

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

Kierunek Matematyka

Specjalność Matematyka Stosowana

PRACA MAGISTERSKA



*Związek między torusem klasycznym
a zespolonym, rozwłóknienie Hopfa*

Promotor: prof. dr hab. Zbigniew Błocki

Student: Szymon Urban

Kraków 2023

Składam serdeczne podziękowania
Panu prof. dr hab. Zbigniewowi Błockiemu
za okazaną pomoc, życzliwość oraz cenne
wskazówki podczas pisania mojej pracy.

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Rys historyczny	5
2.1	Ewolucja konceptu torusa na przełomie dziejów	5
2.1.1	Etymologia	5
2.1.2	Kształtowanie matematycznych wizji	7
3	Torus klasyczny	11
3.1	Parametryzacja torusa	11
3.2	Model planarny	13
3.3	Uogólnienie	14
4	Torus zespolony	17
4.1	Krzywe eliptyczne jako torusy zespolone	23
5	Tensor metryczny	26
6	Struktura zespolona	27
7	Homologie i Kohomologie	31
7.1	Liczby Bettiego	33
8	Grupy przekształceń odwzorowań	36
8.1	Grupy modularne	37
8.2	Przestrzeń Teichmüllera	40

9	Torus w S^3	41
9.1	Nakrycie oraz rozwłóknienie	41
9.2	Kwaterniony	43
9.3	Rozwłóknienie Hopfa	44
9.3.1	Rozwłóknienie Hopfa - sfera Riemanna	45
9.4	Cylinder Hopfa	46
9.5	Torus Hopfa	49
9.6	Twierdzenie Pinkalla	51
10	Torus Hopfa - wizualizacja	54

1 Wstęp

Wszystko co nas otacza nie ciałem jest, a duszą. Matematyka odgrywa zaś kluczową rolę rozwijając alternatywną perspektywę na rzeczywistość, ginąc w mrocznych heraklitejskich płomieniach w jakich od początku swojego istnienia stoi. Przeciętny człowiek pogrążony jest w popnaukowej narracji przez którą postrzega siebie oraz otaczającą go rzeczywistość jako zlepek cząstek elementarnych podlegających tajemniczej sile zwanej prawami fizyki. My jako matematycy odwracamy te materialistyczne spojrzenie abstrahując o bytach będących namiastką platońskich idei. Wycinkiem tej panpsychicznej wizji (leibnizowskiej monadologii) jest torus, nieodzowny towarzysz wędrującego po początkowych ścieżkach topologii matematyka oraz manifestacja niewidocznej przepaści między abstrakcyjną teorią, a realnymi zastosowaniami. W sferze topologii stanowi kluczowy przykład przestrzeni ilorazowej, którego grupę podstawową można obliczyć poprzez twierdzenia Seiferta-van Kampena. W dziedzinie dynamiki plasuje się jako jedna z wiodących powierzchni translacyjnych. Torus, choć w swej istocie prosty, otwiera również drzwi do zrozumienia przestrzeni Teichmüllera. Całościowo rzecz ujmując, wydaje się, że torus jest niezmiennie nadzwyczajnym przykładem, który stanowi podstawę dla licznych tez, przenikając każdy nowy koncept swoją obecnością.

Głównym celem niniejszej pracy magisterskiej jest przedstawienie czytelnikowi torusów Hopfa oraz zapoznanie go z twierdzeniem Pinkalla w kontekście ich struktury zespolonej. Kluczowe w tym celu jest pojęcie rozwłóknienia, które również zostanie omówione. Praca magisterska opiera się na bogatej bibliografii, która obejmuje zarówno tradycyjne źródła drukowane, jak i zasoby dostępne w przestrzeni internetowej, tj. na dzień 5 września 2023 roku. Mimo, że głównie skupimy się na torusach Hopfa, postaramy się również wprowadzić czytelnika w tematy poboczne, wzbogacając nasze wywody za pomocą fascynujących, generowanych komputerowo kształtów.

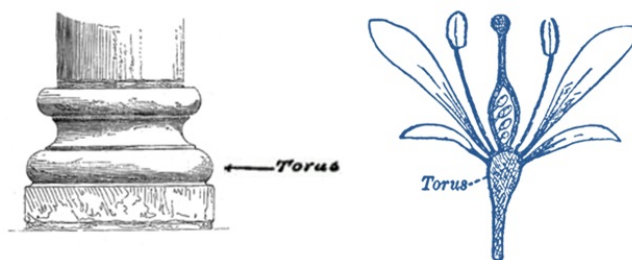
Załączone grafiki zostały wygenerowane przy wykorzystaniu pakietu do obliczeń symbolicznych Maple 2022 oraz bezpłatnej aplikacji matematycznej GeoGebra. Część z tych ilustracji została poddana edycji w programie graficznym MS Paint. Niektóre z grafik znajdują się w domenie publicznej lub zostały zaczerpnięte ze źródeł wymienionych w bibliografii i wspomnianych w przypisach.

2 Rys historyczny

W podanym rozdziale skupimy się na omówieniu pojęcia torusa, które ma bogatą historię w matematyce, fizyce i innych dziedzinach nauki. Praca ta nie będzie opierała się na ścisłym podejściu historycznym, ponieważ nasze kompetencje nie są związane z historią. Postaramy się przedstawić zarys historyczny torusa, tak aby uzmysłwić czytelnikowi jego ewolucję i znaczenie w różnych kontekstach. Rozdział powstał w oparciu o materiały źródłowe: [3], [16], [17], [33], [37], [46], oraz [51].

2.1 Ewolucja konceptu torusa na przełomie dziejów

2.1.1 Etymologia



Rozpocznijmy od zagłębienia się w etymologię samego słowa "torus", odsłaniając jego korzenie i pierwotne znaczenie. Przypuszcza się, że termin ten został wprowadzony do architektury w okolicach roku 1560, aby opisać wydatną, zaokrągloną listwę umieszczoną u podstawy kolumny. Słowo to pochodzi od łacińskiego *torus*, które odnosiło się do obrzęku, wybrzuszenia, sęku¹, poduszki czy nawet kanapy. Nawiązanie do "wypukłości" torusa odnajdujemy również w dziedzinie botaniki, gdzie jest używane w odniesieniu do zgrubiałej części błony komórkowej w centralnej części jamki lejkowatej². Fascynującym jest, że podane pojęcie nie ma pochodzenia w języku greckim, tak jak wiele innych terminów matematycznych czy naukowych.

¹Angielskie słowo *knot*, przetłumaczone w tym wypadku jako sęk, może oznaczać również węzeł. Warto zaznaczyć, że to tłumaczenie nabiera dodatkowego znaczenia ze względu na fakt, że dopiero wiele lat później ludzie zaczęli łączyć koncept torusa z teorią węzłów.

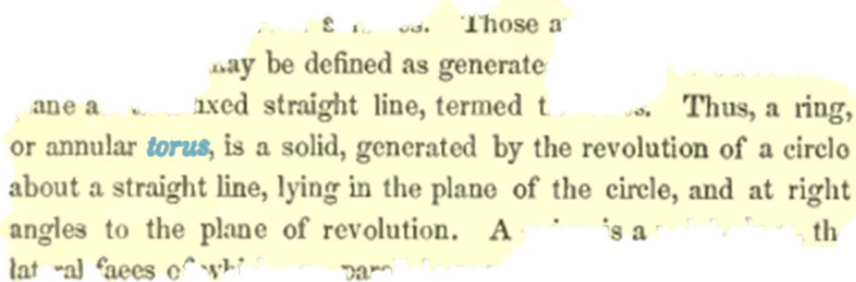
²Jamka lejkowata to anatomiczna struktura obecna w tkankach roślinnych, która umożliwia przewodzenie wody, minerałów i innych substancji poprzez tkanki roślinne.

