) = \frac{S\det(u_{p\bar{q}})}{\det(u_{p\bar{q}})} = S u_{p\bar{q}} \frac{M^{p\bar{q}}}{\det(u_{p\bar{q}})} = u^{p\bar{q}} S u_{p\bar{q}}.$$

Żeby udowodnić drugą równość rozpatrzmy odwzorowanie f określone dla $n \times n$-macierzy odwracalnych i dane wzorem $f(A) = A^{-1}$. Jego pochodna jest dana wzorem $f'(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ dla dowolnej $n \times n$-macierzy H. W takim razie

$$(Tu^{p\bar{q}}) = f'((u_{p\bar{q}}))(Tu_{p\bar{q}}) = -(u^{p\bar{q}})(Tu_{p\bar{q}})(u^{p\bar{q}}),$$

a zatem

$$Tu^{p\bar{q}} = -u^{p\bar{j}} u^{i\bar{q}} u_{i\bar{j}},$$

co w połączeniu z (1.14) daje nam (1.15). $\square$

ROZDZIAŁ 2

Zdegenerowane zespolone równanie Monge'a-Ampère'a

Będziemy dalej stale zakładać, że $n \geqslant 2$ i $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem ściśle pseudowypukłym. Będziemy rozpatrywać problem Dirichleta postaci:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ \det(u_{p\bar{q}}) = f \text{ w } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{2.1}$$

Sformułujemy teraz najważniejsze twierdzenie w tym rozdziale:

TWIERDZENIE 2.1. *Niech Ω będzie ściśle pseudowypułym obszarem klasy $\mathcal{C}^{2,1}$. Niech f będzie nieujemną funkcją na Ω, taką, że $f^{1/n} \in \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})$ i $f^{1/(n-1)} \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$. Wtedy rozwiązanie u problemu* (2.1)*, z warunkiem brzegowym $\varphi = 0$, jest $\mathcal{C}^{0,1}$ oraz prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ na $\bar{\Omega}$*

Zauważmy, że funkcja która jest prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ dzięki Twierdzeniu 1.18 jest w przestrzeni $W^{2,p}_{loc}$ a więc dzięki Twierdzeniu 1.19 lokalnie jest klasy $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ dla $0 \leqslant \alpha < 1$ oraz, że funkcja plurisubharmoniczna u jest prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma ograniczone wszystkie pochodne mieszane $u_{p\bar{q}}$.

Udowodnimy teraz lematy (dotyczące kolejnych oszacowań *a priori*) potrzebne, do udowodnienia powyższego twierdzenie. We wszystkich zakładamy, że $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ gdzie ρ jest funkcją ściśle plurisubharmoniczną klasy $\mathcal{C}^\infty$ w otoczeniu $\bar{\Omega}$, $0 \in \Omega$, dla każdego $z \in \Omega$ istnieje kula B_z o promieniu 1 taka, że $z \in B_z \subset \Omega$, $\nabla\rho \neq 0$ na $\partial\Omega$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ jest funkcją dodatnią, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ jest funkcją niekoniecznie zerową (pozwoli to nam zobaczyć, przy którym oszacowaniu *a priori* jest trudność, która nie pozwala autorowi pokazać zespolonego odpowiednika twierdzenia z pracy [**G-T-W**]) a u jest rozwiązaniem problemu (2.1).

Pierwszy lemat jest najprostszy:

LEMAT 2.2. *Zachodzi nierówność*

$$\|u\|_{\bar{\Omega}} \leqslant C,$$

gdzie $C = C\,(\operatorname{diam}\Omega, \|f\|_{\bar{\Omega}}, \|\varphi\|_{\bar{\Omega}})$.

Dowód: Zauważmy, że z zasady porównawczej

$$A(|z|^2 - B) \leqslant u \leqslant \|\varphi\|_{\bar{\Omega}}$$

dla dostatecznie dużych $A, B \in \mathbb{R}$. □

Z następnych dwóch lematów wynika oszacowanie na gradient rozwiązania:

Lemat 2.3. *Prawdziwe jest następujące oszacowanie*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)} \leqslant C,$$

gdzie $C = C(\inf_{\bar{\Omega}} \det(\rho_{p\bar{q}}), \|\rho\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})}, \|f\|_{\bar{\Omega}}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})})$.

Dowód: Zauważmy, że ponieważ ρ jest funkcją ściśle plurisubharmoniczną, więc dla dostatecznie dużego A funkcja $\varphi + A\rho$ jest plurisubharmoniczna a $\varphi - A\rho$ jest funkcją superharmoniczną. Korzystając z tego, że na brzegu $u = \varphi + A\rho$ i z zasady porównawczej (zwiększając odpowiednio A) dostajemy nierówność

$$\varphi + A\rho \leqslant u.$$

Ponieważ na brzegu również $u = \varphi - A\rho$, więc otrzymujemy nierówność

$$u \leqslant \varphi + A\rho. \ \square$$

Lemat 2.4. *Gradient funkcji u we wnętrzu Ω jest szacowany przez jej gradient na brzegu. Dokładniej*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})} \leqslant C(\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)} + 1), \tag{2.2}$$

gdzie $C = C(\mathrm{diam}\Omega, \|f^{1/n}\|_{\mathcal{C}^{0,1}}(\bar{\Omega}), \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})})$.

Dowód: Rozważmy funkcję $w_k = \pm u_{x_k} + A|z|^2$ dla $k = 1, \dots 2n$. Ponieważ korzystając z (1.14) i z nierówności między średnimi (z wartości własnych), dla dostatecznie dużego A, możemy oszacować

$$Lw_k = \pm(\log f)_{x_k} + A \sum u_{p\bar{p}} \geqslant \pm\frac{(f^{1/n})_{x_k}}{f^{1/n}} + Af^{-1/n} > 0,$$

więc (dla tego A) funkcja w_k nie przyjmuje maksimum w Ω, co implikuje (2.2). □

Szacowanie laplasjanu zaczynamy od pokazania, że wystarczy oszacować go na brzegu.

Lemat 2.5. *Prawdziwa jest następująca nierówność*

$$\sup_{\Omega} \triangle u \leqslant C(\sup_{\partial\Omega} \triangle u + 1), \tag{2.3}$$

gdzie $C = C(\mathrm{diam}\Omega, \|f^{1/(n-1)}\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\Omega)})$.

Dowód: Niech $\beta(z) = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \lambda_i e^{|z|^2}$, gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy $(u_{p\bar{q}}(z))$. Możemy założyć, że β przyjmuje maksimum w pewnym punkcie $z_0 \in \Omega$ (w przeciwnym wypadku nierówność (2.3) jest automatycznie spełniona). Po liniowej zmianie zmiennych możemy założyć, że w z_0 macierz $(u_{p\bar{q}})$ jest diagonalna i $\max |u_{p\bar{p}}| = u_{1\bar{1}}$. Wtedy funkcja

$$h = u_{1\bar{1}} e^{|z|^2}$$

również przyjmuje maksimum w z_0 i $h(z_0) = \beta(z_0)$. Od tego momentu wszystkie obliczenia będziemy robić w punkcie z_0. Ponieważ h ma tam maksimum więc

$$0 = (\log h)_k = \bar{z}_k + \frac{u_{k1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}}$$

dla $k = 1, \dots, n$ oraz

$$u^{k\bar{k}} (\log h)_{k\bar{k}} \leqslant 0.$$

Niech $g = f^{\frac{1}{n-1}}$. Stosując (1.15), nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną, (1.14) i nierówność miedzy średnią arytmetyczną a geometryczną, możemy dokonać następujących oszacowań

