Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Magdalena Gurczyńska
Praca magisterska

Rzeczywisty operator Monge'a-Ampère'a

Praca magisterska
wykonana pod kierunkiem
dra hab. Zbigniewa Błockiego

Kraków 2005

Składam serdeczne podziękowania
Panu dr hab. Zbigniewowi Błockiemu
za udostępnienie materiałów oraz
za wyrozumiałość i cenne wskazówki
stanowiące nieocenioną pomoc
przy pisaniu tej pracy.

Spis treści

Wstęp

Tematem mojej pracy magisterskiej jest rzeczywisty operator Monge'a-Ampère'a. Nazwa operatora pochodzi od nazwisk dwóch matematyków Gasparda Monge'a i André Marie Ampère'a. G. Monge (1746-1818) francuski matematyk, fizyk, chemik uważany za twórcę geometrii wykreślnej. Zajmował sie rachunkiem różniczkowym, całkowym i wariacyjnym. Natomiast A.M. Ampère (1775-1836) był fizykiem, ale przede wszystkim matematykiem. Rozwijał teorię równań różniczkowych cząstkowych opracowując ich klasyfikację. Po raz pierwszy w 1935 roku niemiecki matematyk Hans Lewy (1904-1988) po emigracji do Stanów Zjednoczonych pisał o ograniczeniu rozwiązań równań Monge'a-Ampère'a. W latach 40-tych, 50-tych spory wkład mieli rosyjscy matematycy: Aleksander Danilovich Aleksandrow (1912-1999) i jego uczniowie: Bakelman, Pogorelow. W 1982 roku Sing-Tung Yau (ur. 1949) został nagrodzony medalem Fieldsa za wkład w teorię równań różniczkowych cząstkowych i za poprawne sformuowanie teorii o rzeczywistym i zespolonym równaniu Monge'a-Ampère'a.

Rozdział pierwszy zawiera definicje oraz twierdzenia dotyczące funkcji wypukłych jednej oraz wielu zmiennych. Znajduje się tu przede wszystkim twierdzenie pokazujące, że funkcje wypukłe lokalnie spełniają warunek Lipshitza oraz twierdzenia mówiące o tym, że funkcje wypukłe są różniczkowalne prawie wszędzie. Te podstawowe wiadomości zaczerpnięte zostały z książek Larsa Hörmandera (zob.[2]), R.T. Rockafellara (zob.[4]) i zostaną wykorzystane w dalszej części pracy.

Rozdział drugi poświęcony jest zdefiniowaniu w sposób geometryczny operatora Monge'a-Ampère'a dla niekoniecznie gładkich funkcji wypukłych. Podana jest definicja obrazu gradientu dla funkcji gładkich oraz została ona rozszerzona dla funkcji niegładkich. Zostało udowodnione twierdzenie Aleksandrowa oraz wyciągnięty z niego wniosek mówiący o tym, że określona rodzina zbiorów jest σ-algebrą.

Rozdział trzeci przedstawia jednorodny problem Dirichleta. Pokazujemy, że rozwiązanie może być zdefiniowane przy pomocy metody Perrona jako obwiednie funkcji afinicznych.

W rozdziale czwartym przedstawimy podejście analityczne do operatora Monge'a-Ampère'a pochodzące z pracy J. Raucha i B.A. Taylora (zob.[3]). Była ona zainspirowana artykułem E. Bedforda i B.A. Taylora (zob.[1]), w której podano definicję zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a dla funkcji niegładkich. Pokazujemy także równoważność podejścia geometrycznego i analitycznego. Znaczącą część czwartego rozdziału zajmuje rozwiązanie problemu Dirichleta. Głównym źródłem wiadomości zawartych w rozdziale trzecim, czwartym i piątym jest praca Raucha i Taylora (zob.[3]). Twórcą głównej teorii związanej z podejściem geometrycznym oraz problemem Dirichleta jest Aleksandrow. W 1958 roku podał on orginalne sformułowanie problemu Dirichleta dla równań Monge'a-Ampère'a. To właśnie Aleksandrow rozwiązał problem Dirichleta dla funkcji wypukłych. Przedstawimy to w rozdziale piątym: pokażemy, że dla dowolnego ograniczonego obszaru ściśle wypukłego w $\mathbb{R}^n$, funkcji ciągłej g na $\partial\Omega$ i dodatniej miary borelowskiej μ na Ω takiej, że $\mu(\Omega) < \infty$, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu Dirichleta:

$$\begin{cases} u \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \\ Mu = \mu \text{ w } \ \Omega \\ u = g \text{ na } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

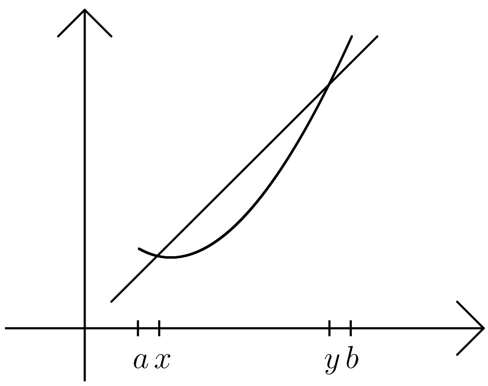
Rozdział 1
Funkcje wypukłe jednej i wielu zmiennych

W niniejszym rozdziale zebrane zostały podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące funkcji wypukłych jednej i wielu zmiennych potrzebne w dalszej części pracy.

Funkcję wypukłą jednej zmiennej definiujemy następująco:

Definicja
Funkcja $u : (a, b) \longmapsto \mathbb{R}$ jest *wypukła* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x,y \in (a,b)} \ \forall_{t \in [0,1]} \quad u\Big((1-t)x + ty\Big) \leqslant (1-t)u(x) + tu(y).$$



Następujące trzy podstawowe, dobrze znane twierdzenia przedstawimy bez dowodu.

Twierdzenie 1.1.
Funkcja $u : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x \in (a,b)} \quad \textit{iloraz różnicowy} \quad \tfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

jest funkcją rosnącą zmiennej h, *gdy* $x + h \in (a, b)$ *oraz* $h \neq 0$.

Twierdzenie 1.2.
Jeśli $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą to istnieją pochodne lewostronna $u'_-(x)$ i prawostronna $u'_+(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Są one funkcjami rosnącymi. Jeśli $x_1 < x_2$, gdzie $x_1, x_2 \in (a,b)$, to mamy:

$$u'_-(x_1) \leqslant u'_+(x_1) \leqslant \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant u'_-(x_2) \leqslant u'_+(x_2).$$

W szczególności, funkcja u spełnia warunek Lipschitza w każdym przedziale zwartym z przedziału (a,b).

Twierdzenie 1.3.
Funkcja $u \in \mathcal{C}^2\Big((a,b)\Big)$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $u'' \geqslant 0$.

Udowodnimy teraz twierdzenie pokazujące, że funkcje wypukłe jednej zmiennej różniczkowalne są w szczególności prawie wszędzie.

Twierdzenie 1.4.
Funkcja wypukła $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna poza przeliczalnym podzbiorem (a,b).

Dowód:
Jeżeli $\;a < x_1 < ... < x_n < b\;$ to

$$\sum_{j=1}^{n} [u'_+(x_j) - u'_-(x_j)] \leqslant u'_+(x_n) - u'_-(x_1),$$

ponieważ

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} [u'_+(x_j) - u'_-(x_j)] \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} [u'_-(x_{j+1}) - u'_-(x_j)] + u'_+(x_n) - u'_-(x_n) =$$

$$= [u'_-(x_n) - u'_-(x_{n-1})] + [u'_-(x_{n-1}) - u'_-(x_{n-2})] + ... + [u'_-(x_3) - u'_-(x_2)] +$$
$$+ [u'_-(x_2) - u'_-(x_1)] + u'_+(x_n) - u'_-(x_n) = u'_+(x_n) - u'_-(x_1).$$

Korzystając z powyższego dla $\;a < a' < b' < b\;$ mamy:

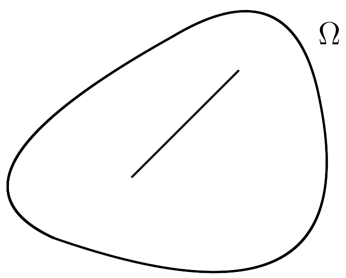
$$\sum_{a' \leqslant x \leqslant b'} [u'_+(x) - u'_-(x)] \leqslant u'_+(b') - u'_-(a') < \infty.$$

Ostatecznie dostaniemy tezę, bo u jest różniczkowalna w x wtedy i tylko wtedy, gdy $u'_+(x) = u'_-(x)$. $\square$

Funkcję wypukłą wielu zmiennych definiujemy następująco:

Definicja
Jeśli zbiór Ω jest otwarty, wypukły w $\mathbb{R}^n$, to funkcja $u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ jest *wypukła* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x\in\Omega,\, y\in\mathbb{R}^n} \text{ funkcja } t \longmapsto u(x+ty) \text{ jest wypukła (tam gdzie jest określona).}$$



Tzn. u jest wypukła na każdym odcinku w zbiorze Ω.