Granice mojego języka wyznaczają granice mojego świata.
Ludwig Wittgenstein

Łacińskie słowa *tornare* (odnoszące się do "wracania" lub "odwracania") oraz *torquere* (o znaczeniu "skręcania" lub "obracania się") wnoszą ciekawy aspekt do kontekstu etymologicznego. Zdecydowanie wpisują się w ideę ruchu, co ma kluczowe znaczenie przy opisie geometrycznym torusa.

Przyjrzyjmy się przybliżonym tłumaczeniom słowa "torus" w kontekście dalece wykraczającym poza rodzinę języków indoeuropejskich. Nie znajdziemy tam etymologii historycznej a jedynie sposób dostosowania istniejących słów do nowszych terminów. Na przykład w językach japońskim i koreańskim, kształt torusa opisuje się jako "powierzchnię pączka". Natomiast w języku chińskim używa się terminu "powierzchnia pierścienia". To ciekawy przykład tego jak terminologia matematyczna przystosowuje się do różnych kulturowych ram wyrażenia. Wskazuje to na bogactwo języków oraz elastyczność matematycznych pojęć w globalnym kontekście³.

Kończąc rozważania natury lingwistycznej, dochodzimy do wniosku, że starożytny początek tego słowa pozostaje niejasny. Niemniej jednak, termin "torus" zyskał swoje wczesne matematyczne znaczenie w języku angielskim, co jest szczególnie zauważalne w roku 1860 w książce "The Practical Draughtsman's Book of Industrial Design" autorstwa Williama Johnsona. Poniżej znajduje się fragment tekstu podanej książki⁴:



... Those a
... may be defined as generate
... fixed straight line, termed t... Thus, a ring,
or annular **torus**, is a solid, generated by the revolution of a circle
about a straight line, lying in the plane of the circle, and at right
angles to the plane of revolution. A ... is a ... th
lat -al faces of ...

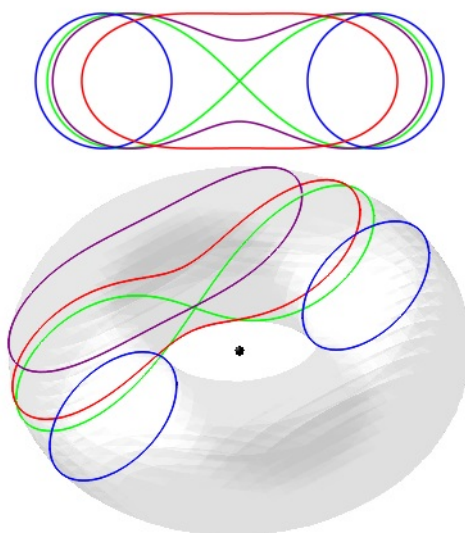
³Oczywiście w wymienionych przypadkach możemy również zaobserwować fenomen fonetycznych zapożyczeń terminu "torus", które są uwarunkowane oryginalną wymową w językach indoeuropejskich. Niemniej jednak, nasze zainteresowanie skupia się przede wszystkim na autochtonicznych metodach translacji.

⁴Ten fragment został oparty na zredagowanej wersji z roku 1866.

2.1.2 Kształtowanie matematycznych wizji

Świat jest moim wyobrażeniem.
Arthur Schopenhauer

W obszarze matematyki, pojęcie "torusa" można odnaleźć w zapiskach Herona z Aleksandrii (ok. 10 n.e. - ok. 70 n.e.), który wspomina o matematyku o imieniu Dionisodorus. Dionisodorus jest autorem dzieła na temat $\sigma\pi\epsilon\iota\rho\alpha\varsigma$ ⁵, gdzie znajduje się formuła na obliczenie objętości torusa⁶.



Διονυσόδωρον ἐν τῷ περὶ τῆς σπείρας ἐπιγραφόμενον

Na podstawie artykułu [46] można przypuszczać, że w 1873 roku William Kingdon Clifford (1845 - 1879) był jednym z pierwszych, którzy opisali płaską metrykę torusa. Był również pierwszym, który w standardowy płaski sposób osadził torus w \mathbb{R}^4 . W wymienionym artykule stwierdza się również, że był jednym z pionierów, którzy traktowali torus jako równoległobok ze zidentyfikowanymi przeciwległymi krawędziami.

⁵Słowo $\sigma\pi\epsilon\iota\rho\alpha\varsigma$ z greckiego oznacza spiralę. Przekroje torusa były nazywane przez hellenistycznych geometrów "przekrojami spiralnymi". Perseus (ok. 150 p.n.e.) był starożytnym greckim geometrą, który wymyślił pojęcie sekcji spiralnych, na wzór sekcji stożkowych badanych przez Apoloniusza z Pergii (ok. 260 p.n.e. - ok. 190 p.n.e.).

⁶Informacje na ten temat można znaleźć w tekście [1].

Kolejnym ważnym odkryciem było zrozumienie, że z perspektywy zespolonej geometrii algebraicznej, krzywa eliptyczna jest równoważna torusowi. Alfred Clebsch (1833 - 1872) w latach 60. XIX wieku udowodnił, że krzywe o genusie⁷ 1 są parametryzowane funkcjami eliptycznymi [8]. W 1884 roku Felix Klein (1849 - 1925) w swojej książce "Wykłady o ikosaedrze i rozwiązaniu równań piątego stopnia" przedstawił powiązania między rozwiązaniami równań piątego stopnia, a równaniami eliptycznymi [27]. Jednym z kluczowych osiągnięć tej pracy było zastosowanie grup modularnych do analizy tych równań. Ponadto, praca Kleina stanowiła wczesną próbę połączenia tych dwóch obszarów matematyki poprzez wykorzystanie transformacji Tschirnhausa⁸, równań różniczkowych hipergeometrycznych, form modularnych oraz tak zwanego równania ikosaedralnego.

W XIX wieku dokonano różnych odkryć w dziedzinie geometrii. Korzystano przy tym z abstrakcyjnych systemów aksjomatycznych, które kwestionowały V postulat Euklidesa. Tutaj wspomnimy tylko, że rozwinięcia geometrii zespolonej w XIX wieku doprowadziło do trzech bardzo konkretnych modeli. Mianowicie, pierwszy przypadek płaszczyzny zespolonej \mathbb{C} z jej metryką euklidesową:

$$ds^2 = dzd\bar{z} = dx^2 + dy^2.$$

Drugi przypadek geometrii eliptycznej jest przedstawiony w kontekście dwuwymiarowej sfery S^2 z metryką⁹:

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Wreszcie, mamy bardzo istotny przypadek geometrii hiperbolicznej, który można modelować za pomocą jednostkowego dysku na płaszczyźnie zespolonej, wyposażonego w metrykę Poincarégo:

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

⁷Termin "genus" posiada kilka równoważnych definicji, z których niektóre poszerzają jego zastosowanie na geometrię algebraiczną, szczególnie w sytuacjach, gdy dostęp do informacji topologicznych jest ograniczony. W dalszej części pracy genus będziemy odnosić do liczby całkowitej, która charakteryzuje różnorodność topologiczną poprzez liczbę otworów w niej zawartych. Pochodzenie tego pojęcia można wywodzić z prac Eulera, który wprowadził charakterystykę nazwaną jego imieniem, ściśle związaną z tym terminem.