$$\begin{aligned}
u^{k\bar{k}} (\log \tilde{h})_{k\bar{k}} &= \sum \frac{1}{u_{k\bar{k}}} + \frac{(\log f)_{1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + \frac{1}{u_{1\bar{1}}} \sum_{p,q} \frac{|u_{1p\bar{q}}|^2}{u_{p\bar{p}} u_{q\bar{q}}} - \frac{1}{u_{1\bar{1}}^2} \sum \frac{|u_{k1\bar{1}}|^2}{u_{k\bar{k}}} \\
&\geqslant \sum \frac{1}{u_{k\bar{k}}} + \frac{(\log f)_{1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + \frac{1}{u_{1\bar{1}}} \sum_{k\geqslant 2} \frac{|u_{k\bar{k}1}|^2}{u_{k\bar{k}}^2} \\
&\geqslant \sum \frac{1}{u_{k\bar{k}}} + \frac{(\log f)_{1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + \frac{1}{u_{1\bar{1}}(n-1)} \left| (\log f)_1 - \frac{u_{1\bar{1}1}}{u_{1\bar{1}}} \right|^2 \\
&\geqslant \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{u_{k\bar{k}}} + \frac{(n-1) g_{1\bar{1}}}{g u_{1\bar{1}}} - 2Re \frac{(\log g)_{\bar{1}} u_{1\bar{1}1}}{(n-1) u_{1\bar{1}}} \\
&\geqslant \frac{(n-1)(u_{1\bar{1}})^{\frac{1}{n-1}}}{g} + \frac{(n-1) g_{1\bar{1}}}{g u_{1\bar{1}}} + 2Re \frac{g_{\bar{1}} z_1}{g u_{1\bar{1}} (n-1)}.
\end{aligned}$$

Po przemnożeniu przez $g u_{1\bar{1}}$ łatwo widać, że

$$u_{1\bar{1}} \leqslant \tilde{C},$$

gdzie $\tilde{C}$ zależy tylko od $\mathrm{diam}\Omega$ i $\|f^{1/(n-1)}\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\Omega)}$. Stąd dostajemy nierówność (2.3). $\square$

Żeby uzyskać oszacowania *a priori* dla drugich pochodnych na brzegu ustalmy punkt $z_0 \in \partial\Omega$. Po holomorficznej zmianie zmiennych możemy założyć, że:

$$z_0 = 0$$

oraz

$$\rho(z) = -Re z_n + \sum_{p,q=1}^{n} c_{p\bar{q}} z_p \bar{z}_q + O(|z^3|), \tag{2.4}$$

gdzie $(c_{p\bar{q}})$ jest macierzą dodatnio określoną taką, że $c_{p\bar{q}} = 0$ dla $p \neq q,\ p, q = 1, \ldots, n-1$. W Ω zachodzi równość $u - \varphi = \sigma\rho$, gdzie σ jest pewną gładką funkcją na Ω. Różniczkując tę równość obustronnie dostajemy

$$u_{p\bar{q}}(0) = \varphi_{p\bar{q}}(0) + (\varphi_n(0) - u_n(0))\rho_{p\bar{q}} \text{ dla } p, q = 1, \ldots, n-1, \tag{2.5}$$

w szczególności $u_{p\bar{q}}(0) = \varphi_{p\bar{q}}(0)$ dla $p \neq q,\ p, q = 1, \ldots, n-1$.

Prostą konsekwencją równości (2.5) jest następujący lemat o oszacowaniu drugich pochodnych w kierunkach stycznych do brzegu Ω.

LEMAT 2.6. *Dla $p, q = 1, \ldots n-1$ zachodzi nierówność*

$$|u_{p\bar{q}}(0)| \leqslant C, \tag{2.6}$$

gdzie $C = C(\frac{1}{\inf_{\bar{\Omega}} \det(\rho_{p\bar{q}}), \|f\|_{\bar{\Omega}}}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\Omega)})$. $\square$

Trochę trudniejsze jest wykazanie oszacowania, gdy tylko jeden z kierunków nie jest styczny do brzegu Ω.

LEMAT 2.7. *Gdy $i = 1, \ldots n-1$, to*

$$|u_{i\bar{n}}(0)| \leqslant C, \tag{2.7}$$

gdzie $C = C(\frac{1}{\inf_{\bar{\Omega}} \det(\rho_{p\bar{q}}), \|f\|_{\bar{\Omega}}}, \|\rho\|_{\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega})}, \|f^{1/n}\|_{\mathcal{C}^{0,1}}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{2,1}(\Omega)})$.

Dowód: Niech $a = \rho_{x_{2n-1}}$, $b = \rho_{x_k}$. Dla $k = 1, \ldots, 2n-2$ rozpatrzmy funkcję

$$w_k = \pm T_k(u - \varphi) + ((u - \varphi)_{x_k})^2 + ((u - \varphi)_{x_{2n}})^2 + A|z|^2 - Bx_{2n-1},$$

gdzie $T_k = a\partial_{x_k} - b\partial_{x_{2n-1}}$. W dalszym ciągu dowodu $c_1, c_2, \ldots$ będą stałymi zależnymi tylko od $\Omega, \|f^{1/n}\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega})}$. Zauważmy, że zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} u^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{x_{2n-1}\bar{q}} &= 2u^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{n\bar{q}} + iu^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{x_{2n}\bar{q}} \\ &= 2\delta_{pn} - 2u^{p\bar{q}}\varphi_{n\bar{q}} + iu^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{x_{2n}\bar{q}}\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{x_{2n-1}p} &= 2u^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{p\bar{n}} - iu^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{x_{2n}p} \\ &= 2\delta_{qn} - u^{p\bar{q}}\varphi_{p\bar{n}} - iu^{p\bar{q}}(u - \varphi)_{x_{2n}p}\ , \end{aligned}$$

Używając wzoru (1.14), Lematów 2.3 i 2.4 oraz nierówności Schwarza możemy policzyć

$$L(\pm T_k(u-\varphi)) = \pm u^{p\bar q}(a_{p\bar q}(u-\varphi)_{x_k} - b_{p\bar q}(u-\varphi)_{x_{2n-1}} + a_p(u-\varphi)_{x_l\bar q}$$
$$-b_p(u-\varphi)_{x_{2n-1}\bar q} + a_{\bar q}(u-\varphi)_{x_n p} - b_{\bar q}(u-\varphi)_{x_{2n-1}p}) \pm T_k(\log f + L\varphi)$$

$$\geqslant -c_1\sum u^{p\bar q} - c_2|\nabla u|\sum u^{p\bar q} - 2\sqrt{u^{p\bar q}a_p a_{\bar q}}\sqrt{u^{p\bar q}(u-\varphi)_{x_k p}(u-\varphi)_{x_k\bar q}}$$
$$-2\sqrt{u^{p\bar q}b_p b_{\bar q}}\sqrt{u^{p\bar q}(u-\varphi)_{x_{2n}p}(u-\varphi)_{x_{2n}\bar q}} - \frac{nT_k(f^{1/n})}{f}.$$

Dzięki nierówności między średnimi arytmetyczną a geometryczną oraz dlatego, że $\sum u_{p\bar p} \leqslant c_3 \sum u_{p\bar q}$, dostajemy

$$L(\pm T_k(u-\varphi))$$
$$\geqslant -c_4\sum u_{p\bar p} - 2u^{p\bar q}(u-\varphi)_{x_{2n}p}(u-\varphi)_{x_{2n}\bar q} - 2u^{p\bar q}(u-\varphi)_{x_k p}(u-\varphi)_{x_k\bar q}.$$

Ponieważ dla $l = 1, \ldots, 2n$,

$$L((u-\varphi)_{x_l})^2) = 2(u-\varphi)_{x_l}((\log f)_{x_l} - u^{p\bar q}\varphi_{x_l p\bar q}) + 2u^{p\bar q}(u-\varphi)_{x_l\bar q}(u-\varphi)_{x_l p}\ ,$$

$$\geqslant -c_5\sum u_{p\bar p} + 2u^{p\bar q}(u-\varphi)_{x_l\bar q}(u-\varphi)_{x_l p},$$

więc dla dostatecznie dużego A zachodzi nierówność

$$Lw_k \geqslant 0.$$

Niech $S_\varepsilon = \{z \in U \cap \Omega : x_{2n-1} > \varepsilon\}$ gdzie U jest takim otoczeniem zera, że w zbiorze $U \cap \Omega$ zachodzi nierówność $x_{2n-1} \geqslant D|z|^2$ dla pewnej stałej D. Zauważmy, że można dobrać ε i D tak, żeby zależały tylko od $\inf_{\bar\Omega}\det(\rho_{p\bar q})$ i $\|\rho\|_{\mathcal{C}^{2,1}(\bar\Omega)}$.