Uwaga:
Zbiór funkcji wypukłych na Ω oznaczamy $CVX(\Omega)$.

Propozycja 1.5.
Niech $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i wypukłym. Wtedy $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right)$ jest dodatnio półokreślona dla każdego $x \in \Omega$ tzn.

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) y_j y_k \geqslant 0,\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód:
Niech $\gamma : (a,b) \longrightarrow \Omega$ będzie dane przez

$$\gamma(t) = x + ty \text{ tzn. } \gamma_j(t) = x_j + ty_j.$$

Wtedy:

$$\gamma_j'(t) = y_j, \gamma_j''(t) = 0.$$

Z tego wynika, że pochodne mają postać:

$$\tfrac{d}{dt} u\big(\gamma(t)\big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\big(\gamma(t)\big)\gamma_j'(t).$$

Korzystając z definicji funkcji wypukłej wielu zmiennych oraz na mocy Twierdzenia 1.3. otrzymujemy:

$$\left(\tfrac{d}{dt}\right)^2 u\big(\gamma(t)\big) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\big(\gamma(t)\big)\underbrace{\gamma_j'(t)}_{y_j}\underbrace{\gamma_k'(t)}_{y_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\big(\gamma(t)\big)\underbrace{\gamma_j''(t)}_{0} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\big(\gamma(t)\big) y_j y_k. \quad \square$$

Z definicji wynika, że jeżeli $u \in CVX(\Omega)$ i $E \subset \Omega$, to

$$\sup_{convE} u \leqslant \sup_{E} u,$$

gdzie

$$convE = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i x_i : x_1, ..., x_k \in E; t_1, ..., t_k \geqslant 0, t_1 + ... + t_k \leqslant 1 \right\}$$

oznacza *otoczkę wypukłą* E. Stąd możemy łatwo wywnioskować, że funkcje wypukłe są lokalnie ograniczone z góry. Z poniższego twierdzenia wynika, że funkcje wypukłe wielu zmiennych lokalnie spełniają nierówność Lipshitza.

Twierdzenie 1.6.
Jeśli funkcja $u : K(x_0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest wypukła, oraz* $u \leqslant M$ *w* $K(x_0, R)$, *to dla* $0 < r < R$ *mamy*

$$\left|\frac{u(x)-u(y)}{x-y}\right| \leqslant \frac{4\big(M-u(x_0)\big)}{R-r}, \quad dla \quad x, y \in K(x_0, r),\ x \neq y.$$

Dowód:
Niech $x_0 = 0$. Załóżmy najpierw, że $n = 1$. Bez straty ogólności możemy założyć, że: $x > y$ $\big($bo w przeciwnym wypadku zamieniamy x z $y\big)$, oraz $u(x) \geqslant u(y)$ $\big($bo w przeciwnym wypadku zamieniamy u z funkcją $t \longmapsto u(-t)\big)$. Możemy także założyć, że u jest określona w otoczeniu $\overline{K}(0, R)$ (w przeciwnym razie można wziąć $R' < R$ i przy $R' \longrightarrow R$ otrzymamy tezę). Zwróćmy uwagę, że $y < x < r < R$ oraz $u \leqslant M$ w $\overline{K}(0, R)$ stąd mamy:

$$\frac{u(x)-u(y)}{x-y} \leqslant \frac{u(r)-u(y)}{r-y} \leqslant \frac{u(R)-u(r)}{R-r} \leqslant \frac{M-u(r)}{R-r}.$$

Następnie z wypukłości mamy

$$u(0) \leqslant \frac{u(r)+u(-r)}{2},$$

w rezultacie po przekształceniu otrzymujemy:

$$2u(0) - u(-r) \leqslant u(r)$$

oraz

$$u(-r) = u\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 0 + \frac{r}{R} \cdot (-R)\right) \leqslant \left(1 - \frac{r}{R}\right) u(0) + \frac{r}{R} u(-R) \leqslant \left(1 - \frac{r}{R}\right) u(0) + \frac{r}{R} M.$$

Stąd wynika, że

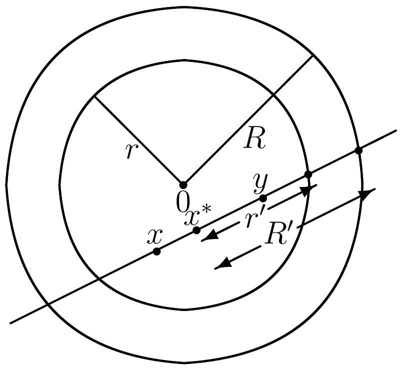
$$\left(1 + \frac{r}{R}\right) u(0) - M\frac{r}{R} \leqslant 2u(0) - u(-r) \leqslant u(r).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{u(x) - u(y)}{x - y} \leqslant \frac{M - u(r)}{R - r} \leqslant \frac{M - \left(1 + \frac{r}{R}\right) u(0) + \frac{r}{R} M}{R - r} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{r}{R}\right)\left[M - u(0)\right]}{R - r} \leqslant \frac{2\left[M - u(0)\right]}{R - r}.$$

Załóżmy teraz, że $n \geqslant 2$.



Z przypadku jednowymiarowego mamy:

$$\frac{u(x) - u(y)}{x - y} \leqslant 2\frac{M - u(x^*)}{R' - r'} \leqslant 2\frac{M - u(x^*)}{R - r},$$

gdzie x^*, R', r' są takie jak na rysunku. Z drugiej strony, dzięki wypukłości u na prostej przechodzącej przez 0 i x^* mamy

$$u(0) - u(x^*) \leqslant M - u(0)$$

skąd łatwo otrzymamy tezę. $\square$

Z Twierdzenia 1.6 i twierdzenia Rademachera wynika, że funkcje wypukłe są różniczkowalne prawie wszędzie. Poniżej podamy dowód tego faktu nie korzystając z twierdzenia Rademachera.

Twierdzenie 1.7.
Jeżeli zbiór Ω jest otwarty, wypukły w $\mathbb{R}^n$, a funkcja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to u jest różniczkowalna prawie wszędzie.

Dowód:
Zdefiniujmy

$$u'(x,y) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{u(x+hy)-u(x)}{h}, \text{ dla } \quad x \in \Omega,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

oraz

$$A_j = \Big\{ x \in \Omega : u'(x, -e_j) = -u'(x, e_j) \Big\} =$$

$$= \Big\{ x \in \Omega \text{: funkcja } \quad t \longmapsto u(x + t \cdot e_j) \quad \text{jest różniczkowalna w } 0 \Big\},$$

gdzie

$$e_j = (0, ..., 0, \overbrace{1}^{j}, ..., 0), \text{ dla } j = 1, ..., n,$$

są wektorami bazowymi w $\mathbb{R}^n$. Zbiór A_j jest mierzalny (ponieważ $u'(\bullet, y)$ jest mierzalna dla każdego $y \in \mathbb{R}^n$). Stosując wcześniej udowodnione Twierdzenie 1.4 dla każdego $x \in \Omega$; $j = 1, ..., n$ otrzymamy, że zbiór:

$$\Big\{ t \in \mathbb{R} : (x_1, ..., x_{j-1}, t, x_{j+1}, ..., x_n) \in \Omega \setminus A_j \Big\}$$

jest przeliczalny. Zatem z twierdzenia Fubiniego zbiór $\Omega \setminus A_j$ jest miary zero.