⁸Z obecnej perspektywy teoria transformacji funkcji eliptycznych może być najprościej zinterpretowana poprzez pojęcie izogenii dla krzywych eliptycznych.

⁹Dwuwymiarowa sfera może być opisana za pomocą terminów zespolonych jako sfera Riemanna, czyli uzwarcenie jednopunktowe płaszczyzny zespolonej $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, będącej biholomorficznie równoważnej jednowymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Jak powszechnie wiadomo, te trzy dwuwymiarowe modele geometrii euklidesowej i nieeuklidesowej dają również pełną klasyfikację spójnych i jednospójnych zespolonych rozmaitości jednowymiarowych, co zostało udowodnione w sposób zadowalający na początku XX wieku przez Henriego Poincaré (1854-1912) i Paula Koebe (1882-1945)¹⁰. Ponadto, każda zwarta powierzchnia Riemanna o genusie 1 jest równoważna grupie ilorazowej płaszczyzny zespolonej przez kratę (zespolony torus o wymiarze 1).

Sama teoria płaskich powierzchni w S^3 stanowi dość szczególną sytuację. Jej badania sięgają prac Bianchiego z XIX wieku, kiedy to sklasyfikował on wszystkie płaskie zanurzenia w S^3 . Z punktu widzenia równań różniczkowych cząstkowych, te powierzchnie są związane z jednorodnym równaniem falowym, podczas gdy ogólnie powierzchnie o stałej krzywiznie w S^3 są związane z eliptycznymi lub hiperbolicznymi równaniami sin-Gordona lub sinh-Gordona. Dość zaskakujące, że liczba publikacji dotyczących tej teorii nie jest zbyt duża.

Adriano Garsia w 1961 roku pokazał, że na wszystkich zwartych powierzchniach w \mathbb{R}^3 można w naturalny sposób wprowadzić strukturę zespoloną. W rzeczywistości krótko potem udowodnił, że każda zwarta powierzchnia Riemanna (o dowolnym genusie) może być zanurzona konforemnie (kąty nie ulegają zmianie) w \mathbb{R}^3 jako powierzchnia algebraiczna, ale jego metoda dowodu była niekonstruktywna, co uniemożliwiło określenie ograniczeń stopnia powierzchni. Pinkall w 1985 roku odkrył prosty sposób określenia konforemnej postaci płaskiego torusa w odniesieniu do geometrii krzywej w S^2 . Jest to znaczące odkrycie, które miało wpływ na rozwój wielu dziedzin matematyki. W konsekwencji, niniejsza praca magisterska zostanie poświęcona głównie analizie tego ważnego wydarzenia.

Najnowsze osiągnięcia matematyczne związane z torusem znajdują się w badaniach nad algebraicznymi rozmaitościami torycznymi, geometrią tropikalną, topologią orbifoldów oraz wieloma innymi zaawansowanymi dziedzinami matematycznymi. Jednak pełne zrozumienie tych tematów wymaga ogromnej wiedzy i talentu, co sprawia, że są one zarezerwowane dla nielicznej grupy najbardziej utalentowanych matematyków na świecie.

Jak widzimy geniusz ludzkości tworzy modele świata, które są światem samym. Czy zatem możliwe jest, że obca cywilizacja ma zupełnie inną matematykę niż nasza? Czy matematyka jest absolutna?

¹⁰Warto odnotować, że podany rezultat udowodnili niezależnie od siebie [29], [35]. Twierdzenie to w literaturze nazywa się twierdzeniem o unifikacji.



$$W(M) = \int_M H^2 dA$$

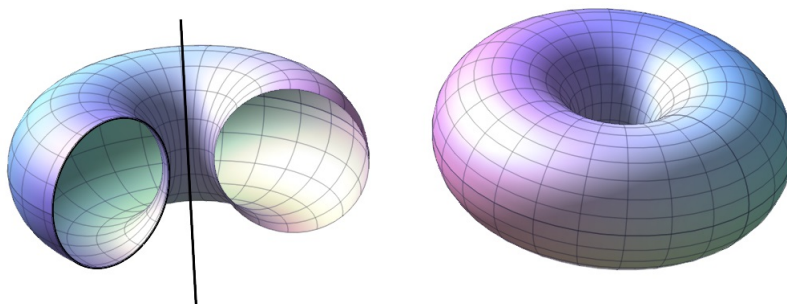
Rysunek 1: Hipoteza Willmore'a, sformułowana w 1965 roku, odnosi się do poszukiwań "najlepszego torusa" spośród wszystkich możliwych. Hipoteza ta stwierdza, że dla każdego gładkiego torusa M w \mathbb{R}^3 zachodzi: $\int_M H^2 dA \geq 2\pi^2$, gdzie H oznacza średnią krzywiznę (to jest średnia arytmetyczna głównych krzywizn κ_1 i κ_2 w każdym punkcie). Termin "najlepszy" rozumiemy jako najbardziej optymalny pod względem minimalizacji energii, tj. miary tego, jak bardzo dana powierzchnia odbiega od powierzchni sfery. W 2012 roku hipoteza została udowodniona przez Fernanda Codá Marquesa i André Nevesa [32]. To zagadnienie przez lata inspirowało wiele badań matematycznych, integrując pomysły z dziedzin takich jak geometria konforemna, równania różniczkowe cząstkowe, geometria algebraiczna czy geometryczna teoria miary.

3 Torus klasyczny

Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków.
Niels Henrik Abel

Rozdział niniejszej pracy magisterskiej poświęcony jest analizie i zagłębieniu jednego z najciekawszych obiektów matematycznych, czyli torusa. Celem tego rozdziału jest przedstawienie głównych cech torusa, jego kluczowych definicji oraz różnych interpretacji w kontekście różnych dziedzin nauki. Przedstawimy podstawowe własności torusa, takie jak parametryczne równania opisujące jego kształt, oraz zbadamy jego powiązania z innymi obiektami geometrycznymi. Dzięki temu rozdziałowi, czytelnik będzie miał okazję zaznajomić się z tymi aspektami torusa, które kryją w sobie głębokie matematyczne tajemnice.

3.1 Parametryzacja torusa



Torus to powierzchnia wyidealizowanego pączka, która należy do rodziny powierzchni obrotowych, ponieważ można ją uzyskać, obracając okrąg wokół linii, która leży w płaszczyźnie koła, ale go nie przecina. Wyprowadzimy równanie dla torusa, czyli znajdziemy funkcję $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że torus jest zbiorem rozwiązań $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$. Ponieważ torus jest powierzchnią obrotową, zaczynamy od równania okręgu na płaszczyźnie xz o promieniu r i środku w punkcie $(R, 0)$, gdzie $R > 0$, $r > 0$ ¹¹:

$$S^1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

¹¹ R to odległość od środka rury do środka torusa, r to promień rury. Jeśli $R > r$, to torus nie przecina samego siebie.