Na brzegu Ω, dla $k = 1, \ldots, 2n-2$ mamy $T_k(u-\varphi) = 0$. Natomiast na zbiorze $\partial S_\varepsilon \cap \partial\Omega$, dla $l \neq 2n-1$ zachodzi nierówność $(u(z) - \varphi(z))_{x_l})^2 \leqslant c_6|z|^2$. Dzięki temu dla dostatecznie dużych B otrzymujemy $w_k \leqslant 0$ na ∂S_ε. Dzięki zasadzie maksimum dostajemy $w_k \leqslant 0$ na S_ε, co nam daje $|u_{x_k x_{2n-1}}(0)| \leqslant c_7$. Ponieważ $u_{x_k x_{2n}}(0) = \varphi_{x_k x_{2n}}(0) + \rho_{x_k x_{2n}}(0)(\varphi_n(0) - u_n(0))$ jest ograniczone, w takim razie dostajemy (2.7). $\square$

Ostatni lemat dotyczy oszacowania drugich pochodnych w kierunkach nie stycznych do brzegu.

LEMAT 2.8. *Jeśli* $\varphi \equiv 0$, *to*

$$|u_{n\bar n}(0)| \leqslant C, \tag{2.8}$$

gdzie $C = C(\frac{1}{\inf_{\bar\Omega}\det(\rho_{p\bar q}), \|f\|_{\bar\Omega}}, \|\rho\|_{\mathcal{C}^{2,1}(\bar\Omega)}, \|f^{1/n}\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar\Omega)}, \frac{1}{\|f\|_{\bar\Omega}})$.

Dowód: Istnieje $R > 0$ takie, że $f \geqslant \frac{\|f\|_{\bar{\Omega}}}{2}$ na pewnej kuli $B \subset \Omega$ o promieniu R. Wtedy z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną mamy $\triangle u \geqslant n(\|f/2\|_{\bar{\Omega}})^{1/n}$. Z lematu Hopfa otrzymujemy $-u_{x_{2n-1}}(0) \geqslant D$ dla pewnej stałej D zależnej od $\frac{1}{\|f\|_{\bar{\Omega}}}$ i od $\|f^{1/n}\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}$. To nam implikuje, że liczby $1/u_{k\bar{k}} = -u_n(0)\rho_{k\bar{k}}$ są ograniczone. Możemy zapisać

$$(2.9) \qquad f(0) = \prod_{i=1}^{n} u_{i\bar{i}}(0) - \Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_{i\bar{i}}(0)\Big) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|u_{j\bar{n}}(0)|^2}{u_{j\bar{j}}(0)}.$$

Wtedy

$$(2.10) \qquad u_{n\bar{n}}(0) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|u_{j\bar{n}}(0)|^2}{u_{j\bar{j}}(0)} + \frac{f(0)}{\prod_{i=1}^{n-1} u_{i\bar{i}}(0)} < C. \ \square$$

Dzięki powyższemu lematowi możemy dowieść głównego twierdzenia.

Dowód Twierdzenia 2.1: Załóżmy najpierw, że Ω jest obszarem ściśle pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^\infty$. Wtedy możemy funkcję f aproksymować ciągiem funkcji dodatnich f_k klasy $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, tak żeby ciąg $\varphi_k^{1/n}$ był zbieżny do $f^{1/n}$ w normie $\mathcal{C}^{o,1}(\bar{\Omega})$ a ciąg $\varphi_k^{1/(n-1)}$ był zbieżny do $f^{1/(n-1)}$ w normie $\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})$. Dzięki nierówności (1.13) oraz zasadzie porównawczej $u + \varepsilon_k\rho \leqslant u_k \leqslant u$, gdzie u_k są rozwiązaniami problemu (2.1) z f_k w miejsce f oraz $\varepsilon_k \searrow 0$. Ze zbieżności jednostajnej ciągu u_k i wspólnego oszacowania na laplasjan otrzymujemy oszacowanie na laplasjan u znowu (po ewentualnym przeskalowaniu Ω) zależne tylko od $\inf_{\bar{\Omega}} \det(\rho_{p\bar{q}}), \|\rho\|_{\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega})}, \|f^{1/n}\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}, \|f^{1/(n-1)}\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega})}$ oraz $\frac{1}{\|f\|_{\bar{\Omega}}}$.

Niech teraz Ω będzie tylko takie jak w twierdzeniu. Wtedy możemy od środka aproksymować Ω ciągiem obszarów Ω_k ściśle pseudowypukłymi klasy $\mathcal{C}^\infty$ tak, żeby ρ było aproksymowane w normie $\mathcal{C}^{3,1}$ przez funkcje definiujące dla Ω_k. Wtedy znowu dzięki zasadzie porównawczej u_k zmierza lokalnie jednostajnie do u (gdzie u_k są rozwiązaniami problemu (2.1) z Ω_k w miejsce Ω) więc mamy oszacowanie na laplasjan u.
$\square$

UWAGA 2.9. *Metody dowodu Twierdzenia 2.1 są takie jak w* [**C-K-N-S**] *poza dowodem Lematu 2.5 który autor opracował na podstawie* [**B4**] *(gdzie dowód dotyczy trochę innego twierdzenia z teorii rzeczywistego operatora Monge'a-Ampère'a, ale podobne rozumowanie w przypadku zespolonym jest też w* [**B2**]*).*

Założenie o funkcji $f^{1/n}$, że jest lipschitzowska, nie jest bardzo restrykcyjne. Jest spełnione na przykład gdy funkcja $f^{1/(n-1)}$ rozszerza się na pewne otoczenie $\bar{\Omega}$ do dodatniej funkcji klasy $\mathcal{C}^{1,1}$. Możemy jednak w przypadku kuli dostać prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ regularność nie korzystając z tego założenia:

TWIERDZENIE 2.10. *Niech $\Omega = B$. Niech f będzie nieujemną funkcją na B, taką, że $f^{1/(n-1)} \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B})$. Wtedy rozwiązanie u problemu* (2.1)*, z warunkiem brzegowym $\varphi = 0$, jest prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ na $\bar{B}$.*

Dowód: Tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 2.1 wystarczy dowieść oszacowania *a priori*:

$$\triangle u \leqslant C \text{ w } B,$$

gdzie C jest stałą zależącą tylko od $\|f^{1/(n-1)}\|_{\mathcal{C}^{1,1}}$, w przypadku f gładkiego i dodatniego. Ze względu na dowód tamtego twierdzenia zostało tylko do pokazania oszacowanie na brzegu dla pochodnych mieszanych $u_{k\bar{n}}(0,1)$ dla $k = 1, \ldots, n-1$ ($(0,1) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$).

Niech $T_k = \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} - z_n \frac{\partial}{\partial z_k}$ dla $k = 1 \ldots n-1$. Rozpatrzmy funkcję $w_k = \pm ReT_k u + A(|z|^2 - 1)$. Ponieważ T_k jest styczne do brzegu $\bar{B}$, więc z Lematu 1.11 na B zachodzi nierówność

$$|T_k f^{1/(n-1)}| \leqslant \tilde{C}\sqrt{f^{1/(n-1)}}$$

gdzie stała $\tilde{C}$ zależy tylko od $\|f^{1/(n-1)}\|_{\mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega}}$. Dla A dostatecznie dużego

$$L(w_k) = \pm\frac{ReT_k f^{1/(n-1)}}{(n-1)f^{1/(n-1)}} + A\sum u^{p\bar{p}} \geqslant \frac{\tilde{C}}{\sqrt{f^{1/(n-1)}}} + \frac{A}{2}f^{1/n} \geqslant 0.$$

Dzięki zasadzie maksimum mamy $w_k \leqslant \sup_{\partial B} w_k = 0$, a więc

$$|u_{x_{2k-1}x_n}(0,1)| \leqslant 2A.$$

Podobnie (biorąc $w_k = \pm ImT_k u + A(|z|^2 - 1)$) otrzymujemy

$$|u_{x_{2k}x_n}(0,1)| \leqslant 2A \;\text{ dla }\; k < n. \;\square$$

UWAGA 2.11. *Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu (w przeciwieństwie do Twierdzenia 2.1) nie uzyskaliśmy globalnej lipschitzowskości rozwiązania, ale tylko lokalną.*

Przedstawimy teraz przykład pochodzący z **[P]**, który pokaże, że wykładnik $\frac{1}{n-1}$ w Twierdzeniu 2.1 (jak i w Twierdzeniu 2.10) jest optymalny.