Ustalmy $x \in \Omega \setminus \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$. Chcemy pokazać, że u jest różniczkowalna w x. Niech

$$g(y) := u'(x,y) - \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot u'(x, e_j),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Funkcja $y \longmapsto u'(x,y)$ jest malejącą granicą funkcji wypukłych $y \longmapsto \frac{u(x+hy)-u(x)}{h}$, gdy $h \searrow 0$, więc jest wypukła na $\mathbb{R}^n$. Z definicji $u'(x,y)$ mamy także $u'(x,ty) = t \cdot u'(x,y)$, dla $t \geqslant 0$. Z wypukłości dostaniemy subaddytywność:

$$u'(x, y+z) = 2u'\Big(x, \frac{y+z}{2}\Big) \leqslant u'(x,y) + u'(x,z).$$

Otrzymamy w efekcie $g \leqslant 0$ na $\mathbb{R}^n$, a ponieważ g jest wypukła oraz $g = (0)$, to $g \equiv 0$ na $\mathbb{R}^n$. Stąd wynika, że $u'(x, \bullet)$ jest różniczką u w punkcie x. $\square$

Pokażemy teraz, że funkcje wypukłe można aproksymować gładkimi funkcjami wypukłymi.

Twierdzenie 1.8.
Załóżmy, że $u \in CVX(\Omega)$, gdzie Ω jest obszarem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Dla $\varepsilon > 0$ niech

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $u_\varepsilon \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ takie, że $u_\varepsilon \longrightarrow u$ lokalnie jednostajnie w Ω.

Dowód:
Niech $\varrho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie takie, że $\varrho \geqslant 0$, $\varrho(y) = 0$ gdy $|y| \geqslant 1$, $\varrho(y)$ zależy tylko od $|y|$ oraz $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varrho d\lambda = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$\varrho_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} \varrho\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big), \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Wtedy $\varrho_\varepsilon \geqslant 0$, $\varrho_\varepsilon(y) = 0$ gdy $|y| \geqslant \varepsilon$, $\varrho_\varepsilon(y)$ zależy tylko od $|y|$ oraz $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon d\lambda = 1$. Kładziemy

$$u_\varepsilon(x) := \Big(u * \varrho_\varepsilon\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varrho_\varepsilon(x-y)d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-\varepsilon y)\varrho(y)d\lambda(y).$$

Wtedy $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ (bo w przeciwnym wypadku możemy różniczkować pod znakiem całki) oraz $u_\varepsilon \in CVX(\Omega)$ (z drugiej postaci). Jeżeli $K \subset \Omega$ jest zwarty, to dla $x \in K$ i $\varepsilon > 0$ odpowiednio małego mamy

$$\Big|u_\varepsilon(x) - u(x)\Big| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Big(u(x-\varepsilon y) - u(x)\Big)\varrho(y)d\lambda(y) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \Big|u(x-\varepsilon y) - u(x)\Big|\varrho(y)d\lambda(y).$$

Jednostajna zbieżność $u_\varepsilon \longrightarrow u$ na K wynika teraz z jednostajnej ciągłości u na zbiorach zwartych. $\square$

Twierdzenie 1.9.
Niech $\mathcal{F} \subset CVX(\Omega)$ będzie rodziną lokalnie jednostajnie ograniczoną (z góry i z dołu). Znajdziemy wtedy ciąg $u_j \in \mathcal{F}$ zbieżny lokalnie jednostajnie w Ω.

Dowód:
Z Twierdzenia 1.6 wynika, że rodzina $\mathcal{F}$ jest równociągła, a więc z twierdzenia Arzeli-Ascoliego mamy tezę. $\square$

W rozdziale 5 będziemy potrzebować również tzw. lematu Choquet'a (w uproszczonej wersji).

Lemat 1.10.
Niech $\mathcal{F} \subset CVX(\Omega)$ będzie rodziną lokalnie jednostajnie ograniczoną z góry. Istnieje wtedy podrodzina przeliczalna $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ taka, że

$$\sup \mathcal{F} = \sup \widetilde{\mathcal{F}}$$

(jako funkcje na Ω).

Dowód:
Niech B będzie przeliczalną bazą topologii w Ω. Funkcja $u := \sup \mathcal{F}$ jest wypukła na Ω. Dla każdego j znajdziemy ciąg $x_{jk} \in B_j$ taki, że

$$\sup_{B_j} u = \sup_k u(x_{jk}).$$

Dla każdego j, k istnieje ciąg $u_{jkl} \in \mathcal{F}$ taki, że

$$u(x_{jk}) = \sup_l u_{jkl}(x_{jk}).$$

Niech $\widetilde{\mathcal{F}} := \{u_{jkl}\}_{j,k,l}$ i połóżmy $v = \sup \widetilde{\mathcal{F}}$. Mamy oczywiście $u \geqslant v$ oraz

$$\sup_{B_j} v \geqslant \sup_k v(x_{jk}) \geqslant \sup_{k,l} u_{jkl}(x_{jk}) = \sup_{B_j} u.$$

A więc z ciągłości u, v (v jest również wypukła na Ω) dostaniemy $u = v$. $\square$

Rozdział 2
Rzeczywisty operator Monge'a-Ampère'a - - podejście geometryczne

Rzeczywisty operator Monge'a-Ampère'a jest to modelowy przykład nieliniowego operatora eliptycznego drugiego rzędu. Dla gładkich funkcji u definiujemy go następująco:

Definicja

$$Mu := \det D^2 u = \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right); \quad j,k = 1,...,n.$$

Dla $\quad n = 2 \quad$ operator ma postać: $\quad Mu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2.$

Będziemy chcieli zdefiniować Mu dla dowolnej niekoniecznie gładkiej funkcji wypukłej u.

Twierdzenie 2.1.
Niech Ω będzie zbiorem otwartym, wypukłym w $\mathbb{R}^n$, E borelowskim podzbiorem zbioru Ω. Jeżeli funkcja u jest gładka, silnie wypukła (tzn. $D^2 u > 0$) na Ω, to

$$\textstyle\int_E \det D^2 u d\lambda = \lambda\Big(\nabla u(E)\Big). \tag{2.1}$$

Dowód:
Jeżeli pokażemy, że ∇u jest dyfeomorfizmem to wystarczy skorzystać ze wzoru na zmianę zmiennych w całce. Wystarczy udowodnić, że ∇u jest iniekcją na Ω. Przypuśćmy, że $\nabla u(x) = \nabla u(x^*)$ dla pewnych $x, x^* \in \Omega$, $x = x^*$. Oznacza to, że płaszczyzny styczne do wykresu u w x i x^* są równoległe. Stąd wynika, że funkcja u jest afiniczna na przedziale $[x, x^*]$. Dla $y = x - x^* \neq 0$ mamy więc $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u(x+ty)\Big|_{t=0} = 0$, czyli $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big(x\Big) y_i y_j = 0$, co jest sprzeczne z tym, że $D^2 u > 0$. $\quad\square$

Zbiór $\nabla u(E)$ nazywamy obrazem gradientu. Pokażemy teraz, że prawa strona (2.1) ma sens dla niegładkich funkcji wypukłych. W tym celu podamy ogólną definicję obrazu gradientu.

Definicja

Dla funkcji wypukłej $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy *obraz gradientu* dla punktu $x_0 \in \Omega$ następująco:

$$N_u(x_0) = N(x_0) := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : \ u(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle \leqslant u(x), \ x \in \Omega \Big\}.$$

Zauważmy, że z własności funkcji wypukłej wynika, że w każdym punkcie x zbiór $N(x_0)$ jest niepusty. Jeśli u jest różniczkowalna w x_0 to ten zbiór jest jednoelementowy:

$$N(x_0) = \Big\{ \nabla u(x_0) \Big\}.$$

Dla zbioru borelowskiego E definiujemy:

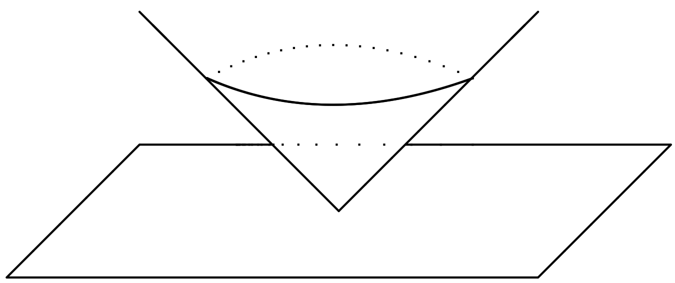
$$N_u(E) = N(E) := \bigcup_{x_o \in E} \nabla u(x_0).$$

Płaszczyznę leżącą poniżej wykresu funkcji u dotykającą wykresu w punkcie x_0 nazywamy *płaszczyzną podpierającą* u w x_0.