Aby otrzymać powierzchnię obrotu, zastępujemy x odległością od osi z , dokonując podstawienia $x \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ otrzymujemy:

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0\}. \quad (1)$$

Zatem na pierwszy rzut oka $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$ daje nam nasze pożądane rozwiązanie. Jednak ma to wadę polegającą na tym, że F nie jest różniczkowalna wzdłuż osi z , możemy to dość łatwo przezwyciężyć rozwijając równanie, wyodrębniając pierwiastek kwadratowy i podnosząc obie strony do kwadratu. W ten sposób otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + R^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

stąd funkcja F jest postaci:

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2).$$

Tak zdefiniowana funkcja nie wprowadza żadnych dodatkowych punktów do zbioru rozwiązań oraz jest różniczkowalna na całym \mathbb{R}^3 . Warto tu odnotować, że powierzchnie o genusie większym lub równym dwa nie mogą być reprezentowane jako powierzchnie obrotowe.

Okrąg na płaszczyźnie xz o promieniu r i środku w punkcie $(R, 0)$ możemy sparametryzować:

$$x = R + r \cos(\theta), \quad z = r \sin(\theta),$$

gdzie θ , dla pełnego okrążenia, przyjmuje wartości od 0 do 2π . Teraz obracając płaszczyznę xz wokół osi z , gdzie x zmienia się na $x \rightarrow x \cos(\phi)$ i y zmienia się na $y \rightarrow y \sin(\phi)$, gdzie ϕ przyjmuje wartości od 0 do 2π dla pełnego obrotu, otrzymujemy:

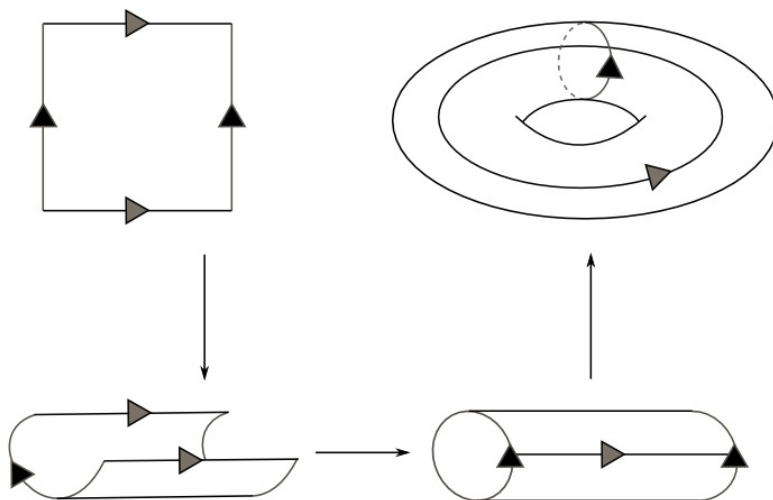
$$x = (R + r \cos(\theta)) \cos(\phi),$$

$$y = (R + r \cos(\theta)) \sin(\phi),$$

$$z = r \sin(\theta).$$

Ustalając θ , otrzymamy okrąg na płaszczyźnie równoległej do xy . Jak łatwo sprawdzić tak zadana parametryzacja spełnia równanie (1).

3.2 Model planarny



Rysunek 2: Źródło: <http://topologygeometry.blogspot.com/2010/06/notes-from-062310.html>

Jeśli sklejimy ze sobą dwa przeciwległe boki prostokąta, bez skreśtu, otrzymamy cylinder. Gdy zdecydujemy się skleić ze sobą dwa końce cylindra robiąc to w konwencjonalny sposób tworzymy torus, jednakże jest to tylko jedno z dwóch możliwych ustawień dla pary okręgów, które mają zostać połączone. W celu zilustrowania efektu tej procedury (sensu stricto modelu planarnego), zaczynamy od przekształcenia naszego prostokąta w kwadrat jednostkowy:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Możemy teraz "skleić" ze sobą dwa przeciwległe boki, deklarując, że dla każdej wartości x między 0 a 1, para punktów $(x, 0)$ i $(x, 1)$ jest teraz tym samym punktem. Podobnie dla każdej wartości y między 0 a 1, para punktów $(0, y)$ oraz $(1, y)$ jest identyczna. Otrzymaną powierzchnię, którą teraz nazwiemy **płaskim torusem**, można porównać pod względem globalnych właściwości do torusa zadanego w sposób parametryczny. Na przykład odcinki pionowe i poziome określone na zadanym modelu planarnym stają się zamkniętymi krzywymi, które są utożsamiane z "równoleżnikami" i "południkami" torusa obrotowego. Jednak geometria naszej powierzchni, różni się od geometrii torusa obrotowego. Na przykład, weźmy pod uwagę płaski torus. W tym przypadku wszystkie pionowe i poziome "okręgi" mają równą

długość, co wynika z charakterystyki tej przestrzeni. W przeciwieństwie do tego, w torusie obrotowym możemy zauważyć, że południki mają jednakową długość, podczas gdy równoleżniki niekoniecznie zachowują tę samą miarę. Wynika to z faktu, że chociaż walec w \mathbb{R}^3 ma taką samą wewnętrzną geometrię jak kartka papieru z zidentyfikowaną tylko jedną parą boków (czyli papier nie jest rozciągnięty), nie można go zgiąć w \mathbb{R}^3 bez zniekształcenia. Jak dotąd, nasze pojęcie wewnętrznej geometrii jest intuicyjne, ale wkrótce będziemy je uściślać.

3.3 Uogólnienie

Zainspirowani ostatnią konstrukcją, możemy spróbować spojrzeć na płaski torus w inny sposób. Przypomnijmy, że okrąg można reprezentować albo jako przedział, na przykład $[0, 1]$, ze zidentyfikowanymi końcami, albo jako zbiór klas równoważności liczb rzeczywistych modulo jeden, czyli zbiór wszystkich ułamkowych części liczb rzeczywistych. Jeśli teraz potraktujemy wszystkie liczby o tej samej części ułamkowej jako ten sam element okręgu, dochodzimy do reprezentacji $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wybór tej reprezentacji jest kwestią wybrania obszaru podstawowego, czyli jak wcześniej napisaliśmy podzbioru \mathbb{R} , który zawiera dokładnie jeden element z każdej klasy równoważności, z wyjątkiem granic, gdzie może zawierać dwa lub więcej elementów. W tym przypadku możemy przyjąć dowolny przedział jednostkowy jako nasz obszar podstawowy.

Podobne spostrzeżenie można odnieść do dwóch zmiennych, gdzie zauważamy, że płaski torus \mathbb{T}^2 może być utożsamiony ze zbiorem par ułamkowych części liczb rzeczywistych: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, gdzie \mathbb{Z}^2 oznacza kratę wektorów o współrzędnych całkowitych. Klasy równoważności reprezentowane są przez punkty w jednostkowym kwadracie (obszarze podstawowym), po zidentyfikowaniu par punktów na granicy, których różnica jest liczbą całkowitą:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}.$$

W ramach naszej pracy magisterskiej nie będziemy dogłębnie omawiać aspektów dynamiki topologicznej (ani związanej z dynamiką nieliniową teorii chaosu czy teorii bifurkacji), ale warto zaznaczyć, że zamiast skupiać się na wektorach o współrzędnych całkowitych, możemy przyjrzeć się przekształceniom za pomocą tych wektorów. W takim przypadku, każda klasa równoważności w $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ staje się orbitą grupy tych przekształceń działających na \mathbb{R}^2 , a nasza przestrzeń ilorazowa naturalnie staje się przestrzenią orbit.