Przykład 2.12.
Niech

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)}, \text{ gdy} & |t| < 1, \\ 0, \text{ gdy} & |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

Połóżmy

$$f = \eta(\frac{|z_n|}{|z'|^\gamma})|z'|^\beta,$$

gdzie $\gamma > 1$, $\beta = 2(n-1)(\gamma-1)-1$ i $z' = (z_1, z_{n-1})$.

Niech $a > \frac{1}{n-1}$. Dla dostatecznie dużego γ spełniona jest nierówność $a > 2\gamma/\beta$. Wtedy dla f zdefiniowanego powyżej (oraz $\Omega = B$ i $\varphi \equiv 0$) rozwiązanie u problemu (2.1) nie jest prawie $\mathcal{C}^{1,1}$ w żadnym otoczeniu zera, ale $f^a \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B})$.

Dowód:

Proste wyliczenie pokazuje, że $f^a \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{B})$. Żeby pokazać nieregularność rozwiązania u w zerze pokażemy, że dla pewnego $C > 0$ i malejącego do zera ciągu $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ zachodzi nierówność

$$u(0, \varepsilon_k) - u(0) \geqslant C\varepsilon_k^{2-\frac{1}{n\gamma}}. \tag{2.11}$$

Ponieważ rozwiązanie jest jedyne więc zależy tylko od $|z'|$ oraz $|z_n|$. W takim razie, rzeczywiście powyższa nierówność pokazuje, że u nie jest $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ dla $\alpha > 1 - \frac{1}{n\gamma}$.

Funkcja u jest ciągła, jej minimum jest w zerze i z zasady maksimum wynika, że

$$u(z', z_n) \leqslant u(w', w_n) \text{ gdy } |z'| \leqslant |w'| \text{ i } |z_n| \leqslant |w_n|. \tag{2.12}$$

Rozpatrzmy funkcję $h(t) = u(0, e^t)$ określoną na przedziale $[-\infty, 0]$. Wtedy h jest niestałą funkcją wypukłą. Niech $t_0 \in (-\infty, 0)$ będzie punktem ścisłej wypukłości funkcji h, to znaczy istnieją liczby η, μ takie, że

$$\{t \in (-\infty, 0] : h(t) \leqslant \eta t + \mu\} = \{t_0\}.$$

Ponieważ w zbiorze $B \cap \{|z'|^\gamma > |z_n|\}$ funkcja u jest maksymalna, więc dla $\tilde{\mu} > \mu$ zbiór $\{u(z) < \eta \log|z_n| + \tilde{\mu}\} \cup (B \cap \{|z'|^\gamma > |z_n\})$ nie może być relatywnie zwartym podzbiorem zbioru $B \cap \{|z'|^\gamma > |z_n\}$. Wynika z tego, że

$$u(z', e^{t_0}) = h(t_0) \text{ jeśli } (z', e^{t_0}) \in B \cap \{|z'|^\gamma > |z_n|\}. \tag{2.13}$$

Niech $s = \sup\{t : h(t) = h(-\infty)\}$. Oczywiście $s \neq 0$, więc istnieje taki ciąg $s_k \searrow s$, że h jest ściśle wypukła w s_k. Z ciągłości funkcji u oraz z (2.13) wynika, że $u(0, e^s) = u(z', e^s)$, gdy $|z'|^\gamma = \min\{e^s, (1-e^{2s})^{\gamma/2}\}$. Dzięki (2.12) implikuje to

$$u(0) \geqslant u(z) \text{ dla } z \in B \cup \{z : |z'|^\gamma \leqslant \min\{e^s, (1-e^{2s})^{\gamma/2}\}, |z_n| \leqslant e^s\}.$$

Ponieważ funkcja f nie jest tożsamościowo równa zero w otoczeniu zera, więc również rozwiązanie u nie jest stałe w otoczeniu zera. Otrzymujemy stąd, że $s = -\infty$.

W dalszym ciągu dowodu $c_1, c_2, \dots$ będą pewnymi stałymi dodatnimi niezależnymi od k. Połóżmy $\varepsilon_k = e^{s_k}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Możemy założyć, że $\varepsilon_k^2 + \varepsilon^{\frac{2}{\gamma}} < 1$ (ponieważ tak jest dla dostatecznie dużych k, więc w przeciwnym wypadku możemy pominąć początkowe wyrazy).

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Niech $\varepsilon = \varepsilon_k$. Zdefiniujmy

$$
\begin{aligned}
P &= \{z : |z'|^\gamma, |z_n| < \varepsilon\},\\
\tilde{P} &= \{z : |\frac{z'}{\varepsilon^{1/\gamma}}|^2 + |\frac{z_n}{\varepsilon}|^2 < 1\},\\
\widehat{P} &= \{z : \frac{1}{8} < |\frac{z'}{\varepsilon^{1/\gamma}}| < \frac{1}{4}, |\frac{z_n}{\varepsilon}| < \frac{1}{2 \cdot 8^\gamma}\},\\
\psi &= |\frac{z'}{\varepsilon^{1/\gamma}}|^2 + |\frac{z_n}{\varepsilon}|^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$\widehat{P} \subset \frac{1}{2}\tilde{P} \subset \tilde{P} = \{\psi < 1\} \subset P$$

oraz

$$c_1 \varepsilon^{2(1+(n-1)/\gamma)} \leqslant \mathcal{L}(\widehat{P}) \leqslant \mathcal{L}(P) \leqslant c_2 \varepsilon^{2(1+(n-1)/\gamma)}.$$

Ponieważ $\inf_{\widehat{P}} f = f(z', z_n) \geqslant c_3 \varepsilon^\beta$ gdy $|z'|^\gamma = 2|z_n| = \frac{1}{8^\gamma}\varepsilon$ oraz $\det(\psi_{p\bar{q}}) = \varepsilon^{-2(1+(n-1)/\gamma)}$ więc zachodzą następujące nierówności

$$\int_{\widehat{P}} f d\mathcal{L} \geqslant c_4 \varepsilon^{\beta + 2(1+(n-1)/\gamma)},$$

$$\int_P \det(\psi_{p\bar{q}}) d\mathcal{L} \leqslant c_5.$$

Używając powyższych nierówności i Twierdzenia 1.16 możemy policzyć

$$\|u - u(0)\|_{\tilde{P}}^n \geqslant c_6 \int_{\tilde{P}} (-\psi)^n f d\mathcal{L} \geqslant c_6 \int_{\widehat{P}} (-\psi)^n f d\mathcal{L} \geqslant c_7 \varepsilon^{\beta + 2(1+(n-1)/\gamma)}.$$

Dzięki (2.12) i (2.13) otrzymujemy

$$u(0, \varepsilon) - u(0) = \|u - u(0)\|_P \geqslant \|u - u(0)\|_{\tilde{P}}$$

co dzięki poprzedniej nierówności daje nam (2.11). $\square$

Powyższy przykład można zmodyfikować do przykładu na przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n$ z metryką Fubiniego-Study'ego. Pokazuje on, że w przypadku równania Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich wykładnik $\frac{1}{n-1}$ w twierdzeniu **??** jest optymalny.