Przykład

Obraz gradientu w 0 *dla funkcji* $u(x) = |x|$ *to domknięta kula jednostkowa* $\Big\{ |y| \leqslant 1 \Big\}$.

Dowód:



Z definicji mamy

$$N(0) := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, y \rangle \leqslant |x|, \ x \in \mathbb{R}^n \Big\}.$$

Zauważmy, że $\langle x, y \rangle \leqslant |x||y|$, mamy więc $\{|y| \leqslant 1\} \subset N(0)$. Z drugiej strony, dla $y \in \{|y| \leqslant 1\}$ weźmy $x = y$, wtedy $\langle x, y \rangle = |x||y|$. $\square$

Poniższy rezultat jest często nazywany twierdzeniem Aleksandrowa.

Twierdzenie 2.2.
Dla dowolnej funkcji wypukłej u zbiór takich $y \in \mathbb{R}^n$, które należą do obrazów gradientu więcej niż jednego punktu, jest miary Lebesgue'a zero.

Dowód:
Możemy założyć, że $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest ograniczonym zbiorem wypukłym. Funkcja v jest funkcją sprzężoną do u, oznaczamy: $v = \tilde{u}$ wtedy

$$v(y) := \sup_{x \in \Omega} \Big(\langle x, y \rangle - u(x) \Big),$$

(łatwo to sprawdzić wprost z definicji). Funkcja v jest wypukła w $\mathbb{R}^n$ stąd wynika, że jest różniczkowalna p.w. Wystarczy sprawdzić, że jeśli $\quad y_0 \in N(x_0) \quad$ to $\quad x_0 \in N(y_0)$. To jest wystarczające, ponieważ jeśli v jest różniczkowalna w y_0 wtedy

$$N(y_0) = \{x_0\}.$$

Rozpisując mamy:

$$u(x_0) + \langle x - x_0, y_0 \rangle \leqslant u(x), x \in \Omega;$$
$$u(x_0) + \langle x, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle \leqslant u(x), x \in \Omega;$$
$$\langle x, y_0 \rangle - u(x) \leqslant \langle x_0, y_0 \rangle - u(x_0), x \in \Omega.$$

Stąd wynika, że

$$v(y_0) = \langle x_0, y_0 \rangle - u(x_0);$$
$$v(y_0) + \langle y - y_0, x \rangle \leqslant v(y), y \in \mathbb{R}^n;$$
$$\langle y, x_0 \rangle - u(x_0) \leqslant v(y), y \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Twierdzenie 2.3.
Rodzina:

$$\mathfrak{m} = \Big\{ E \subset \Omega : N(E) \textit{ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a } \Big\}$$

jest σ- algebrą zawierającą wszystkie borelowskie podzbiory Ω.

Dowód:
Jeśli $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{m}$, to z definicji mamy:

$$N\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} N\Big(A_j\Big), \tag{2.3}$$

a więc $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{m}$. Mamy także

$$K\text{- zwarty} \Longrightarrow N(K)\text{- zwarty}, \tag{2.4}$$

w szczególności z (2.3) $\Omega \in \mathfrak{m}$. Z (2.4) wynika teraz, że do zakończenia dowodu wystarczy wykazać

$$E \in \mathfrak{m} \implies \Omega \setminus E \in \mathfrak{m}.$$

Z definicji obrazu gradientu można łatwo udowodnić

$$N(\Omega \setminus E) = \Big(N(\Omega) \setminus N(E)\Big) \cup \Big(N(\Omega \setminus E) \cap N(E)\Big).$$

Dzięki Twierdzeniu 2.2 mamy

$$\lambda\Big(N(\Omega \setminus E) \cap N(E)\Big) = 0.$$

A zatem $N\Big(\Omega \setminus E\Big)$ jest mierzalny. $\square$

Możemy teraz zdefiniować miarę Monge'a-Ampère'a Mu dla dowolnej funkcji wypukłej u. Dla $E \in \mathfrak{m}$ kładziemy $Mu(E) := \lambda(\nabla u(E))$.

Twierdzenie 2.4.
Mu jest miarą na σ- algebrze $\mathfrak{m}$.

Dowód:
Załóżmy, że $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{m}$ są zbiorami rozłącznymi. Z Twierdzenia 2.2 mamy

$$\lambda\Big(N(A_j) \cap N(A_k)\Big) = 0, \; j \neq k.$$

Stąd

$$Mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lambda\left(N\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\right) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N(A_j)\right) =$$

$$= \lambda\Big(N(A_1) \cup \Big(N(A_2) \setminus N(A_1)\Big) \cup ...\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} Mu(A_j). \quad \square$$

Rozdział 3
Jednorodny problem Dirichleta

Celem tego rozdziału będzie rozwiązanie jednorodnego problemu Dirirchleta. Dla Ω otwartego, ograniczonego zbioru wypukłego w $\mathbb{R}^n$, oraz funkcji ciągłej g na $\partial\Omega$ możemy szukać rozwiązania problemu Dirichleta:

$$\begin{cases} u \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \\ Mu = 0 \text{ w } \ \Omega, \\ u = g \text{ na } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Twierdzenie 3.1.
Jeżeli Ω jest ograniczony i ściśle wypukły w $\mathbb{R}^n$ to dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie U problemu (3.1).

Dowód:

Dowód na istnienie:
Niech $\Im$=$\Big\{a : a-$ funkcja afiniczna, $a \leqslant g$ na $\partial\Omega\Big\}$. Skoro g jest ograniczona od dołu na $\partial\Omega$ to rodzina $\Im$ jest niepusta. Definiujemy

$$U(x) = \sup\{v(x) : v \in \Im\}. \tag{3.2}$$

Funkcja U jest wypukła oraz $U \leqslant g$ na $\partial\Omega$. Udowodnimy w kolejności, że $U = g$ na $\partial\Omega$, $U \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ i $MU = 0$. Aby pokazać, że:

$$U(\xi) \geqslant g(\xi), \text{ dla } \xi \in \partial\Omega,$$

bez straty ogółu przyjmujemy, że $\xi = 0$ i że $\{x_1 = 0\}$ jest płaszczyzną podpierającą Ω w 0 tzn. $x_1 > 0$ dla wszystkich $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Jeśli $\varepsilon > 0$ wtedy dla dostatecznie małych $\delta > 0$,

$$|g(x) - g(0)| < \varepsilon, \text{ dla każdych } |x| < \delta, \ x \in \partial\Omega.$$

Skoro $\partial\Omega$ jest ściśle wypukły, znajdziemy $\eta > 0$ taką małą, że

$$\overline{\Omega} \cap \{x = (x_1, ..., x_n) : x_1 < \eta\} \text{ jest podzbiorem zbioru } \{x : |x| < \delta\}.$$

Niech

$$M = \min\Big\{g(x) : x \in \partial\Omega, x_1 \geqslant \eta\Big\}$$

wtedy funkcja afiniczna

$$a(x) = [g(0) - \varepsilon] - Ax_1, \text{ gdzie } A \geqslant \max\left\{\tfrac{g(0)-\varepsilon-M}{\eta}, 0\right\}$$

spełnia

$$a(0) \geqslant g(0) - \varepsilon,$$

oraz

$$a(x) \leqslant g(x), \text{ dla } x \in \partial\Omega.$$

Zatem $a \in \Im$ czyli $U \geqslant a$ w szczególności

$$U(0) \geqslant a(0) \geqslant g(0) - \varepsilon.$$

Skoro to jest prawdziwe dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $U(0) \geqslant g(0)$ więc $U = g$ na $\partial\Omega$. Ponadto jeśli $\{x_n\}$ jest ciągiem w Ω zbieżnym do 0, wtedy

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} U(x_n) \geqslant \liminf_{n\longrightarrow\infty} a(x_n) = a(0) \geqslant g(0) - \varepsilon,$$

stąd

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} U(x_n) \geqslant g(0).$$

Wiadomo, że jeżeli Ω jest wypukły (a więc regularny), to istnieje jedyna funkcja harmoniczna f na Ω taka, że $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ i $f = g$ na $\partial\Omega$. Skoro $a \in \Im$ jest subharmoniczna, mamy $a \leqslant f$ więc $U \leqslant f$, w szczególności jeśli $x_n \in \Omega,\ x_n \longrightarrow 0$, wtedy

