Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki

Zbigniew Błocki

ZBIORY OSOBLIWOŚCI FUNKCJI OSOBNO ANALITYCZNYCH

Praca magisterska

Promotor:
Prof. dr hab. **Józef Siciak**

Kraków 1991

1.Wstęp. Jeśli Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_s}$, to powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ jest *p-osobno analityczna* $(1 \leq p < s)$, jeżeli dla każdego $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_s^0\right) \in \Omega$ i dla każdego ciągu $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq s$ funkcja

$$\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\right) \longrightarrow f\left(x_1^0, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, \ldots, x_s^0\right)$$

jest analityczna w pewnym otoczeniu punktu $\left(x_{i_1}^0, \ldots, x_{i_p}^0\right)$. Dla funkcji $p-$osobno analitycznej f w Ω niech

$$\mathrm{A}(f) := \{x \in \Omega : f \text{ jest analityczna w pewnym otoczeniu punktu } x\}$$

oznacza jej *zbiór analityczności*, a $\mathrm{S}(f) := \Omega \setminus \mathrm{A}(f)$ - jej *zbiór osobliwości.*

Jeżeli X i Y są dowolnymi zbiorami, $S \subset X \times Y$ oraz $\left(x^0, y^0\right) \in X \times Y$, to oznaczamy $S\left(x^0, \bullet\right) := \left\{y \in Y : \left(x^0, y\right) \in S\right\}$, $S\left(\bullet, y^0\right) := \left\{x \in X : \left(x, y^0\right) \in S\right\}$.

Poniższe twierdzenia charakteryzują zbiory osobliwości funkcji osobno analitycznych:

Twierdzenie A. *Jeżeli f jest $p-$osobno analityczna w Ω, to dla dowolnego ciągu $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq s$, gdzie $q := s - p$, projekcja zbioru $S(f)$ na $\mathbf{R}^{n_{j_1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_{j_q}}$ jest zbiorem pluripolarnym (w $\mathbf{C}^{n_{j_1}} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_{j_q}}$).*

Twierdzenie B. *Niech S będzie domkniętym podzbiorem zbioru Ω takim, że dla każdego ciągu $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq s$, gdzie $q := s-p$, projekcja zbioru S na $\mathbf{R}^{n_{j_1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_{j_q}}$ jest zbiorem pluripolarnym. Wtedy istnieje f - funkcja $p-$osobno analityczna w Ω taka, że $S = S(f)$.*

Twierdzenie C. *Niech f będzie funkcją $p-$osobno analityczną w Ω. Jeżeli $1 \leq k < s$, to dla quasi prawie wszystkich $x \in \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k}$ (to jest dla $x \in \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k} \setminus P$, gdzie P jest pluripolarny) $S(f(x, \bullet)) = S(f)(x, \bullet)$.*

Twierdzenia A i B w przypadku $s = 2$, $p = n_1 = n_2 = 1$ zostały udowodnione przez Saint Raymonda [2]. Wynik ten został uogólniony przez Siciaka [5], który udowodnił twierdzenie A dla $p \geq s/2$ oraz twierdzenie B w całości. Celem tej pracy jest udowodnienie twierdzenia C i, jako prostej konsekwencji, twierdzenia A w pełnej wersji.

Chciałbym podziękować profesorowi Siciakowi za opiekę naukową w czasie dwóch ostatnich lat moich studiów oraz za pomoc w napisaniu tej pracy.