Reprezentacja parametryczna powierzchni oraz reprezentacja w postaci funkcji uwikłanej umożliwia osadzenie powierzchni w przestrzeni euklidesowej, która do tej pory była przestrzenią \mathbb{R}^3 . Jednak istnieje możliwość, że w procesie osadzania powierzchni w \mathbb{R}^3 , może ona stracić niektóre ze swoich korzystnych właściwości. W przypadku standardowego zanurzenia torusa, dochodzi do zniszczenia symetrii między południkami a równoleżnikami, wszystkie południki mają taką samą długość, ale długość równoleżników się różni. Aby zachować tę symetrię, możemy zanurzyć torus w \mathbb{R}^4 , nazywanym dalej płaskim torusem¹². Reprezentacja tego płaskiego torusa może być przedstawiona parametrycznie jako:

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, & y &= r \sin t, \\z &= r \cos s, & w &= r \sin s,\end{aligned}$$

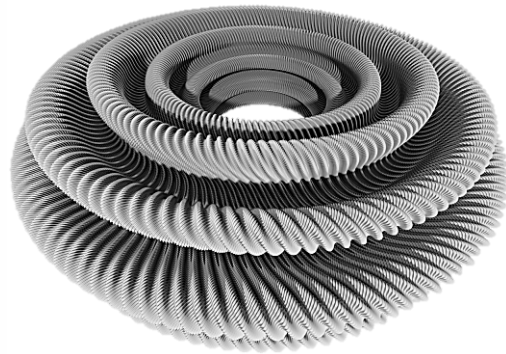
gdzie $s, t \in [0, 2\pi)$. Jak już wspomnieliśmy, płaski torus możemy również otrzymać jako przestrzeń ilorazową. Rozpoczynając od prostokąta, identyfikujemy przeciwległe krawędzie (bez odwracania kierunku). Zamiennie, możemy rozważyć rodzinę izometrii \mathbb{R}^2 danej jako $T_{m,n} : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$ i dokonać operacji modulo na orbitach. Konstrukcja \mathbb{T}^2 jako $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ jest dokładnie analogiczna do konstrukcji okręgu S^1 jako \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Rozważmy teraz bardziej ogólną klasę przykładów, które uogólniają konstrukcję płaskiego torusa jako $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Niech Λ będzie **kratą** w \mathbb{R}^2 , czyli zbiorem wektorów postaci $\{mu + nv : m, n \in \mathbb{Z}\}$, gdzie u i v są dwoma ustalonymi liniowo niezależnymi wektorami. Możemy zidentyfikować przestrzeń ilorazową \mathbb{R}^2/Λ z równoległobokiem $\{su + tv \mid 0 \leq s, t \leq 1\}$ z wykorzystaniem par przeciwległych boków zidentyfikowanych za pomocą translacji. Przestrzeń ilorazowa \mathbb{R}^2/L jest homeomorficzna z torusem, co można udowodnić, mając $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = \Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Wtedy, dla każdego punktu (x, y) postaci $(mu_1 + nv_1, mu_2 + nv_2)$, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$, definiujemy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ jako $f(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$. Następnie rozważamy relację równoważności na \mathbb{R}^2 , określoną przez $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, gdy $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, co pozwala nam uzyskać żądany homeomorfizm. Naturalna metryka na \mathbb{R}^2/Λ , może być zdefiniowana dla $x, y \in \mathbb{R}^2$ jako¹³:

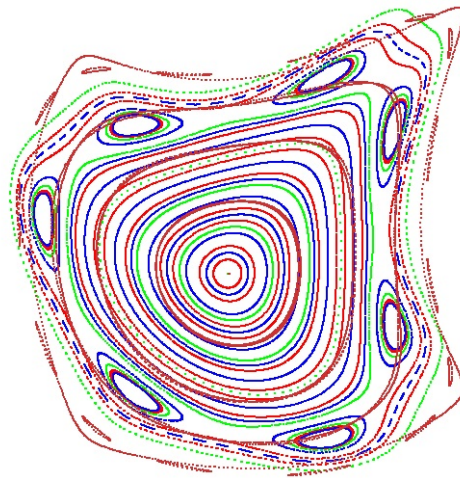
$$d(x + \Lambda, y + \Lambda) = \min\{d_{\mathbb{R}^2}(x, y + y') \mid y' \in \Lambda\}.$$

¹²Istnieje izometryczne zanurzenie "kwadratowego płaskiego torusa" w \mathbb{R}^3 . Ten "płaski torus" stanowi reprezentację twierdzenia Nasha-Kuipera opisanego w pracy [42].

¹³Geometrycznie wynikająca z intuicji metryka opiera się na traktowaniu torusa jako równoległoboku, w którym przeciwległe krawędzie zostały ze sobą złączone. Aby obliczyć odległość między punktami x a y , wyznaczamy najkrótszą ścieżkę z punktu x do y . Konieczne jest uwzględnienie przejścia przez krawędzie równoległoboku. Stąd wynika sugestia, że punkt x powinien być ustalony.



Rysunek 3: Ta toroidalna figura, odkryta przez francuskiego matematyka Vincenta Borrelli z Uniwersytetu w Lyonie w 2012 roku, stanowi konsekwencję jednowymiarowego procesu Nasha-Kuipera dla krzywych. Jest to przykład gładkich fraktali oraz zanurzenia płaskiego torusa w przestrzeni trójwymiarowej. Konstrukcje oraz grafika tego obiektu, który jest pełen pofałdowań, ale zachowuje wszystkie długości tak samo jak oryginalny płaski torus, zostały opisane w pracy [5].



Rysunek 4: Ten fraktal jest efektem przecięcia płaszczyzną trójwymiarowej projekcji torusa KAM, a jego powstanie wynika z intensywnych badań mających na celu zrozumienie stabilności Układu Słonecznego. Teoria KAM (Kołmogorow, Arnold, Moser), która przewiduje kształt i stabilność orbit, stanowi kluczowy element w analizie dynamiki układów nieliniowych i jest szczegółowo opisana w wyjątkowej książce [12].

4 Torus zespolony

Liczyby urojone są cudownym wzlotem Ducha Bożego,
są one pomostem łączącym byt z niebytem.
Leonhard Euler

Główny temat niniejszego rozdziału to torus zespolony będący uogólnieniem torusa klasycznego. Celem tego rozdziału jest przedstawienie głównych właściwości i charakterystyk torusa zespolonego, jak również ukazanie jego różnorodnych zastosowań w różnych dziedzinach. Rozdział zostanie podzielony na dwie sekcje, aby wyróżnić krzywe eliptyczne jako obiekty związane bezpośrednio z torusami zespolonymi. Na początku zostaną omówione podstawy teoretyczne, które są kluczowe dla zrozumienia konstrukcji torusa zespolonego. Następnie przejdziemy do bardziej zaawansowanych pojęć z zakresu geometrii różniczkowej, które pozwolą nam na matematyczną analizę torusa zespolonego jako powierzchni riemannowskiej.