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} U(x_n) \leqslant \liminf_{j\longrightarrow\infty} f(x_n) = g(0)$$

co dowodzi, że U jest ciągła w 0. Zostało jedynie wykazać, że $MU = 0$. Stosując Twierdzenie 2.2 wystarczy pokazać, że obraz gradientu $\nabla(\Omega)$ jest podzbiorem zbioru

$$\left\{p \in \mathbb{R}^n \colon p \text{ jest w obrazie gradientu z dwóch różnych punktów } \Omega\ \right\}.$$

Weźmy $p \in \nabla u(\Omega)$. Dla pewnego $x_0 \in \Omega$ mamy

$$U(x) - U(x_0) \geqslant \langle p, x - x_0\rangle.$$

Niech

$$a(x) = U(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle.$$

Mamy

$$a(x) \leqslant g(x), \text{ dla każdego } x \in \partial\Omega.$$

Wtedy równość musi zachodzić dla co najmniej jednego $x \in \partial\Omega$. W przeciwnym wypadku

$$a(x) + \varepsilon \leqslant g(x), \text{ dla wszystkich } x \in \partial\Omega \text{ i dla pewnego } \varepsilon > 0,$$

co stosując warunek (3.2) implikuje

$$U(x_0) > a(x_0) = U(x_0)$$

i mamy sprzeczność. Niech $\xi \in \partial\Omega$ będzie takie, że $a(\xi) = g(\xi)$. Otwarty odcinek łączący x_0 z ξ leży w Ω. Dodatkowo

$$U(x_0) = a(x_0) \text{ oraz } U(\xi) = a(\xi).$$

A zatem ponieważ a jest funkcją afiniczną to $U(x) \leqslant a(x)$ dla każdego x z tego odcinka. Jednak $U(x) \geqslant a(x)$, dla każdego x ze zbioru Ω. Stąd p należy do obrazu gradientu z odcinka od x_0 do ξ. Co kończy dowód. $\square$

Dowód na jedyność:
Niech U będzie rozwiązaniem jak powyżej i przypuśćmy, że $V \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ jest wypukła na Ω i $V = g$ na $\partial\Omega$. Dla ustalonego $\overline{x} \in \Omega$ znajdziemy funkcję afiniczną a taką, że

$$a \leqslant V \text{ na } \overline{\Omega} \text{ i } a(\overline{x}) = V(\overline{x}).$$

Z definicji U otrzymamy

$$V(\overline{x}) = a(\overline{x}) \leqslant U(\overline{x})$$

czyli $V \leqslant U$.

Musimy jeszcze wykazać, że jeżeli $x_0 \in \Omega$ jest takie, że $V(x_0) < U(x_0)$, to $MV \neq 0$. Dla $y_0 \in N_V(x_0)$ znajdziemy $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $y \in K(x_0, \varepsilon)$ mamy

$$V(x_0) + \langle x - x_0, y\rangle < U(x), \ x \in \partial\Omega,$$

a stąd $K(x_0, \varepsilon) \subset N_V(x_0)$, czyli $MV \neq 0$. $\square$

Rozdział 4
Rzeczywisty operator Monge'a-Ampère'a - - podejście analityczne

Celem tego rozdziału będzie przedstawienie analityczne operatora Monge'a-Ampère'a oraz wykazanie równoważności z podejściem geometrycznym, na podstawie pracy Raucha i Taylora (zob.[3]). W dalszej części pracy, bez straty ogółu możemy przyjąć, że zbiór Ω jest otwarty, wypukły oraz ograniczony. Wprowadzamy następujące definicje, które są niezbędne do zrozumienia dalszej części pracy.

Niech $M_m(\Omega)$, gdzie $0 \leqslant m \leqslant n$ oznacza prąd stopnia m rzędu 0 na Ω. Oznacza to, że $M_m(\Omega)$ jest klasą form różniczkowalnych stopnia m, których współczynniki są miarami borelowskimi na Ω (niekoniecznie dodatnimi), czyli każdy element $M_m(\Omega)$ możemy zapisać jako

$$\mu = \sum_{|I|=m} M_I dx_I, \text{ gdzie } I = (i_1, ..., i_m),\ 1 \leqslant i_1 < ... < i_m \leqslant n.$$

Możemy założyć, że $M_m(\Omega)$ ma topologię słabej zbieżności miar tzn. $\mu_j \longrightarrow \mu$ w $M_m(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int \Phi \wedge \mu_j \longrightarrow \int \Phi \wedge \mu,$$

dla każdych form różniczkowych Φ stopnia $n-m$, których współczynniki to ciągłe funkcje o nośniku zwartym w Ω. Dla wieloznacznika $I = (i_1, ..., i_m)$, gdzie $1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_m \leqslant n$, kładziemy

$$\mathcal{M}_I u = d(u_{i_1}) \wedge ... \wedge d(u_{i_m}),$$

przy czym oznaczamy $u_i = \partial u / \partial x_i$. $\mathcal{M}_I$ możemy traktować jako operator z $\mathcal{C}^2(\Omega)$ do $M_m(\Omega)$. Ponadto połóżmy

$$\mathcal{M}u = \mathcal{M}_{\{1,2,...,n\}}u = d(u_1) \wedge d(u_2) \wedge ... \wedge d(u_n)$$

tzn.

$$\mathcal{M}u = \det \left[u_{ij}\right] dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

jest miarą Monge'a-Ampère'a. Twierdzenie 4.1 pokazuje, że wszystkie $\mathcal{M}_I$ to ciągłe operatory na całym stożku $CVX(\Omega)$ funkcji wypukłych.

Twierdzenie 4.1
Dla wielowskaźnika $I = \{i_1 < ... < i_m\}$, gdzie $1 \leqslant m \leqslant n$; operator $\mathcal{M}_I : \mathcal{C}^2(\Omega) \longrightarrow M_m(\Omega)$ ma następujące własności:
(i) $\mathcal{M}_I$ odwzorowuje jednostajnie ograniczone podzbiory $\mathcal{C}^2 \cap CVX(\Omega)$ w słabo ograniczone podzbiory $M_m(\Omega)$
(ii) jeśli $u^{(j)}, v^{(j)} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ są takie, że:
(a) $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} u^{(j)} = \lim\limits_{j\longrightarrow\infty} v^{(j)} = u$ (zbieżność jednostajna),
(b) $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} \mathcal{M}_I\Big(u^{(j)}\Big) = \mu$ w $M_m(\Omega)$,
(c) $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} \mathcal{M}_I\Big(v^{(j)}\Big) = \nu$ w $M_m(\Omega)$,
to $\mu = \nu$. W konsekwencji $\mathcal{M}_I$ można w sposób jednoznaczny przedłużyć do ciągłego operatora na całym $CVX(\Omega)$.

Dowód:
Bierzemy inny wielowskaźnik $J = \{j_1 < ... < j_m\}$, niech $\triangle(I, J)$ będzie wyznacznikiem macierzy $m \times m$ $[b_{i_\alpha, j_\beta}]$. Aby udowodnić własność (i) potrzeba pokazać, że całka z $\Big|\triangle(I, J)\Big|$ po podzbiorze zwartym Ω, może być oszacowana przez supremum normy z u po pewnym większym podbiorze zwartym Ω. Funkcja u jest wypukła, hessian funkcji u jest macierzą nieujemną, więc
$$2\Big|\triangle(I, J)\Big| \leqslant \triangle(I, I) + \triangle(J, J).$$
Dlatego możemy ograniczyć się do przypadku, gdy $I = J$. Bez straty ogółu możemy założyć, że $I = J = \{1, 2, ..., m\}$. Niech K będzie zwartym podzbiorem Ω. Wybieramy funkcję χ klasy $\mathcal{C}^\infty$ ze zwartym nośnikiem w Ω taką, że $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ oraz $\chi = 1$ na K. Niech $\Phi = \chi dx_{m+1} \wedge ... \wedge dx_n$. Ponieważ $\triangle(I, I) \geqslant 0$ mamy

$$\int_K \triangle(I, I) \leqslant \int du_1 \wedge ... \wedge du_m \wedge \Phi. \tag{4.1}$$

Z twierdzenia Stokes'a otrzymujemy

$$\int du_1 \wedge ... \wedge du_m \wedge \Phi = -\int u_i du_1 \wedge ... \wedge du_{i-1} \wedge d\Phi \wedge du_{i+1} ... \wedge du_m =$$
$$= \int u du_1 \wedge ... \wedge du_{i-1} \wedge d\Phi_i \wedge du_{i+1} \wedge ... \wedge du_m.$$

Następnie sumujemy względem i. W rezultacie mamy:

$$m \int du_1 \wedge ... \wedge du_m \wedge \Phi = \sum_{i=1}^{m} \int u du_1 \wedge ... \wedge du_{i-1} \wedge d\Phi_i \wedge du_{i+1} \wedge ... \wedge du_m. \tag{4.2}$$

Jeśli $m = 1$, to (i) jasno wynika z własności (4.1) oraz (4.2). Jeśli $m > 1$, wtedy zakładamy indukcyjnie, że własność (i) zachodzi dla wielowskaźników długości mniejszych od m. Dlatego też L^1 normy ze współczynników:

$$du_1 \wedge ... \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge ... \wedge du_m$$

na nośniku Φ są jednostajnie ograniczone jeśli u należy do jednostajnie ograniczonego podzbioru $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap CVX(\Omega)$, skąd wynika (i).