Przykład 2.13.
Niech $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$ i niech ω będzie metryką Fubiniego-Study'ego. Weźmy funkcję $\tilde{f}$ ciągłą na $\mathbb{P}^n$ spełniającą warunek (1.5) która jest równa 0 poza kulą $B \subset \mathbb{C}^n$, jest równa funkcji $\frac{f}{\det(g_{p\bar{q}})}$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ gdzie f jest funkcją z poprzedniego wykładu a $g = \frac{1}{2}\log(1+|z|^2)$

(czyli $\omega = dd^c g$) oraz w $\mathbb{C}^n$ zależy tylko od $|z_1|$ i $|z'|$. Wtedy jeśli φ jest taka, że $\omega + dd^c\varphi \geqslant 0$ oraz spełnia równanie $(\omega + dd^c\varphi)^n = \omega^n$ to φ nie jest $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ dla pewnego $\alpha < 1$ w żadnym otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{C}^n$.

Dowód: Wystarczy powtórzyć dowód z poprzedniego przykładu dla funkcji $u = g + \varphi$.

ROZDZIAŁ 3

Równanie Monge'a-Ampère'a z nieskończonym warunkiem brzegowym

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ będzie ściśle pseudowypukłym obszarem klasy $\mathcal{C}^\infty$. Niech $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ będzie funkcją dodatnią, $\tau \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\tau, +\infty)$ będzie funkcją dodatnią i rosnącą oraz w przypadku $\tau \neq -\infty$ zakładamy jeszcze, że $\lim_{t \to \tau^+} f(t) = 0$.

Będziemy rozpatrywać problem Dirichleta postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega) \\ \det(u_{p\bar{q}}) = gf(u) \text{ w } \Omega \\ \lim_{z \to z_0} u(z) = +\infty \text{ dla każdego } z_0 \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Załóżmy, że f spełnia dodatkowo warunek:

W1: Funkcja

$$\Psi(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{F(t)^{1/(n+1)}},$$

gdzie F jest dowolną funkcją taką, że $F' = f$, jest dobrze określona dla dostatecznie dużych x.

Powyższy warunek implikuje następującą równość (zobacz dowód w [**G-P**]):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)^{n/(n+1)}}{f(x)} = 0. \tag{3.2}$$

Będzie nam przydatna funkcja w będąca jedynym rozwiązaniem problemu Dirichleta

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ \det(w_{p\bar{q}}) = g \text{ w } \Omega \\ w = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Dzięki Twierdzeniu 1.5, $w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$.

Powtarzając rozumowanie z [**I1, I2**] (lub w przypadku rzeczywistym z [**M**]) udowodnimy następujący:

Lemat 3.1. *Istnieje funkcja $H \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega)$ taka, że $u \leqslant H$ dla każdej funkcji $u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ spełniającej równanie* $\det(u_{p\bar{q}}) = gf(u)$.

Dowód: Niech $W = (-\Psi)^{-1}$ oraz $H = W \circ (Kw)$, gdzie $K > 0$ jest na tyle małe, żeby H było dobrze określone. Wtedy $W' = F^{1/(n+1)} \circ W$, $W'' = \frac{f}{(n+1)F^{(n-1)/(n+1)}} \circ W$. Funkcja W jest gładka, rosnąca i wypukła więc H jest gładką funkcją plurisubharmoniczną w Ω. Możemy więc policzyć

$$\det(H_{p\bar{q}}) = \det(W' \circ (Kw)Kw_{p\bar{q}} + \frac{1}{n+1}W'' \circ (Kw)K^2 w_p w_{\bar{q}})$$

$$= gK^n F^{n/(n+1)} \circ W \circ (Kw) + gK^{n+1} f \circ W \circ (Kw) w^{p\bar{q}} w_p w_{\bar{q}}$$

$$= gf(H)\left(\frac{K^n F^{n/(n+1)}}{f} \circ H + K^{n+1}\frac{w^{p\bar{q}} w_p w_{\bar{q}}}{n+1}\right).$$

Ponieważ dzięki warunkowi W1 zachodzi wzór (3.2), więc dla dostatecznie małych K otrzymujemy $\det(H_{p\bar{q}}) \leqslant gf(H)$. Z zasady porównawczej otrzymujemy tezę lematu. $\Box$

Rozpatrzmy funkcję $\Phi : (\tau, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\Phi(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{f(t)^{1/n}}.$$

Jest ona dobrze określona, ponieważ wzór (3.2) razem z warunkiem W1 gwarantują zbieżność powyższej całki.

Załóżmy teraz dodatkowo, że f spełnia jeszcze następujący warunek:

W2: Zachodzi nierówność:

$$\Phi(\tau) = \lim_{x \to \tau^+} \Phi(x) > \sup_\Omega(-w).$$

Oczywiście gdy $\tau = -\infty$ to warunek W2 jest spełniony. W przypadku $\tau \in \mathbb{R}$, jeśli $f(\tau + x) \leqslant Cx^n$ dla pewnego $C > 0$ i x z pewnego prawostronnego otoczenia 0, to również warunek W2 jest spełniony. Jeśli natomiast warunek W2 nie jest spełniony, to zawsze istnieje takie $\varepsilon > 0$, że po zmianie Ω na $\varepsilon\Omega = \{\varepsilon z : z \in \Omega\}$ i g na $g \circ T$ gdzie $T(z) = \frac{z}{\varepsilon}$ już jest spełniony (można też nie zmieniać Ω tylko przemnożyć g przez dostatecznie małe ε).

Możemy teraz zdefiniować funkcję $V = (-\Phi)^{-1}$ i $\varphi = V \circ w$. Łatwo policzyć, że $V' = f^{1/n} \circ V$ oraz $V'' = \frac{f'}{nf^{(n-2)/n}} \circ V$. Funkcja φ (podobnie jak funkcja H z Lematu 3.1) jest gładka i plurisubharmoniczna. Policzmy dla niej operator Monge'a-Ampère'a:

$$\det(\varphi_{p\bar{q}}) = \det(V' \circ w w_{p\bar{q}} + V'' \circ w w_p w_{\bar{q}})$$

$$= gf \circ \varphi + g\frac{1}{n}(f^{1/n} f') \circ \varphi w^{p\bar{q}} w_p w_{\bar{q}} \geqslant gf(\varphi).$$

Niech $\Omega_k = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < k\}$ (gdzie k jest tak duże, żeby zbiór Ω_k był obszarem ściśle pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^\infty$) oraz niech u_k będzie rozwiązaniem następującego problemu Dirichleta:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}_k) \\ \det(u_{p\bar{q}}) = gf(u) \text{ w } \Omega_k \\ u = k(= \varphi) \text{ na } \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Z zasady porównawczej dostaję, że $\varphi \leqslant u_k$ na Ω_k a dzięki temu stosując ją drugi raz, że $u_k \leqslant u_{k+1}$. Stosując Lemat 3.1 na każdym ze zbiorów Ω_k) otrzymujemy, że ciąg u_k jest rosnący i lokalnie ograniczony. Przy dodatkowych założeniach dowiedziemy, że

$$u = \lim_{k\to+\infty} u_k \tag{3.4}$$

jest gładkim rozwiązaniem problemu (3.1).