Od tej pory wyrażenie "torus zespolony" będzie wskazywać równoległobok z przeciwnymi zidentyfikowanymi krawędziami, wyposażonym w odpowiednią geometrię dziedziczną z \mathbb{C} . W celach formalnych, chyba że zostanie to explicite sprecyzowane, zbiory otwarte będziemy określać na przestrzeni topologicznej z topologią indukowaną przez metrykę euklidesową.

Przedstawmy teraz niezwykle istotne twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym funkcji, którego dowód studenci mogą poznać w ramach kursu zaawansowanej analizy lub kursu wyróżnionego w analizie matematycznej:

Twierdzenie 4.1 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej). *Jeśli $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją klasy C^1 określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ i dla pewnego punktu $a \in U$ wyznacznik macierzy Jacobiego $J_f(a)$ jest różny od zera, to istnieje otoczenie otwarte V punktu a i otoczenie otwarte W punktu $f(a)$, takie że $f : V \rightarrow W$ jest wzajemnie jednoznaczna, a ponadto funkcja do niej odwrotna, $f^{-1} : W \rightarrow V$, też jest klasy C^1 .*

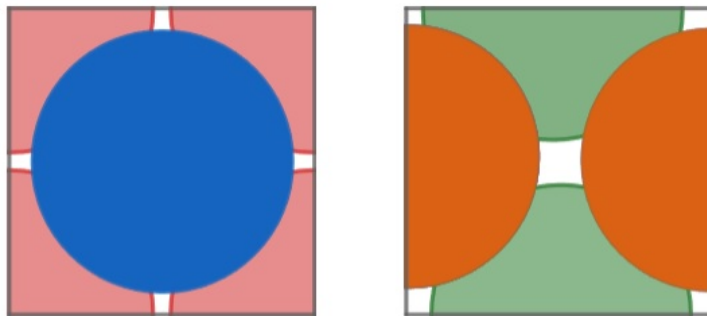
Dodatkowo podajmy następującą definicję:

Definicja 4.2 (Homeomorfizm). *Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy homeomorfizmem, jeśli jest bijekcją i zarówno f oraz f^{-1} są funkcjami ciągłymi¹⁴.*

¹⁴Dla naszych rozważań pojęcie ciągłości ma charakter topologiczny. Innymi słowy, funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest uznawana za ciągłą, jeśli spełnia warunek, że gdy $U \subset Y$ jest zbiorem otwartym, to $f^{-1}(U) \subset X$ również jest zbiorem otwartym.

Gładka mapa na powierzchni $S \subset \mathbb{R}^2$ to zbiór otwarty $U \subset S$ wraz z homeomorfizmem $\phi : U \rightarrow D^2$. Lokalne współrzędne na zbiorze U są określone przez $\phi^{-1} : D^2 \rightarrow U$. Warunek, że zbiór układów tworzy gładki atlas (dla przypomnienia atlas \mathcal{A} dla przestrzeni X to w zasadzie zbiór zbiorów otwartych, które całkowicie pokrywają przestrzeń, podobnie jak mapy na papierze w atlasie świata pokrywają całą Ziemię) jest spełniony, gdy przekształcenia przejścia $\phi \circ \psi^{-1}$, $\psi \circ \phi^{-1}$ są gładkie i spełniają warunki twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Tutaj otwarty dysk $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ oznacza niezwartą powierzchnię, na której możemy umieścić gładki atlas za pomocą pojedynczego układu współrzędnych.

Standardowy płaski torus ilustruje inny sposób wprowadzenia naturalnej różniczkowalnej struktury, który jest nieco mniej wizualny, ale który nie wymaga nawet elementarnych obliczeń. Mianowicie, po prostu rzutuje się standardową gładką strukturę z płaszczyzny \mathbb{R}^2 na torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Aby to zrobić, zauważmy, że każdy dysk o promieniu mniejszym niż $\frac{1}{2}$ jest odwzorowany iniekcyjnie na torus przez naturalną projekcję, a tym samym definiuje mapę. Podobnie jak w przypadku otwartych podzbiorów płaszczyzny, mapy przejść między współrzędnymi lokalnymi pochodzącymi z różnych dysków są podane przez mapy afiniczne, stąd mapy są kompatybilne.



Rysunek 5: Atlas na torusie z czterema mapami.

Od razu można odnieść się do kwestii minimalnej liczby wymaganych map. Oczywiście wystarczą cztery (torus jest pokryty dyskami o promieniu $\frac{2}{5}$ wyśrodkowanymi w środku kwadratu, w punktach środkowych dwóch niezidentyfikowanych boków oraz w wierzchołku). Jeśli zamiast dysków użyje się pewnych innych dziedzin w płaszczyźnie, które pozwalają na pojedynczą mapę, można zmniejszyć tę liczbę do trzech. Dwie mapy nie wystarczą do pokrycia torusa, ale dowód nie jest prosty.

Mając dwie gładkie powierzchnie $S, S' \subset \mathbb{R}^2$ z atlasami \mathcal{A} i \mathcal{A}' , mówimy intuicyjnie, że funkcja $f : S \rightarrow S'$ jest **dyfeomorfizmem**, jeśli jest bijekcją, a jej reprezentacja $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ w dowolnej parze lokalnych współrzędnych jest funkcją gładką z odwracalną macierzą pochodnych. W bardziej formalny sposób, dla homeomorfizmu $f : S \rightarrow S'$, każda mapa $\phi : U \rightarrow D^2$ w zbiorze \mathcal{A} może być przekształcona na mapę $\phi \circ f^{-1} : f(U) \rightarrow D^2$ w zbiorze \mathcal{A}' . Jeśli wykonamy ten proces dla wszystkich map w zbiorze \mathcal{A} , otrzymujemy gładki atlas \mathcal{A}' dla powierzchni S' .

Podobnie jak pojęcie dyfeomorfizmu jest podstawą dla relacji równoważności w przypadku różniczkowalnych powierzchni rzeczywistych, istnieje także pojęcie **równoważności holomorficzej** dla powierzchni zespolonych, znanych jako powierzchnie Riemanna (jednowymiarowe spójne rozmaitości zespolone). Istnienie powierzchni Riemanna, które mimo że są dyfeomorficzne, a nie są holomorficzo równoważne, oznacza, że równoważność holomorficza jest silniejsza od dyfeomorfizmu.

Przykłady

Fakt, że D^2 i \mathbb{C} nie są holomorficzo równoważne, jest konsekwencją twierdzenia Liouville'a, które mówi, że każda funkcja na całej płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} , która jest zarówno holomorficza, jak i ograniczona, musi w rzeczywistości być stała; to z kolei jest konsekwencją formuły całkowej Cauchy'ego, jednego z podstawowych wyników analizy zespolonej.

Kolejnym przykładem dyfeomorficznych powierzchni Riemanna, które nie są równoważne holomorficzo, są torusy zespolone. Rozważmy dowolną kratę w płaszczyźnie zespolonej zadaną przez:

$$\Lambda = \{mu + nv : m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad (2)$$

gdzie $u, v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne nad \mathbb{R} . Wtedy \mathbb{C}/Λ jest powierzchnią Riemanna, która jest dyfeomorficzna w stosunku do standardowego płaskiego torusa $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$, ale która może mieć inną zespoloną strukturę.