Aby udowodnić (ii) użyjemy ponownie (4.2). Możemy przyjąć, że $I = \{1, 2, ..., m\}$. Dowodząc przez indukcję możemy również założyć, że

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \mathcal{M}_J\Big(u^{(j)}\Big) = \lim_{j \longrightarrow \infty} \mathcal{M}_J\Big(v^{(j)}\Big)$$

dla wszystkich wielowskaźników J długości mniejszych niż m. Zarówno $u^{(j)} d\Phi_i$ jak i $v^{(j)} d\Phi_i$ są zbieżne jednostajnie do $ud\Phi_i$, jeśli u zamienimy przez $u^{(j)}$, a potem przez $v^{(j)}$ w (4.2) i przy $j \longrightarrow \infty$ mamy:

$$\int \mu \wedge \Phi = \int \nu \wedge \Phi,$$

dla wszystkich form różniczkowych Φ stopnia m, których współczynniki są funkcjami klasy $\mathcal{C}^\infty$ ze zwartym nośnikiem. Stąd wnioskujemy, że $\mu = \nu$ co kończy dowód.

Ostatnia własność twierdzenia wynika z (i) i (ii), Twierdzenia 1.8 oraz z twierdzenia Banacha-Alaoglu, z którego wynika, że słabo ograniczone podzbiory $M_m(\Omega)$ są relatywnie zwarte. Co kończy dowód. $\square$

Definicja

Jeśli funkcja u jest wypukła na zbiorze Ω, to $\mathcal{M}u$ definiujemy jako *nieujemną miarę borelowską* $\mathcal{M}_{\{1,2,...,n\}} u = du_1 \wedge ... \wedge du_n$ na Ω.

Udowodnimy teraz następującą nierówność.

Propozycja 4.2.

Jeśli funkcje u, v są wypukłe na zbiorze Ω, to

$$\mathcal{M}(u + v) \geqslant \mathcal{M}u + \mathcal{M}v.$$

Dowód:

Dzięki Twierdzeniu 4.1. wystarczy udowodnić nierówność dla $u, v \in \mathcal{C}^2$. Dlatego też pokażemy, że

$$\det(A + B) \geqslant \det A + \det B,$$

gdzie A i B są dodatnio półokreślonymi macierzami symetrycznymi $n \times n$. Z ciągłości możemy przyjąć, że macierz A jest dodatnio określona. Wtedy

$$A + B = A^{\frac{1}{2}}\Big(I + A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\Big) A^{\frac{1}{2}},$$

więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A = I$. W tym przypadku, jeżeli $\lambda_1, ..., \lambda_n \geqslant 0$ są wartościami własnymi macierzy B, to mamy

$$\det(I + B) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det I + \det B. \qquad \square$$

Następnie pokażemy, że $\mathcal{M}u = Mu$.

Propozycja 4.3.
Jeśli funkcja u jest wypukła na zbiorze Ω, wtedy $\mathcal{M}u = Mu$, tzn. dla każdego zbioru borelowskiego $E \subset \Omega$ zachodzi równość

$$\mathcal{M}u(E) = Mu(E).$$

Dowód:

Skoro $\mathcal{M}u$, Mu są miarami borelowskimi wystarczy wykazać równość dla małych kul domkniętych $B(r)$ o środku w $x_0 \in \Omega$. Zaobserwujmy, że jeśli $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ to:

$$Mu = \mathcal{M}u = \det\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Załóżmy, że u jest dowolną funkcją wypukłą i niech $u^{(j)}$ będzie ciągiem gładkich funkcji wypukłych zbieżnych jednostajnie do u (danym przez Twierdzenie 1.8). Niech $\mu_j = \mathcal{M}u^{(j)}$, $\nu_j = Mu^{(j)}$, $\mu = \mathcal{M}u$, $\nu = Mu$. Mamy

$$\mu_j\Big(B(r)\Big) = \nu_j\Big(B(r)\Big),$$

chcemy pokazać, że $\mu\Big(B(r)\Big) = \nu\Big(B(r)\Big)$. Pokażemy następujące nierówności:

$$\limsup_{j \longrightarrow \infty} \nu_j\Big(B(r)\Big) \leqslant \nu\Big(B(r)\Big), \tag{4.3}$$

oraz dla każdego $0 \leqslant \rho < r$

$$\liminf_{j \longrightarrow \infty} \nu_j\Big(B(r)\Big) \geqslant \nu\Big(B(\rho)\Big). \tag{4.4}$$

Dzięki tym dwóm nierównościom udowodnimy to twierdzenie, ponieważ $r \longmapsto \nu\Big(B(r)\Big)$ jest funkcją rosnącą ze względu na r. Z warunków (4.3), (4.4) wynika, że

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \nu_j\Big(B(r)\Big) = \nu\Big(B(r)\Big)$$

poza punktami nieciągłości funkcji $r \longmapsto \nu\Big(B(r)\Big)$. Również ponieważ $\mu_j \longrightarrow \mu$ słabo, mamy

$$\mu_j\Big(B(r)\Big) \longrightarrow \mu\Big(B(r)\Big)$$

za wyjątkiem punktów nieciągłości dla $r \longmapsto \mu\Big(B(r)\Big)$. W ten sposób mamy

$$\mu\Big(B(r)\Big) = \nu\Big(B(r)\Big),$$

dla każdych poza przeliczalnie wieloma r. Jednak obie funkcje $r \longmapsto \mu\Big(B(r)\Big)$ oraz $r \longmapsto \nu\Big(B(r)\Big)$ są funkcjami ciągłymi prawostronnie względem r, więc muszą być równe dla każdego $r \geqslant 0$. Wystarczy zatem pokazać (4.3) i (4.4).

Aby udowodnić (4.3) bierzemy χ_j, χ które oznaczać będą odpowiednio funkcje charakterystyczne obrazu gradientu $B(r)$ względem $u^{(j)}, u$. Łatwo sprawdzić, że

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} \chi_j \leqslant \chi,$$

a zatem z Lematu Fatou mamy (4.3).

Aby udowodnić (4.4) ustalamy $\varepsilon > 0$, $0 \leqslant \varrho < r$. Połóżmy

$$\eta_j = \max\Big\{u(x) - u^{(j)}(x) : |x| = r\Big\},$$

oraz

$$v^{(j)}(x) = u^{(j)}(x) + \eta_j + \varepsilon\Big(|x|^2 - r^2\Big).$$

Wtedy $v^{(j)} \geqslant u$ na $\Big\{|x| = r\Big\}$. Niech

$$\Omega_j = \Big\{x : |x| < r \ \text{ oraz } \ v^{(j)}(x) < u(x)\Big\}.$$

Ponieważ $\eta_j \longrightarrow 0$ i $u^{(j)} \longrightarrow u$ jednostajnie w $|x| \leqslant r$, mamy $B(\varrho) \subset \Omega_j$ dla wystarczająco dużego j. Następnie dla takich j Twierdzenie 5.1 daje:

$$\nu\Big(B(\varrho)\Big) \leqslant \nu\Big(\Omega_j\Big) \leqslant Mv^{(j)}\Big(\Omega_j\Big) \leqslant Mv^{(j)}\Big(B(r)\Big).$$

Jednakże $v^{(j)} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, więc

$$Mv^{(j)} = \det\left[\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x_i \partial x_k}\right] dx_1 \wedge ... \wedge dx_n = Mu^{(j)} + A = \nu_j + A,$$

gdzie A jest sumą rzędów formy

$$\pm\varepsilon_-^k \mathcal{M}_I\Big(u^{(j)}\Big) \wedge d(x_{j_1}^2) \wedge ... \wedge d(x_{j_k}^2)$$

wraz z $|I| = n - k,\ k \geqslant 1$. Z Twierdzenia 4.1 mamy

$$\Big|A\Big(B(r)\Big)\Big| \leqslant C\varepsilon,$$

oraz C jest stałą niezależną od j. Dlatego dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} Mv^{(j)}\Big(B(r)\Big) \leqslant \liminf_{j\longrightarrow\infty} \nu_j\Big(B(r)\Big) + C\varepsilon.$$

Wobec tego mamy spełnioną nierówność (4.4). $\square$

Rozdział 5
Niejednorodny problem Dirichleta

W tym rozdziale celem będzie rozwiązanie niejednorodnego problemu Dirichleta:

$$\begin{cases} u \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \\ Mu = \mu \text{ w } \Omega, \\ u = g \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie Ω otwarty, ograniczony zbiór wypukły w $\mathbb{R}^n$, μ jest miarą borelowską na Ω, oraz g jest funkcją ciągłą na $\partial\Omega$. Rozwiązanie otrzymamy przy pomocy metody Perrona.