Lemat 3.2. *Przy powyższych założeniach, istnieje stała C niezależna od k (może zależeć od Ω, f, g) taka, że*

$$|\nabla u_k| \leqslant Cf^{1/n}(k).$$

Dowód: Ponieważ $u \geqslant \varphi$, więc na brzegu otrzymujemy

$$f^{-1/n}(u_k)|\nabla u_k| = |\nabla\Phi \circ u_k| \leqslant |\nabla\Phi \circ \varphi| = |\nabla w|.$$

Ustalmy $r \in \{1, \ldots, 2n\}$. Żeby oszacować u_{x_r} rozważmy funkcję $\eta = u_{x_r} + Kf^{1/n}(k)|z|^2$. Załóżmy, że η przyjmuje maksimum w $z_0 \in \Omega_k$. Możemy założyć, że $u_{x_r} \geqslant 0$. Korzystając ze wzoru (1.14) oraz z tego, że f jest rosnąca, w z_0 mamy

$$\begin{aligned} L(u_{x_r} + Kf^{1/n}(k)|z|^2) &= (\log gf(u_k))_{x_r} + Kf^{1/n}(k)\sum_{p=1}^n u^{p\bar{p}} \\ &\geqslant (\log g)_{x_r} + nK > 0 \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużego K. Z zasady maksimum dostajemy otrzymujemy (3.2). $\square$

Oczywiście powyższy lemat nie daje nam jeszcze lipshitzowskości funkcji u, ale użyjemy go, żeby otrzymać oszacowanie na laplasjan na brzegu Ω_k.

Niech $T = (\Phi^{-1}(\sup_\Omega(-w)), +\infty)$. Rozpatrzmy jeszcze następujący warunek (wymieniony już w Preliminariach[1]):

W3: Istnieją stałe α, β, $\gamma \geqslant 1$ takie, że na zbiorze T zachodzą nierówności

$$\alpha^{-1}f^{-\beta} \leqslant f' \leqslant \alpha f^\beta,$$

[1] W podanej tu postaci jest nawet trochę słabszy bo nie wymagamy by $f' > 0$ na całym $\mathbb{R}$.

$$(\log f)'' \leqslant \gamma (\log f)'^2.$$

UWAGA 3.3. *Zauważmy, że funkcje $f = e^{Kt}$ dla $K > 0$, $f = e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^t}}}}}$ $f = t^\gamma$ dla $\gamma > n$, $t^n + t^{n+1}$ oraz $t^n(\log(t+2))^{2n}$ spełniają warunki W1-W3.*

LEMAT 3.4. *Załóżmy, ze spełnione są warunki W1- W3. Wtedy istnieją N i C niezależne od k takie, że*

$$\frac{\triangle u_k}{f(u_k)^N} \leqslant C \text{ na } \Omega_k.$$

Dowód: Niech $c_0, c_1, c_2, \ldots$ będą stałymi dodatnimi zależnymi tylko od diamΩ, $\|w\|_{\mathcal{C}^{2,1}}$, f oraz g. Wystarczy dowieść, że funkcje u_k w obszarze Ω_k mają laplasjan lokalnie wspólnie ograniczony. Dla uproszczenia w dalszej części dowodu będziemy pisać u w miejsce u_k oraz Ω zamiast Ω_k. Nie będziemy też pisać funkcji u tam, gdzie występuje jako funkcja wewnętrzna złożenia, np. zamiast $f \circ u$ lub $f(u)$ będziemy pisać tylko f. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień.

Pokażemy, że dla dostatecznie dużych N funkcja

$$\Lambda = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \lambda_i f^{-N} e^{|z|^2},$$

gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy $(u_{p\bar{q}})$, jest ograniczona. Dowód podzielimy na dwie części, najpierw oszacujemy Λ na brzegu, a potem we wnętrzu (korzystając również z oszacowaniu na brzegu).

Część I: Funkcja Λ jest ograniczona na brzegu

Weźmy punkt $z_0 \in \partial\Omega$. Po zmianie zmiennych możemy założyć, że

$$z_0 = 0,$$
$$w = -x_{2n-1} + a_{p\bar{q}} z_p \bar{z}_q + o(|z|^2) \text{ dla pewnej macierzy } (a_{p\bar{q}})_{p,q=1}^n > 0$$
$$w_{p\bar{q}} = u_{p\bar{q}} = 0 \text{ dla } p, q < n \text{ takich, że } p \neq q.$$

Niech $a = \rho_{x_{2n-1}}$, $b = \rho_{x_l}$. Dla $l = 1, \ldots, 2n-2$ rozważmy funkcję

$$w_l = \pm T_l u + (u_{x_l})^2 + (u_{x_{2n}})^2 + A|z|^2 - Bx_{2n-1}$$

, gdzie $T_l = a\partial_{x_l} - b\partial_{x_{2n-1}}$. Korzystając z tego, że

$$u^{p\bar{q}} u_{x_{2n-1}\bar{q}} = 2u^{p\bar{q}} u_{n\bar{q}} + iu^{p\bar{q}} u_{x_{2n}\bar{q}} = 2\delta_{pn} + iu^{p\bar{q}} u_{x_{2n}\bar{q}} \;,$$
$$u^{p\bar{q}} u_{x_{2n-1}p} = 2u^{p\bar{q}} u_{p\bar{n}} - iu^{p\bar{q}} u_{x_{2n}p} = 2\delta_{qn} - iu^{p\bar{q}} u_{x_{2n}p} \;,$$

policzmy

$$\begin{aligned} Lw_l = \pm u^{p\bar{q}} (& a_{p\bar{q}} u_{x_l} - b_{p\bar{q}} u_{x_{2n-1}} + a_p u_{x_l\bar{q}} - b_p u_{x_{2n-1}\bar{q}} + a_{\bar{q}} u_{x_n p} - b_{\bar{q}} u_{x_{2n-1}p}) \\ & \pm T_l \log(gf) + 2u_{x_l} (\log(gf))_{x_l} + 2u^{p\bar{q}} u_{px_l} u_{\bar{q}x_l} + \\ & 2u_{x_{2n}} (\log(gf))_{x_{2n}} + 2u^{p\bar{q}} u_{px_{2n}} u_{\bar{q}x_{2n}} + A\sum_p u^{p\bar{p}} \end{aligned}$$

$$\geqslant -c_1|\nabla u|\sum_p u_{p\bar{p}} - c_2|\nabla u| - 2\sqrt{u^{p\bar{q}}a_p a_{\bar{q}}}\sqrt{u^{p\bar{q}}u_{x_l p}u_{x_l\bar{q}}} - 2\sqrt{u^{p\bar{q}}b_p b_{\bar{q}}}\sqrt{u^{p\bar{q}}u_{x_{2n}p}u_{x_{2n}\bar{q}}}$$

$$-c_3 - c_4\frac{f'|\nabla u|}{f} - c_5|\nabla u| - 4\frac{f'|\nabla u|^2}{f} + 2u^{p\bar{q}}u_{px_l}u_{\bar{q}x_l} + 2u^{p\bar{q}}u_{px_{2n}}u_{\bar{q}x_{2n}} + A\sum_p u^{p\bar{p}}.$$

Ponieważ $\sum u_{p\bar{p}} \geqslant \frac{1}{f^{1/n}(k)}$, więc (korzystając jeszcze z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną oraz Lematu 3.2) dla pewnego $A < c_6(f^{1/n}(k) + \sup_\Omega f')$ otrzymujemy $Lw_l > 0$.

Niech S_ε będzie składową spójną zbioru $\{z \in \Omega : x_{2n-1} < \varepsilon\}$ której domknięcie zawiera 0. Dla odpowiednio dobranego (dostatecznie małego i niezależnego ani od k ani od z_0) $\varepsilon > 0$ i $z \in \partial S_\varepsilon$ mamy

$$|z| \leqslant \frac{c_7}{\varepsilon}\sqrt{x_{2n-1}} = c_8\sqrt{x_{2n-1}}.$$

Wtedy na ∂S_ε zachodzą również nierówności:

$$\pm T_l u \leqslant c_9 x_{2n-1} \text{ (ponieważ } T_l u = 0 \text{ na } \partial\Omega \cap \partial S_\varepsilon),$$

$$(u_{x_k})^2 \leqslant c_{10}|\nabla u|^2|z|^2 \leqslant c_{11}f^{2/n}x_{2n-1} \text{ dla } k \neq 2n-1.$$

W takim razie dobierając odpowiednie $B < c_{12}(f^{2/n}(k) + \sup_\Omega f')$ dostajemy $w_l \leqslant 0$ na ∂S_ε. Korzystając z zasady maksimum otrzymujemy, że $w_l \leqslant 0$ na całym S_ε. To implikuje, że $w_{l x_{2n-1}} < c_{13}(f^{1/n}(k) + \sup_\Omega f')$. Dzięki Lematowi 3.2 oraz warunkowi W3 otrzymujemy z tego oszacowanie na pochodną mieszaną

$$|u_{p\bar{n}}| < c_{14}f^N \text{ dla pewnego} N > 0.$$

Standardowo (tak jak w dowodzie Lematu 2.8) korzystając z lematu Hopfa oraz rozwiązując w naszym układzie współrzędnych równanie Monge'a-Ampère'a ze względu na $u_{n\bar{n}}$ dostajemy w zerze oszacowanie

$$\triangle u < c_{15}f^N.$$

Część II: Funkcja Λ jest ograniczona na $\bar{\Omega}$.