Definicja 4.3 (Funkcja podwójnie okresowa). *Funkcje f określoną na płaszczyźnie zespolonej wraz z liczbami zespolonymi u i v spełniającymi zależność:*

$$f(z + u) = f(z + v) = f(z),$$

dla wszystkich wartości liczb zespolonych z , nazywamy funkcją podwójnie okresową z okresami u oraz v . Tutaj u, v traktujemy jako niezależne liniowo wektory nad ciałem liczb rzeczywistych.

Obserwacja 4.4. *Funkcja podwójnie okresowa jest ograniczona.*

Dowód.

Niech $z \in \mathbb{C}$ oraz u, v oznaczają okresy funkcji f . Skoro u, v są niezależne liniowo względem liczb rzeczywistych możemy zapisać, że $z = ux + vy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Zatem z okresowości $f(z) = f(\{x\}u + \{y\}v)$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x . Stąd wnioskujemy, że f jest ograniczona, ponieważ jej obraz zawiera się w obrazie przestrzeni zwartej będącej równoległobokiem o wierzchołkach $\{0, u, v, u + v\}$.

□

Lemat 4.5. *Mając dane dwie kraty $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$, torusy \mathbb{C}/Λ_1 i \mathbb{C}/Λ_2 są równoważne jako powierzchnie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liniowa funkcja holomorphyzna F taka, że $F\Lambda_1 = \Lambda_2$.*

Dowód.

Skorzystamy z twierdzenia Liouville'a¹⁵. Niech $f : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$ będzie równoważnością holomorphyzną. Rozszerzając się do nakrycia \mathbb{C} , otrzymujemy funkcję holomorphyzną F na \mathbb{C} , która odwzorowuje każdą translację Λ_1 na translację Λ_2 . Weźmy dwa generatory u i v z Λ_1 . Wtedy $F(z+u) - F(z) \in \Lambda_2$ i $F(z+v) - F(z) \in \Lambda_2$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$, stąd obie różnice są stałe, ponieważ zmieniają się w sposób ciągły w obrębie dyskretnego zbioru Λ_2 . Różniczkując otrzymujemy $F'(z) = F'(z+u) = F'(z+v)$, a więc F' jest holomorphyzna i podwójnie okresowa, stąd ograniczona. Zgodnie z twierdzeniem Liouville'a jest to stała, a zatem F jest funkcją liniową.

□

¹⁵Każda ograniczona funkcja całkowita musi być stała.

W rzeczywistości, może zamiast obrazu odwzorowań liniowych bardziej istotnym czynnikiem jest jedynie kształt równoległoboków na kracie. Przekłada się to oczywiście na ekwiwalent w skali i obrocie. Zauważmy, że obie te cechy postrzegamy jako niezmiennie w torusie. Te ekwiwalencje zaprowadzą nas później do **przestrzeni Teichmüllera** dla torusa.

Wniosek 4.6. *Niech Λ_1 i Λ_2 będą dwiema kratami w \mathbb{C} . Wtedy torusy \mathbb{C}/Λ_1 i \mathbb{C}/Λ_2 są holomorficznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między najkrótszym wektorem a najkrótszym niewspółliniowym wektorem w każdej z krat jest taki sam i stosunki długości tych wektorów są równe.*

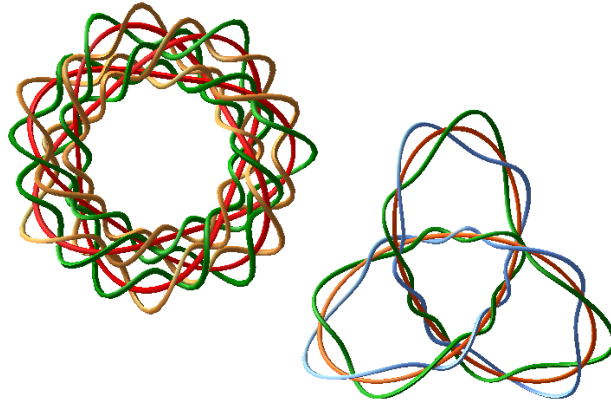
Ten wniosek pokazuje, że istotnie istnieje dwuparametrowa rodzina różnych torusów zespolonych: jednym parametrem jest kąt między wektorami generującymi, a drugim stosunek ich długości. Można wybrać najkrótszy wektor u na kracie równy 1, a drugi najkrótszy wektor v w obszarze:

$$\mathbf{F} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, |\operatorname{Re}\{z\}| \leq \frac{1}{2}\}, \quad (3)$$

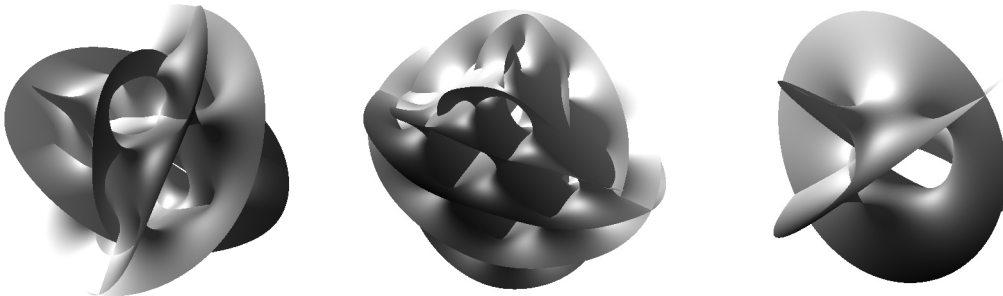
pokazanym w rozdziale *Grupy modularne*. Ponadto wykazemy, że to wymaganie jednoznacznie określa v jeśli leży ono we wnętrzu \mathbf{F} , a jeśli leży na brzegu, to określa się go do identyfikacji $-\frac{1}{2} + it \sim \frac{1}{2} + it$ na liniach prostych i $z \sim -\frac{1}{z}$ na okręgach.

Zauważmy, że $z \rightarrow z + 1$ i $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ są funkcjami holomorficznymi, dziedzina \mathbf{F} z podanymi identyfikacjami ma naturalną strukturę zespoloną, z wyjątkiem dwóch punktów "stożkowych" oraz $\frac{\pm 1 + \sqrt{3}i}{2}$, gdzie całkowity kąt po dokonaniu identyfikacji załamuje się odpowiednio do π i $\frac{2\pi}{3}$. Można temu zaradzić, wprowadzając współrzędne $w = (z - i)^2$ i $w = (z - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2})^3$ w pobliżu tych punktów. Jednak okazuje się, że bardziej przydatne jest zachowanie punktów stożkowych i rozważenie \mathbf{F} jako złożonej powierzchni z dwiema stożkowymi osobliwościami, nieco podobnymi do standardowego stożka. Nazywa się to *powierzchnią modułową* i odgrywa niezwykle ważną rolę w teorii liczb i teorii reprezentacji grupowych.

Natknęliśmy się w ten sposób na bardzo interesujące zjawisko: zbiór klas powierzchni Riemanna na torusie (aż do równoważności holomorficznej) sam jest naturalnie wyposażony w strukturę powierzchni Riemanna. Obecność zespolonej struktury na tym zbiorze klas równoważności jest prostym, choć wysoce nietrywialnym przejawem ogólnego zjawiska obserwowanego w różnych obszarach matematyki, w którym zbiór niezmienników a struktura pewnego rodzaju sama posiada podobną strukturę.