2.Preliminaria. W dalszej części potrzebne nam będą dwa następujące twierdzenia:

Twierdzenie Siciaka ([3]; zobacz też [4]). *Niech dla $j = 1, \ldots, s$ $D_j = D_j^1 \times \cdots \times D_j^{n_j}$, D_j^t - zbiory otwarte w $\mathbf{C}$, symetryczne względem osi x_t $(t = 1, \ldots, n_j)$, $K_j = K_j^1 \times \cdots \times K_j^{n_j}$, K_j^t - przedziały domknięte zawarte w $D_j^t \cap \mathbf{R}$. Niech f będzie funkcją osobno holomorficzną w zbiorze*

$$X := \bigcup_{j=1}^{s} K_1 \times \cdots \times D_j \times \cdots \times K_s$$

(to znaczy dla dowolnego $(x_1, \ldots, x_s) \in K_1 \times \cdots \times K_s$ i dla każdego $j = 1, \ldots, s$ funkcja $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \bullet, x_{j+1}, \ldots, x_s)$ jest holomorficzna w D_j). Wtedy f można przedłużyć do funkcji holomorficznej w otoczeniu zbioru X.[1]

Twierdzenie Bedforda-Taylora o zbiorach zaniedbywalnych [1]. *Jeżeli $\{u_j\}_{j \in J}$ jest lokalnie ograniczoną z góry rodziną funkcji plurisubharmonicznych w zbiorze otwartym D w $\mathbf{C}^n$, to zbiór*

$$\left\{ z \in D : u(z) := \sup_{j \in J} u_j(z) < u^*(z) \right\}$$

jest pluripolarny (u^* oznacza górną regularyzację funkcji u).

3.Dowody.

Twierdzenie C $\Rightarrow$ twierdzenie A: Możemy założyć, że $(j_1, \ldots, j_q) = (1, \ldots, q)$. Wystarczy wziąć $k = q$ i zauważyć, że wtedy dla $x \in \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k}$ $\mathrm{S}(f(x, \bullet)) = \emptyset$.

Dowód twierdzenia C: Możemy zapisać

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_s} = & (\mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_p}) \times \cdots \times (\mathbf{R}^{n_{ap+1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k}) \\ & \times (\mathbf{R}^{n_{k+1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_{k+p}}) \times \cdots \times (\mathbf{R}^{n_{k+bp+1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_s}), \end{aligned}$$

gdzie $a = [k/p]$, $b = [(s-k)/p]$. Wtedy f jest osobno analityczna (to znaczy $1-$osobno analityczna) względem tak zdefiniowanych zmiennych. Wystarczy zatem udowodnić twierdzenie C dla $p = 1$. Niech $\{X_\nu \times Y_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}}$ będzie przeliczalną rodziną przedziałów domkniętych w $(\mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k}) \times (\mathbf{R}^{n_{k+1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_s})$ taką, że $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu \times Y_\nu = \Omega$. Zbiór

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k} : \mathrm{S}(f(x, \bullet)) \subsetneq \mathrm{S}(f)(x, \bullet) \right\}$$

zawiera się w

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left\{ x \in X_\nu : \mathrm{S}(f(x, \bullet)) \cap Y_\nu \subsetneq \mathrm{S}(f)(x, \bullet) \cap Y_\nu \right\}.$$

Możemy zatem założyć, że f jest osobno analityczna w domkniętym przedziale $I_1 \times \cdots \times I_s \subset \mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_s}$ (czyli w pewnym jego otwartym otoczeniu).

Aby udowodnić twierdzenie C trzeba pokazać, że zbiór

$$Z_{f,k} := \left\{ x \in I_1 \times \cdots \times I_k : \mathrm{S}(f(x, \bullet)) \subsetneq \mathrm{S}(f)(x, \bullet) \right\}$$

jest pluripolarny.

[1] W rzeczywistości będziemy wykorzystywać twierdzenie Siciaka przy dodatkowym założeniu, że funkcja f jest ograniczona. W tym przypadku dowód twierdzenia jest znacznie prostszy - można go wywnioskować z twierdzenia 2a w [3].