Weźmy teraz punkt z_0 we wnętrzu Ω w którym funkcja Λ przyjmuje maksimum (jeśli nie ma takiego punktu to dzięki części pierwszej dowód jest skończony). Po liniowej zmianie układu współrzędnych możemy założyć, że w z_0 macierz $(u_{p\bar{q}})$ jest diagonalna i $u_{1\bar{1}} = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}}\lambda_k$. Niech $h = u_{1\bar{1}}f^{-N}e^{|z|^2}$. Wtedy funkcja h również przyjmuje maksimum w z_0 i $h(z_0) = \Lambda(z_0)$. Możemy założyć, że

$$h(z_0) \geqslant Ce^{|z_0|^2} \tag{3.5}$$

dla pewnego C które (dostatecznie duże) dobierzemy później oraz $|z_0| < \frac{1}{2N}$. Wtedy

$$\sum_p u^{p\bar{p}} \geqslant Cf^{(N-1)/(n-1)}. \tag{3.6}$$

Zauważmy jeszcze, że $h_p = 0$ dla $p = 1, \ldots, n$ co nam daje równość

$$u_{p1\bar{1}} = u_{1\bar{1}}(N\frac{f'u_p}{f} - \bar{z}_p). \tag{3.7}$$

Zacznijmy liczyć:

(3.8)
$$L(\log h) = \frac{u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} - \frac{u^{p\bar{p}}u_{p1\bar{1}}u_{\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}^2} - N(\log f)''u^{p\bar{p}}u_p u_{\bar{p}} - N(\log f)' + \sum_1^n u^{p\bar{p}}.$$

Będziemy szacować powyższe wyrazy po kolei. W poniższych rachunkach korzystamy kolejno z (1.15), W3, (3.7), nierówności między średnimi potęgowymi, (1.14), ograniczenia na $|z|$ oraz nierówności Schwarza

$$\frac{u_{p\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} = \frac{(\log(gf))_{1\bar{1}}}{u^{1\bar{1}}} + u^{1\bar{1}}u^{p\bar{p}}u^{q\bar{q}}u_{1p\bar{q}}u_{\bar{1}\bar{p}q}$$

$$\geqslant \frac{(\log g)_{1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + (\log f)' + \frac{(\log f)''u_1u_{\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + u^{p\bar{p}}\frac{u_{p1\bar{1}}u_{\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}^2} + \sum_{p=2}^n \frac{u_{p1\bar{1}}u_{\bar{p}1\bar{1}}}{u_{p\bar{p}}u_{1\bar{1}}^2} + \sum_{p=2}^n \frac{u_{p\bar{p}\bar{1}}u_{\bar{p}p1}}{{u_{p\bar{p}}}^2u_{1\bar{1}}}$$

$$\geqslant -c_{16} - \alpha f^{\beta-1} + \frac{(\log f)''u_1u_{\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + u^{p\bar{p}}\frac{u_{p1\bar{1}}u_{\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}^2}$$

$$+ \sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}}(N\frac{f'u_p}{f} - \bar{z}_p)(N\frac{f'u_{\bar{p}}}{f} - z_p) + \frac{1}{(n-1)u_{1\bar{1}}}|(\log gf)_1 - \frac{u_{1\bar{1}1}}{u_{1\bar{1}}}|^2$$

$$\geqslant -c_{17}f^{\beta-1} + \frac{(\log f)''u_1u_{\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} + u^{p\bar{p}}\frac{u_{p1\bar{1}}u_{\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}^2} + (N^2-1)(\log f)'\sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}}u_pu_{\bar{p}}$$

$$+ (\log f)'\sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}}u_pu_{\bar{p}} + \frac{1}{4}\sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}} - 2\sqrt{\sum_{p=2}^n ((\log f)')^2 u^{p\bar{p}}u_pu_{\bar{p}}}\sqrt{\sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}}N^2 z_p\bar{z}_p}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}} + \sum_{p=2}^n u^{p\bar{p}}|z_p|^2 + \frac{1}{(n-1)u_{1\bar{1}}}|(\log gf)_1 - \frac{u_{1\bar{1}1}}{u_{1\bar{1}}}|^2.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy
(3.9)
$$\frac{u_{p\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}} \geqslant \quad -c_{17}f^{\beta-1} + u^{p\bar{p}}\frac{u_{p1\bar{1}}u_{\bar{p}1\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}^2} + (N^2-1)(\log f)'\sum_{p=2}^{n} u^{p\bar{p}}u_p u_{\bar{p}}$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} + \frac{1}{(n-1)u_{1\bar{1}}}|(\log gf)_1 - \frac{u_{1\bar{1}1}}{u_{1\bar{1}}}|^2 + \frac{(\log f)'' u_1 u_{\bar{1}}}{u_{1\bar{1}}}$$

Tak jak wyżej stosując warunek W3 dostajemy
$$(\log f)' \geqslant \alpha f^{\beta-1}. \tag{3.10}$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

Przypadek 1:
$$|u_1| < \frac{|(\log g)_1| + |z_1|}{(\log f)'}.$$
Wtedy dzięki W3 mamy
$$|u_1| < c_{18} f^{\alpha+1}.$$
Dzięki (3.5) i W3 implikuje to
$$-(\log f)'' u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}} \geqslant -c_{19} f^{4\alpha - N}.$$

Przypadek 2:
$$|u_1| \geqslant \frac{|(\log g)_1| + |z_1|}{(\log f)'}.$$
W tym przypadku, dzięki (3.7) i W3 mamy
$$\frac{1}{(n-1)u_{1\bar{1}}}|(\log gf)_1 - \frac{u_{1\bar{1}1}}{u_{1\bar{1}}}|^2 - (\log f)'' u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}}$$
$$= \frac{u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}}}{n-1}|\frac{(\log g)_1 - \bar{z}_1}{u_1 (\log f)'} + 1 - N|^2 - (\log f)'' u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}}$$
$$\geqslant (\log f)'^2 u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}} (\frac{(N-2)^2}{n-1} - \gamma) \geqslant c_{20} f^{2\alpha - 2}(\frac{(N-2)^2}{n-1} - \gamma) u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}}.$$
Widzimy zatem, że tak w przypadku pierwszym jak i drugim otrzymujemy dla dostatecznie dużego N, że
$$\frac{1}{(n-1)u_{1\bar{1}}}|(\log gf)_1 - \frac{u_{1\bar{1}1}}{u_{1\bar{1}}}|^2 - (\log f)'' u^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}} \geqslant 0$$
Dzięki temu używając (3.6), (3.9), (3.5) otrzymujemy dla dostatecznie dużych C i N, że
$$L(\log h) > 0.$$
Otrzymaliśmy więc sprzeczność z zasadą maksimum. □

Dzięki powyższemu lematowi łatwo jest pokazać gładkość rozwiązania problemu (3.1):

TWIERDZENIE 3.5. *Załóżmy, ze spełnione są warunki W1- W3. Wtedy skonstruowane rozwiązanie u jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ na Ω.*

Dowód: Ponieważ lokalnie $\triangle u$ jest ograniczony, więc u należy do przestrzeni Sobolewa $W^{2,p}$ dla $p \geqslant 1$. Z Twierdzeń 1.20 i 1.21 wynika więc, że u jest funkcją gładką. $\square$