Pokażemy najpierw jednoznaczność problemu (5.1).

Propozycja 5.1.
Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^n$ (niekoniecznie wypukłym); u, v funkcje ciągłe na $\overline{\Omega}$, oraz wypukłe na Ω (a dokładnie na otoczce wypukłej Ω). Jeśli $u = v$ na $\partial\Omega$, $u \geqslant v$ w Ω wtedy obraz gradientu Ω względem u jest podzbiorem obrazu gradientu Ω względem v.

Dowód:
Weźmy $y \in N_u(\Omega)$. Wtedy dla pewnego $x_0 \in \Omega$ mamy

$$u(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle \leqslant u(x), \ x \in \Omega.$$

Niech $a \geqslant 0$ będzie dane przez

$$a = \max_{x \in \Omega} \Big(u(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle - v(x) \Big).$$

Zauważmy, że jeżeli $a = 0$, to maksimum jest osiągane dla $x = x_0$, w przeciwnym wypadku będzie to w rzeczywistości maksimum po pewnym zwartym podzbiorze Ω. Niech $\widetilde{x} \in \Omega$ będzie punktem, w którym maksimum jest osiągane. Wtedy

$$v(\widetilde{x}) = u(x_0) - a + \langle \widetilde{x} - x_0, y \rangle$$

oraz

$$v(\widetilde{x}) + \langle x - \widetilde{x}, y \rangle \leqslant v(x), \ x \in \Omega,$$

czyli $y \in N_v(\Omega)$. $\square$

Natępnie udowodnimy zasadę porównawczą dla operatora Monge'a-Ampère'a. Wynik w oczywisty sposób implikuje jednoznaczność problemu Dirichleta (5.1).

Twierdzenie 5.2.
Niech $u, v \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, *gdzie* Ω *jest ograniczonym obszarem wypukłym w* $\mathbb{R}^n$, *będą takie, że* $u \geqslant v$ *na* $\partial\Omega$ *oraz* $Mu \leqslant Mv$ *w* Ω. *Wtedy* $u \geqslant v$ *w* Ω.

Dowód:
Przypuśćmy, że zbiór $\{u < v\}$ jest niepusty. Znajdziemy wtedy $M > 0$ takie, że

$$\psi(x) := |x|^2 - M \leqslant 0$$

dla $x \in \Omega$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że zbiór

$$D := \{u < v + \varepsilon\psi\}$$

jest niepusty. Z Propozycji 5.1 oraz Propozycji 4.2 mamy

$$Mu(D) \geqslant M(v + \varepsilon\psi)(D) \geqslant Mv(D) + \varepsilon^n M\psi(D) > Mv(D)$$

- sprzeczność $\Big($bo $M\psi(D) = c_n\lambda(D)$ dla pewnego $c_n > 0\Big)$. □

Następnym rezultatem jest ilościowa wersja Propozycji 5.1.

Lemat 5.3.
Niech Ω *będzie zbiorem ograniczonym, otwartym i wypukłym w* $\mathbb{R}^n$ *ze średnicą* $\triangle$*; niech* $d(x)$ *będzie odległością pomiędzy* x *a* $\partial\Omega$, *dla* $x \in \Omega$. *Jeśli* $u \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$*;* $u \geqslant 0$ *na* $\partial\Omega$ *oraz* $u(x) = -h < 0$ *to*

$$\int_\Omega Mu \geqslant \frac{c_n h^n}{d(x)\triangle^{n-1}},$$

gdzie c_n *jest stałą zależną tylko od wymiaru* n.

Dowód:
Możemy założyć bez straty ogólności, że $h = 1$. Wybieramy zbiór

$$G = \Big\{\xi \in \Omega : u(\xi) < 0\Big\},$$

który jest ograniczony, otwarty oraz wypukły na $\mathbb{R}^n$; wtedy $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$ oraz $u = 0$ na ∂G. Konstruujemy stożek w $\mathbb{R}^{n+1}$ wysokości 1, o podstawie $G \times \{0\}$ z wierzchołkiem $(x, -1)$. Tzn. powierzchnia

$$z = c(\xi) \text{ w } \mathbb{R}^{n+1} \text{ jest taka, że } c(x) = -1,\ c(\xi) = 0$$

jeśli $\xi \in \partial G$, oraz funkcja $\xi \longrightarrow c(\xi)$ jest liniowa na każdym odcinku $[x, y]$, gdzie $x \in G,\ y \in \partial G$. Ponieważ G jest wypukły, powierzchnia $\Big\{\Big(\xi, c(\xi)\Big) : \xi \in \overline{G}\Big\}$ jest wypukła.

Ponadto $u \leqslant c$ na G gdyż u jest wypukła. Dlatego też stosując Twierdzenie 5.1 otrzymujemy

$$\int_G Mc \leqslant \int_G Mu \leqslant \int_\Omega Mu.$$

Mamy

$$\int_G Mc = \lambda\Big(N_c(G)\Big).$$

Zbiór $N_c(G)$ jest wypukły oraz zawiera przynajmniej jeden wektor długości $\frac{1}{d(x)}$ $\Big($weźmy powierzchnię podpierającą c w x przechodzącą przez punkt z ∂G najbliższy $x\Big)$. Mamy także $B\Big(0, \frac{1}{\triangle}\Big) \subset N_c(G)$, skąd wynika żądane oszacowanie. $\square$

Twierdzenie 5.4.
Niech Ω zbiór ograniczony, otwarty, wypukły w $\mathbb{R}^n$. Niech $u, u_j \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, gdzie $j = 1, 2, ...$, będą takie, że:
(i) $u_j \longrightarrow u$ zbieżny jednostajnie na $\partial\Omega$,
(ii) $Mu_j \longrightarrow Mu$ zbieżny słabo w Ω,
(iii) $\int_\Omega Mu_j \leqslant A < +\infty$ w $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
Wtedy $u_j \longrightarrow u$ jednostajnie na $\overline{\Omega}$.

Dowód:
Funkcje u_j są jednostajnie ograniczone z góry w zbiorze Ω. Jeśli w jest jedyną funkcją harmoniczną w $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ w Ω, taką, że $w = u$ na $\partial\Omega$, ponieważ funkcje wypukłe są subharmoniczne, z zasady maksimum mamy:

$$u_j(x) \leqslant w(x) + \varepsilon_j,\ x \in \Omega, \tag{5.2}$$

gdzie

$$\varepsilon_j = \max\Big\{|u_j(x) - u(x)| : x \in \partial\Omega\Big\}.$$

Teraz chcemy uzyskać dobre dolne ograniczenie na $u_j(x)$. Niech ζ będzie punktem z $\partial\Omega$ oraz funkcja liniowa $\ell(x)$ wyznacza płaszczyznę podpierającą wykresu u w ζ, tzn.

$$u(x) - u(\zeta) \geqslant \ell(x - \zeta),\ x \in \overline{\Omega}.$$

Niech

$$v_j(x) = u_j(x) - u(\zeta) - \ell(x - \zeta) + \varepsilon_j$$

z ε_j jak w (5.2). Mamy wtedy $v_j(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \partial\Omega$. Korzystamy z Lematu 5.3 dla każdego $x \in \Omega$ mamy $v_j(x) \geqslant 0$ lub

$$\Big[-v_j(x)\Big]^n \leqslant const.\ d(x)A\triangle^{n-1}. \tag{5.3}$$

W obu przypadkach mamy:

$$\liminf_{x \longrightarrow \zeta \in \partial\Omega} v_j(x) \geqslant 0$$

jednostajnie względem j, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ oraz j_0 mamy

$$u_j(x) > u(\zeta) - \varepsilon,\ j > j_0,\ x \in \overline{\Omega},\ |x - \zeta| < \delta.$$