Jeżeli $x \in I_1 \times \cdots \times I_k$, $y \in I_{k+1} \times \cdots \times I_s$ oraz $y \in \mathrm{A}\left(f\left(x, \bullet\right)\right)$, to definiujemy

$$Q_{f,k}\left(x,y\right) := \sup_{|\alpha|\geq 1} \left| \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^{\alpha}} \left(x,y\right) \right|^{1/|\alpha|}$$

(oczywiście $Q_{f,k}\left(x,y\right) < +\infty$ oraz $f\left(x,\bullet\right)$ jest holomorficzna co najmniej w polidysku $P\left(y, 1/Q_{f,k}\left(x,y\right)\right)$).

Dla $y \in I_{k+1} \times \cdots \times I_s$ niech

$$F_{f,k}\left(y\right) := \left\{x \in \mathrm{A}\left(f\right)\left(\bullet, y\right) : Q_{f,k}\left(\bullet, y\right) \text{ nie jest półciągła z góry w } x\right\}.$$

Dowód będzie indukcyjny ze względu na k. Załóżmy najpierw, że $k = 1$.

1^0 *Rzut zbioru $S\left(f\right)$ na $I_2 \times \cdots \times I_s$ jest nigdziegęsty w $\mathbf{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_s}$, czyli istnieje U - otwarty, gęsty podzbiór zbioru $I_2 \times \cdots \times I_s$ taki, że $I_1 \times U \subset A\left(f\right)$. W szczególności $A\left(f\right)$ jest gęsty w $I_1 \times \cdots \times I_s$.*

■ Indukcja względem s. Oba kroki indukcyjne: dowód przypadku $s = 2$ oraz dowód przypadku $s \geq 3$ przy założeniu, że 1^0 jest prawdziwe dla dowolnej funkcji osobno analitycznej $s-1$ zmiennych będziemy wykonywać równocześnie. Mamy

$$I_1 = \left[a_1, b_1\right] \times \cdots \times \left[a_{n_1}, b_{n_1}\right].$$

Zdefiniujmy dla $m \in \mathbf{N}$

$$I_1^m := \left\{ z \in \mathbf{C}^{n_1} : \max_{1 \leq t \leq n_1} \operatorname{dist}\left(z_t, \left[a_t, b_t\right]\right) < 1/m \right\},$$

$$E_m := \left\{ y_1 \in I_2 \times \cdots \times I_s : f\left(\bullet, y_1\right) \text{ jest holomorficzna w } I_1^m, \sup_{z \in I_1^m} \left|f\left(z, y_1\right)\right| \leq m \right\}.$$

Mamy $E_m \subset E_{m+1}$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = I_2 \times \cdots \times I_s$. Pokażemy, że zbiór $U_1 := \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} E_m$ jest gęsty w $I_2 \times \cdots \times I_s$. Niech Y' będzie dowolnym przedziałem domkniętym w $I_2 \times \cdots \times I_s$, a $\mathcal{H}$ - przeliczalną bazą topologii w Y' złożoną z przedziałów domkniętych. Dla $x_1 \in I_1$ zbiór $\mathrm{A}\left(f\left(x_1, \bullet\right)\right)$ jest gęsty: gdy $s = 2$, to fakt ten jest trywialny, gdy zaś $s \geq 3$, to wynika on z założenia indukcyjnego. Zatem, jeśli dla $H \in \mathcal{H}$ oznaczymy

$$A_H := \left\{x_1 \in I_1 : f\left(x_1, \bullet\right) \text{ jest analityczna w } H\right\},$$

to mamy $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} A_H = I_1$. Twierdzimy, że istnieje $H_0 \in \mathcal{H}$ takie, że zbiór A_{H_0} jest determinujący dla funkcji holomorficznych w zespolonym otoczeniu przedziału I_1. Istotnie, gdyby tak nie było, to wszystkie zbiory A_H $\left(H \in \mathcal{H}\right)$ byłyby nigdziegęste w I_1 i z twierdzenia Baire'a dostalibyśmy sprzeczność. Zatem z lematu Montela zbiory $E_m \cap H_0$ $\left(m \in \mathbf{N}\right)$ są domknięte, więc ponownie z twierdzenia Baire'a $U_1 \cap H_0 \neq \emptyset$. W efekcie U_1 jest otwarty i gęsty w $I_2 \times \cdots \times I_s$. Analogicznie jak I_1^m i U_1 definiujemy zbiory I_j^m i U_j $\left(j = 2, \ldots, s,\ m \in \mathbf{N}\right)$. Weźmy dowolny przedział domknięty $K_2 \times$