UWAGA 3.6. *W powyższym twierdzeniu nie trzeba zakładać klasy $\mathcal{C}^\infty$ zbioru Ω, ale żeby dowód pozostawał poprawny, trzeba, żeby rozwiązanie w problemu (3.3) było klasy $\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$.*

Podobnie jak w przypadku rzeczywistym (zobacz [**L-M**]) dla funkcji $f(x) = x^\gamma$ problem (3.1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\gamma > n$. Pokazuje to następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3.7. *Załóżmy, że całka $\int \frac{1}{f^{1/n}}$ jest rozbieżna w $+\infty$. Wtedy nie istnieje funkcja u będąca rozwiązaniem problemu:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{PSH} \cap \mathcal{C}(\Omega) \\ \det(u_{p\bar{q}}) \leqslant gf(u) \ \ w \ \ \Omega \\ \lim_{z \to z_0} u(z) = +\infty \ \ dla \ \ z_0 \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Dowód (podobny jak w [**M**]*):* Możemy założyć, że $\tau < 0$. Załóżmy, że istnieje rozwiązanie u problemu (3.11). Niech

$$\mu(x) = \int_0^x \frac{dt}{f^{1/n}(t)}.$$

Wtedy dla dostatecznie dużych A funkcja $\phi_A = \mu^{-1} \circ (w + A)$ jest dobrze określona. Tak samo jak wcześniej dla funkcji φ otrzymujemy $\det(\phi_{Ap\bar{q}}) \geqslant gf(\phi_A)$. Z zasady porównawczej dostajemy $u \geqslant \phi_A$. Ponieważ, A może być dowolnie duże otrzymaliśmy sprzeczność. $\square$

Bibliografia

[A] T. Aubin, *Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes*, C.R. Acad. Sci.Paris 283 (1976), 119-121,

[B-F] E. Bedford, J. E. Fornaess, *Counterexamples to regularity for the complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. 50 (1979), 129-134,

[B-T1] E. Bedford, B.A.Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. 37 (1976), 1-44,

[B-T2] E. Bedford, B.A.Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149, 1-40 (1982),

[B] L. Bieberbach, $\triangle u = e^u$ *und die authomorphen funktionen*, Math. Ann. 77 (1916), 173-212,

[B1] Z. Błocki, *Estimates for the complex Monge-Ampère operator*, Bull. Pol. Acad. Sci. 41 (1993), 151-157,

[B2] Z. Błocki, *On the regularity of the complex Monge-Ampère operator*, Complex geometric analysis in Pohang (1997), 181–189, Contemp. Math., 222, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999,

[B3] Z. Błocki, *Regularity of the degenerate Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, Math. Z. 244 (2003), no. 1, 153–161,

[B4] Z. Błocki, *Interior regularity of the degenerate Monge-Ampère equation*, Bull. Austral. Math. Soc. 68 (2003), 81-92,

[B5] Z. Błocki, *Uniqueness and stability for the Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), 1697-1702,

[B6] Z. Błocki, *The complex Monge-Ampère operator in pluripotential theory, unfinished lecture notes*, dostępne na stronie http://gamma.im.uj.edu.pl/ blocki/publ/ln/index.html,

[B7] Z. Błocki, *The complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds, Course given at the Winter School in Complex Analysis, Toulouse, January 2005* , dostępne na stronie http://gamma.im.uj.edu.pl/ blocki/publ/ln/index.html,

[B8] Z. Błocki, *Remark on the paper "On the Dirichlet problem for degenerate Monge-Ampère equations" by P. Guan, N. S. Trudinger, X.-J. Wang*, 2002, nieopublikowane,

[BR] H. Bremermann, *On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Charakterization of Šilov boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246-276,

[C-K-N-S] L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg, J. Spruck *The Dirichlet problem for non-linear second order elliptic equations II: Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 209-252, [C-N-S] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 3, 369–402,

[C-Y] S.-Y. Cheng, S.-Y. Yau *On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and regularity of Fefferman's equation*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 507-544,

[D1] J.-P. Demailly, *Potential theory in several complex variables*, Preprint, 1991.

[D2] J.-P. Demailly, *Monge-Amp'ere operators, Lelong numbers and intersection theory*, Complex analysis and geometry, 115-193, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993,

[F] C, Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. (2) 103 (1976), no. 2, 395–416,

[G-S] T. W. Gamelin, N. Sibony *Subharmonicity for uniform algebras*, J. Funct. Anal. 35 (1980), no. 1, 64–108,

[G-T] D. Gilbarg, N. S. Trudinger *Elliptic partial differential equations of second order*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983,

[G-P] F. Gladiali, G. Porru, *Estimates for explosive solutions to p-Laplace equation*, Progress in Partial Differential Equations (Pont-á-Mousson), Vol. 1, Pitman Res. Notes Math. Series, Longman 383 (1998), 117-127,

[G] P. Guan, *$\mathcal{C}^2$ apriori estimate for the degenerate Monge-Ampère equations*, Duke Math. J. 86 (1997), 323-346,

[G-T-W] P. Guan, N. S. Trudinger, X.-J. Wang, *On the Dirichlet problem for the degenerate Monge-Ampère equations*, Acta Math. 182 (1999), 87-104,

[GU] C. Gutiérrez, *The Monge-Ampère equation*, Birkhaüser, Berlin, 2001.

[I1] B. Ivarsson, *Regularity and boundary behavior of solutions to complex Monge-Ampère operator*, Uppsala Dissertations in Mathematics 21, Ph. D. Thesis,

[I2] B. Ivarsson, *Regularity and uniqeness of solution to boundary blow-up problems for the complex Monge-Ampère operator*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 54 (2006), 13-25,

[I-M] B. Ivarsson, J. Matero, *The blow-up rate of solution to boundary blow-up problems for The complex Monge-Ampère operator*, Manuscripta Math. 120 (2006), no. 3, 325–345,

[K] M. Klimek, *Pluripotential theory*, The Clarendon Press 1991,

[K1] S. Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation*, Acta Math. 180 (1998), 69-117,

[K2] S. Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 178 (2005), no. 840,

[KR1] N.V. Krylov, *Smoothness of the payoff function for a controllable process in a domain*, Izv. Akad. Nauk SSSR 53 (1989), 66-96; English translation: Math. USSR-Izv. 34 (1990), 65-95,

[KR2] N.V. Krylov, *On analogues of the simplest Monge-Ampère equation*, C.R. Acad. Sci.Paris 318 (1994), 321-325,

[L] P. Lelong, *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris 215 (1942), 398-400,

[L-M] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On Singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, J. Math. Anal. Appl., 197 (1996), 341-362,

[M] A. Mohammed, *On the existence of solutions to the Monge-Ampère equation with infinite boundary values*, Proc. Amer. Math. Soc. 138 no. 1 (2007), 141-149,

[M-Y] N. Mok, S.-T. Yau *Completeness of the Kähler-Einstein metric on bounded domains and the characterization of domains of holomorphy by curvature conditions*, The mathematical heritage of Henri Poincaré, Part 1 (Bloomington, Ind., 1980), 41–59, Proc. Sympos. Pure Math., 39, Amer. Math. Soc.,

[O] K. Oka, *Domaines pseudoconvexes*, Tôhoku Math. J. 49 (1942), 15-52,

[P] S. Pliś, *A counterexample to the regularity of the degenerate complex Monge-Ampere equation*, Ann. Polon. Math. 86.2 (2005), 171-175,

[T] G. Tian, *Canonical metrics in Kähler geometry*, Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000

[TR] N.S. Trudinger, *Regularity of solutions of fully nonlinear elliptic equations*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) 3-A (1984), 421-430,

[W] J. Walsh, *Continuity of envelopes of plurisuharmonic functions*, J. Math. Mech. 18 (1968), 143-148,

[WA] X.-J. Wang, *Some countrexamples to the regularity of Monge-Ampère equations* , Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 841-845,

[Y] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978,), 339-411.