Dzięki własności (5.3) widzimy, że funkcje u_j są jednostajnie ograniczone z dołu. Co więcej jednostajnie ograniczone rodziny funkcji wypukłych są zwarte w $\mathcal{C}(\Omega)$ (Twierdzenie 1.9), więc istnieje podciąg u_j, który zmierza do funkcji wypukłej v w $\mathcal{C}(\Omega)$. W szczególności z Twierdzenia 4.1 mamy

$$Mv = \lim_{j \longrightarrow \infty} Mu_j = Mu.$$

Również z własności (5.2) oraz (5.3) wynika, że $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ oraz $v = u$ na $\partial\Omega$. Dlatego stosując Twierdzenie 5.2 wnioskujemy, że $u = v$ na Ω. W rezultacie widzimy, że $u_j \longrightarrow u$ w $\mathcal{C}$ jednostajnie ponieważ $u_j - u$ jest małe blisko $\partial\Omega$ z (5.2) oraz (5.3). Podczas, gdy $u_j \longrightarrow v = u$ w $\mathcal{C}(\Omega)$. To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 5.5.

Dla $u, v \in CVX(\Omega)$ mamy

$$M \max\{u, v\} \geqslant \chi_{\{u>v\}} Mu + \chi_{\{u \leqslant v\}} Mv.$$

Dowód:

Wystarczy wykazać tę nierówność na zbiorze $\{u = v\}$. Ustalmy zbiór zwarty $K \subset \{u = v\}$. Dla $\varepsilon > 0$ mamy wtedy zbieżność jednostajną

$$w_\varepsilon := \max\{u, v + \varepsilon\} \longrightarrow \max\{u, v\} =: w,$$

gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$. Ze słabej zbieżności $Mw_\varepsilon \longrightarrow Mw$ otrzymamy

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} Mw_\varepsilon(K) \leqslant Mw(K),$$

a ponieważ $w_\varepsilon = v + \varepsilon$ w otoczeniu K, to $Mw_\varepsilon(K) = Mv(K)$. $\square$

Twierdzenie 5.6.

Jeśli Ω jest obszarem ściśle wypukłym i jeśli μ jest nieujemną miarą borelowską na zbiorze Ω z $\mu(\Omega) < +\infty$, wtedy istnieje dokładnie jedno U rozwiązanie (5.1).

Dowód:
Jedyność jest konsekwencją Twierdzenia 5.2. Aby udowodnić istnienie korzystając z Twierdzenia 5.4 widzimy, że wystarczy udowodnić twierdzenie kiedy $\mu \in P$, gdzie P jest stożkiem miar postaci

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \delta_{x_j}, \text{ gdzie } a_j \geqslant 0, \text{ zaś } \delta_{x_j} \text{ są miarami Diraca w } x_j.$$

Bo jeżeli wykażemy twierdzenie dla takich miar oraz μ jest dowolną miarą nieujemną taką, że $\mu(\Omega) < \infty$ to znajdziemy $\mu_n \in P$ takie, że $\mu_n \longrightarrow \mu$ słabo oraz $\mu_n(\Omega) \leqslant A < +\infty$. Wtedy z Twierdzenia 5.4 wynika, że rozwiązania problemu (5.1) dla μ_n zmierzają do rozwiązań (5.1) dla μ.

Z Twierdzenia 5.2 wynika, że rozwiązanie (5.1), jeśli istnieje, musi być dane przez

$$u = \sup \mathcal{F}(\mu, g),$$

gdzie

$$\mathcal{F}(\mu, g) = \Big\{ v \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : Mv \geqslant \mu \text{ w } \Omega, v = g \text{ na } \partial\Omega \Big\}.$$

Zakładamy więc, że $\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}$, gdzie $a_i \geqslant 0$. Pokażemy najpierw, że $\mathcal{F}(\mu, g) \neq \emptyset$. Mamy $M\Big(| \cdot - x_i|\Big) = c_n \delta_{x_i}$, gdzie $c_n > 0$ zależy tylko od n. Niech $v \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ będzie taka, że

$$v(x) = g(x) - \frac{1}{c_n^{1/n}} \sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i|, \; x \in \partial\Omega.$$

Wtedy z Propozycji 4.2 dostaniemy $Mw \geqslant \mu$, gdzie

$$w = v + \frac{1}{c_n^{1/n}} \sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i|.$$

Ponieważ $w = g$ na $\partial\Omega$, mamy $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$.

Jeżeli

$$U = \sup \mathcal{F}(\mu, g)$$

to mamy

$$w \leqslant U \leqslant u,$$

gdzie $u \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ jest takie, że $Mu = 0$, $u = g$ na $\partial\Omega$ (takie u istnieją dzięki Twierdzeniu 3.1). Wynika stąd, że $U \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $U = g$ na $\partial\Omega$ i wystarczy pokazać, że $MU = \mu$.

Udowodnimy najpierw, że $MU = 0$ w $\Omega \setminus \{x_1, ..., x_n\}$. Jeżeli $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ dla pewnego $r > 0$, to dzięki Twierdzeniu 3.1 znajdziemy $v \in CVX(B(x_0, r)) \cap \mathcal{C}(\overline{B}(x_0, r))$ takie, że $Mv = 0$ oraz $v = U$ na $\partial B(x_0, r)$.

$$w(x) := \begin{cases} U & \text{w } \; \Omega \setminus B(x_0, r) \\ v & \text{w } \; B(x_0, r). \end{cases}$$

Wtedy $w \in CVX(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ $\Big($bo $v \geqslant U$ w $B(x_0, r)\Big)$, a więc $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$. W $B(x_0, r)$ mamy więc

$$v = w \leqslant U \leqslant v,$$

czyli $U = v$, zatem $MU = 0$ w $B(x_0, r)$. Następnie wykażemy, że $MU \geqslant \mu$. Dzięki Lematowi 1.10 znajdziemy ciąg $u_j \in \mathcal{F}(\mu, g)$ taki, że $U = \sup_j u_j$. Z Twierdzenia 5.5 wynika, że $\max\{u_1, ..., u_j\} \in \mathcal{F}(\mu, g)$. Stąd otrzymamy, że $MU \geqslant \mu$.

Udowodniliśmy, że miara MU znika na $\Omega \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ oraz $MU \geqslant \mu$, a zatem

$$MU = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \delta_{x_i}, \text{ gdzie } \lambda_i \geqslant 1.$$

Musimy pokazać, że $\lambda_i = 1$. Ustalmy $i = 1$ możemy założyć, że $x_1 = 0$. W otoczeniu 0 mamy więc $MU = \lambda a \delta_0$. Przypuśćmy, że $\lambda > 1$. Niech $r > 0$ będzie takie, że $\overline{B}(0, r) \subset \Omega \setminus \{x_2, ..., x_k\}$. Obraz gradientu $N_U(0)$ jest zbiorem wypukłym o mierze dodatniej, a więc musi zawierać $B(0, \varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ (po ewentualnej modyfikacji U przez odjęcie funkcji liniowej). Oznacza to, że

$$U(x) - U(0) \geqslant \varepsilon |x|.$$

Po odjęciu stałej możemy założyć, że $U(0) < 0$, podczas gdy $U(x) \geqslant 0$, $|x| \geqslant r$.

Połóżmy

$$w := \begin{cases} U & , \text{ gdy } \ U \geqslant 0, \\ \lambda^{-\frac{1}{n}} U & , \text{ gdy } \ U < 0. \end{cases}$$

Na zbiorze $\{U < 0\}$, który jest otoczeniem 0, mamy $Mw = \lambda^{-1} MU = a\delta_0$. Ponieważ $w = U$ poza $B(0, r)$, mamy $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$, a stąd $w \leqslant U$. Mamy jednak $w(0) > U(0)$ - sprzeczność. $\square$

Bibliografia

[1] E. Bedford, B.A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math 37 (1976), 1-44.

[2] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, *Birkhäuser*, Boston 1994.

[3] J. Rauch, B.A. Taylor, *The Dirichlet Problem for the multidimensional Monge-Ampère equation*, Rocky Mountain, J. Math. 7 (1977), 345-364.

[4] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press 1970.