$\cdots \times K_s \subset U_1$. Korzystając z gęstości zbiorów U_j znajdziemy przedziały domknięte $\widetilde{K}_1 \subset I_1$, $\widetilde{K}_j \subset K_j$ $(j = 2, \ldots, s)$ oraz $m \in \mathbf{N}$ takie, że dla $j = 1, \ldots s$

$$\widetilde{K}_1 \times \cdots \times \widetilde{K}_{j-1} \times \widetilde{K}_{j+1} \times \cdots \times \widetilde{K}_s \subset U_j$$

oraz f jest osobno holomorficzna i ograniczona przez m w zbiorze

$$\bigcup_{j=1}^{s} \widetilde{K}_1 \times \cdots \times I_j^m \times \cdots \times \widetilde{K}_s .$$

Zatem z twierdzenia Siciaka $I_1 \times \widetilde{K}_2 \times \cdots \times \widetilde{K}_s \subset \mathrm{A}\,(f)$. ■

2^0 *Dla $y_1 \in U$ zbiór $F_{f,1}\,(y_1)$ jest pluripolarny.*

■ Mamy $I_1 \times \{y_1\} \subset \mathrm{A}\,(f)$, więc istnieją D - zespolone otoczenie przedziału I_1 oraz B - zespolone otoczenie punktu y_1 takie, że f jest holomorficzna w $D \times B$. Z twierdzenia Bedforda-Taylora zbiór

$$N := \left\{ z \in D : \varphi\,(z) := \sup_{|\alpha| \geq 1} \left| \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_1^{\alpha}}\,(z, y_1) \right|^{1/|\alpha|} < \varphi^*\,(z) \right\}$$

jest pluripolarny, a oczywiście $F_{f,1} \subset N$. ■

3^0 *Jeżeli V jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem U, to $Z_{f,1} \subset \bigcup_{y_1 \in V} F_{f,1}\,(y_1)$.*

■ Weźmy $x_1^0 \in Z_{f,1}$. Znajdziemy $y_1^0 \in I_2 \times \cdots \times I_s$ takie, że $\left(x_1^0, y_1^0\right) \in \mathrm{S}\,(f)$, ale $y_1^0 \in \mathrm{A}\left(f\left(x_1^0, \bullet\right)\right)$. Wynika stąd, że funkcja $f\left(x_1^0, \bullet\right)$ jest holomorficzna w polidysku $P\left(y_1^0, 1\,/Q_{f,1}\left(x_1^0, y_1^0\right)\right) \subset \mathbf{C}^N$, gdzie $N := n_2 + \cdots + n_s$. Niech λ będzie takie, że $0 < \lambda \leq 1/4$ oraz $(1-\lambda)^{-1-N} < 2$ i niech $r := \min\left\{1, 1\,/Q_{f,1}\left(x_1^0, y_1^0\right)\right\}$. Dla $y_1 \in \vartheta := P\left(y_1^0, \lambda r\right) \subset \mathbf{C}^N$ mamy

$$f\left(x_1^0, y_1\right) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^{\alpha}}\left(x_1^0, y_1^0\right)\,\left(y_1 - y_1^0\right)^{\alpha} .$$

Stąd łatwo dostaniemy

$$\left| \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial y_1^{\beta}}\left(x_1^0, y_1\right) \right| \leq Q_{f,1}\left(x_1^0, y_1^0\right)^{|\beta|} \sum_{\alpha} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!} \lambda^{|\alpha|}$$
$$= Q_{f,1}\left(x_1^0, y_1^0\right)^{|\beta|}\,(1-\lambda)^{-|\beta|-N} ,$$

więc

$$Q_{f,1}\left(x_1^0, y_1\right) \leq (1-\lambda)^{-1-N}\, Q_{f,1}\left(x_1^0, y_1^0\right) < 2\,/r\ .$$

Dzięki 1^0 istnieje $\widetilde{y}_1 \in \vartheta \cap V$. Wystarczy pokazać, że $x_1^0 \in F_{f,1}(\widetilde{y}_1)$. Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli, że funkcja $Q_{f,1}(\bullet, \widetilde{y})$ jest półciągła z góry w x_1^0. Istnieje zatem przedział domknięty K - otoczenie x_1^0 w I_1 taki, że dla $x_1 \in K$

$$Q_{f,1}(x_1, \widetilde{y}) < 2/r .$$

Funkcja $f(x_1, \bullet)$ jest holomorficzna w otoczeniu $\widetilde{y}_1$ (bo $\widetilde{y}_1 \in U$, więc $(x_1, \widetilde{y}_1) \in \mathrm{A}(f)$), zatem jest holomorficzna w polidysku $P(\widetilde{y}_1, 1/Q_{f,1}(x_1, \widetilde{y}_1))$. Mamy

$$P(\widetilde{y}_1, 1/Q_{f,1}(x_1, \widetilde{y}_1)) \supset P(\widetilde{y}_1, r/2) \supset \vartheta,$$

więc dla $x_1 \in K$ $f(x_1, \bullet)$ jest holomorficzna w ϑ. Ponadto dla $y_1 \in \vartheta$ mamy

$$|f(x_1, y_1)| \leq \sum_\alpha Q_{f,1}(x_1, y_1)^{|\alpha|} (\lambda r)^{|\alpha|} \leq \sum_\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|} = 2^N.$$

Niech U_1 i I_1^m będą jak w dowodzie punktu 1^0 i niech $H \subset \vartheta \cap U_1$. Znajdziemy m takie, że f jest osobno holomorficzna (jako funkcja dwóch zmiennych: $x_1 \in I_1$ i $y_1 \in I_2 \times \cdots \times I_s$) i ograniczona przez m w zbiorze $K \times \vartheta \cup I_1^m \times H$. Z twierdzenia Siciaka $\left(x_1^0, y_1^0\right) \in \mathrm{A}(f)$ - sprzeczność. ∎

Dzięki 2^0 i 3^0 widać, że $Z_{f,1}$ jest pluripolarny. Udowodnilśmy zatem pierwszy krok indukcyjny; pokazaliśmy mianowicie, że twierdzenie C jest prawdziwe dla $k = 1$ i dla dowolnego $s \geq 2$. Niech teraz $k \geq 2$ i załóżmy, że twierdzenie C jest prawdziwe dla $k-1$ i dowolnego $s \geq k$.

4^0 *Zbiór*

$$W := \{y \in I_{k+1} \times \cdots \times I_s : S(f(\bullet, y)) = S(f)(\bullet, y)\}$$

jest gęsty w $I_{k+1} \times \cdots \times I_s$.

∎ Jak już pokazaliśmy, twierdzenie C jest prawdziwe dla $k = 1$, więc stosując je w przypadku $k > 1$ k razy widzimy, że dla quasi prawie wszystkich $x_s \in I_s, \ldots,$ dla quasi prawie wszystkich $x_{k+1} \in I_{k+1}$ mamy

$$\mathrm{S}(f(\bullet, x_{k+1}, \ldots, x_s)) = \mathrm{S}(f)(\bullet, x_{k+1}, \ldots, x_s).$$

W szczególności zbiór W jest gęsty. ∎

5^0 *Dla* $y \in W$ *zbiór* $F_{f,k}(y)$ *jest pluripolarny.*

∎ Jeśli $L \subset\subset \mathrm{A}(f)(\bullet, y)$, to analogicznie jak w dowodzie 2^0 pokazujemy, że $F_{f,k}(y) \cap L$ jest pluripolarny. ∎

6^0 *Jeśli* W' *jest przeliczalnym, gęstym podzbiorem* W, *to zbiór*

$$R := Z_{f,k} \setminus \bigcup_{y \in W'} \left(S(f(\bullet, y)) \cup F_{f,k}(y)\right)$$

jest pluripolarny.

■ Weźmy dowolne $x^0 \in R$. Z definicji $Z_{f,k}$ znajdziemy $y^0 \in I_{k+1} \times \cdots \times I_s$ takie, że $\left(x^0, y^0\right) \in \mathrm{S}(f)$, ale $y^0 \in \mathrm{A}\left(f\left(x^0, \bullet\right)\right)$. Oznaczmy $g := f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \bullet\right)$. Najpierw pokażemy, że $\left(x_k^0, y^0\right) \in \mathrm{A}(g)$. Przypuśćmy, że $\left(x_k^0, y^0\right) \in \mathrm{S}(g)$. Mamy $y^0 \in \mathrm{A}\left(g\left(x_k^0, \bullet\right)\right)$, zatem $x_k^0 \in Z_{g,1}$. Dzięki 3^0 znajdziemy $y \in W'$ takie, że $x_k^0 \in F_{g,1}(y)$, czyli funkcja $Q_{g,1}(\bullet, y)$ nie jest półciągła z góry w x_k^0. Z definicji R i W mamy

$$x^0 \in \mathrm{A}(f(\bullet, y)) \setminus F_{f,k}(y) = \mathrm{A}(f)(\bullet, y) \setminus F_{f,k}(y),$$

zatem $Q_{f,k}(\bullet, y)$ jest półciągła z góry w x_k^0. W szczególności $Q_{f,k}\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \bullet, y\right)$ $= Q_{g,1}(\bullet, y)$ jest półciągła z góry w x^0 - sprzeczność. Dostaliśmy w efekcie $\left(x_k^0, y^0\right) \in \mathrm{A}(g)$, więc

$$\left(x_k^0, y^0\right) \in \mathrm{S}(f)\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \bullet\right) \setminus \mathrm{S}\left(f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \bullet\right)\right),$$

czyli $\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0\right) \in Z_{f,k-1}$. Pokazaliśmy zatem, że rzut zbioru R na $I_1 \times \cdots \times I_{k-1}$ zawiera się w zbiorze $Z_{f,k-1}$, który, dzięki założeniu indukcyjnemu, jest pluripolarny. W szczególności R jest pluripolarny. ■

Z założenia indukcyjnego twierdzenie C jest prawdziwe dla dowolnej funkcji osobno analitycznej k zmiennych, więc dla takich funkcji prawdziwe jest również twierdzenie A. W szczególności dla $y \in I_{k+1} \times \cdots \times I_s$ zbiór $\mathrm{S}(f(\bullet, y))$ jest pluripolarny. W efekcie z 4^0, 5^0 i 6^0 wnioskujemy, że $Z_{f,k}$ jest pluripolarny. Dowód twierdzenia C został zakończony.

Bibliografia

[1] E. Bedford, B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1-40.

[2] J. Saint Raymond, *Fonctions séparément analytiques*, Ann. Inst. Fourier 40 (1990), 79-101.

[3] J. Siciak, *Analyticity and separate analyticity of functions defined on lower dimensional subsets of* $\mathbf{C}^n$, Zeszyty Nauk. UJ, Prace Mat. 13 (1969), 53-70.

[4] J. Siciak, *Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of* $\mathbf{C}^n$, Ann. Pol. Math. 22 (1969), 145-171.

[5] J. Siciak, *Singular sets of separately analytic functions*, Coll. Math. 60/61(1990), 281-290.