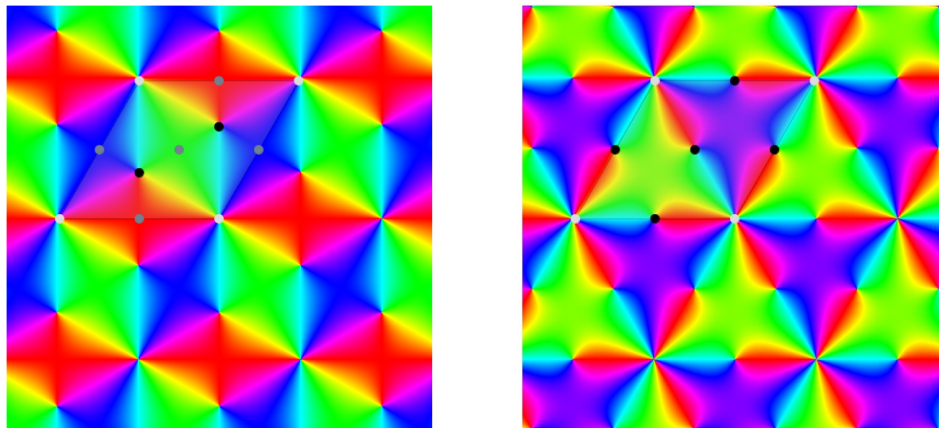


Rysunek 6: Przedstawione na ilustracji węzły torusowe odgrywają ważną rolę w dynamice płynów i elektrodynamice oraz mogą być także użyteczne w klasycznej teorii pola. Dla każdego węzła torusowego można użyć pary liczb całkowitych (p, q) do jego opisu, gdzie p oznacza liczbę zwojów wokół osi symetrii obrotowej, a q oznacza liczbę zwojów wokół okręgu znajdującego się wewnątrz torusa. Przecięcie $z^p + w^q = 0$ hipersferą S^3 o środku w początku układu współrzędnych jest węzłem torusowym typu (p, q) [25], [34].



Rysunek 7: Teoria strun zakłada, że podstawowymi składnikami rzeczywistości nie są punkty, ale wibracje jednowymiarowych obiektów matematycznych, zwanych strunami. Teoria ta jest spójna tylko w dziesięciowymiarowej czasoprzestrzeni, a w niektórych przypadkach możliwy jest także jedenasty wymiar. Aby połączyć teorię strun z czterowymiarowym światem, najprostszą możliwością jest skompaktowanie sześciu lub siedmiu wymiarów na wewnętrznych rozmaitościach, których rozmiar jest wystarczająco mały, aby umknąć wykryciu. Matematyka opisująca ten proces została już opracowana w postaci zespolonych rozmaitości Calabiego-Yau, których przykłady przedstawiono na tym rysunku. Torusy są jedynymi zwartymi rozmaitościami zespolonymi, na których istnieje metryka o znikającej krzywiznie. Stąd wynika, że są to jedyne zwarte jednowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau [2], [20].

4.1 Krzywe eliptyczne jako torusy zespolone



W tym podrozdziale przedstawione zostaną krzywe eliptyczne jako torusy zespolone. Krzywe eliptyczne są istotnym elementem w teorii liczb oraz kryptografii, ale nie będziemy przedstawiać dowodów w tym szkicowym opisie. Można znaleźć pełne dowody i szczegółowe wyjaśnienia w odpowiednich książkach i źródłach naukowych [10], [18], [38], [40].

W matematyce, obliczanie całek odgrywa kluczową rolę w rozwiązywaniu różnorodnych problemów i modelowaniu wielu zjawisk. W szczególności długość połowy okręgu $x^2 + y^2 = a^2$ wyraża się całką:

$$\int_{-a}^a \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi a.$$

Analogicznie wydaje się, że podobnie prosto możemy wyznaczyć długość połowy elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Niestety, długość tej elipsy wyraża się całką o bardziej skomplikowanej naturze:

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - (1 - \frac{b^2}{a^2})x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

Niech $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ oraz podstawmy $x \rightarrow ax$. Wtedy długość elipsy wynosi:

$$a \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}} dx = a \int_{-1}^1 \frac{1 - k^2x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} dx = a \int_{-1}^1 \frac{1 - k^2x^2}{y} dx,$$

gdzie $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$ to **krzywa eliptyczna**. Całkę postaci $\int R(x, y) dx$, gdzie $R(x, y)$ to funkcja wymierna zmiennych (x, y) określonych na krzywej

eliptycznej $E : y^2 = f(x)$, gdzie f to wielomian stopnia 3 lub 4, nazywamy **całką eliptyczną**. Całka $\int_0^w \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ wynosi $\arcsin(w)$. Jej odwrotność to funkcja okresowa $w = \sin(z)$ o okresie 2π . Całka eliptyczna $\int_\alpha^w \frac{dx}{\sqrt{x^3+Ax+B}}$ ma funkcję odwrotną $w = \wp(z)$ ¹⁶ z dwoma niezależnymi od siebie okresami ω_1 i ω_2 . To znaczy, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$:

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z + \omega_2) = \wp(z).$$

Takie podwójne funkcje okresowe są nazywane **funkcjami eliptycznymi**.

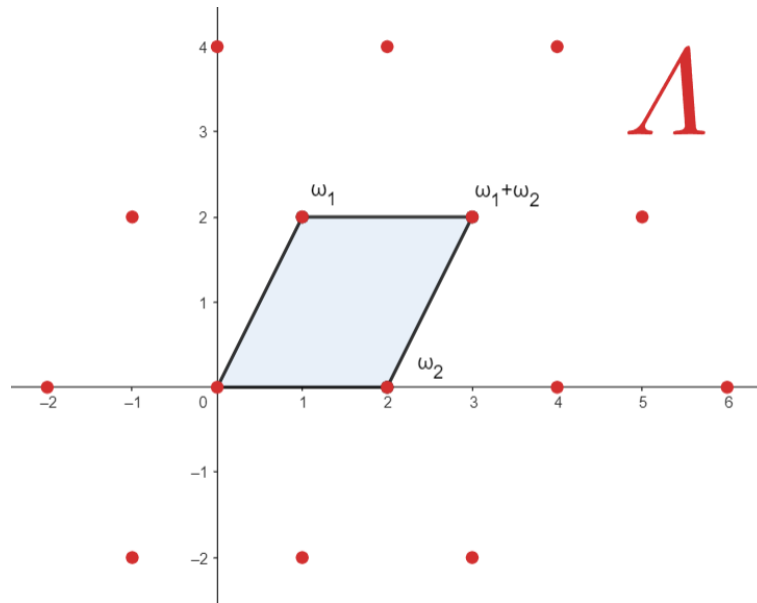
Funkcja \wp i jej pochodna spełniają równanie algebraiczne:

$$\wp'(z)^2 = \wp(z)^3 + A\wp(z) + B.$$

Podwójna okresowość $\wp(z)$ oznacza, że to funkcja na przestrzeni ilorazowej \mathbb{C}/Λ , gdzie Λ to krata:

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

$\wp(z)$ oraz $\wp'(z)$ są funkcjami na obszarze równoległoboku podstawowego.



Funkcja \wp zadaje izomorfizm: $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{(\wp(z), \wp'(z))} E(\mathbb{C})$. Stąd punkty na E o zespolonych współrzędnych \mathbb{C} tworzą torus.

¹⁶Funkcja P Weierstrassa $\wp(z, \omega_1, \omega_2) := \wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$, zaprezentowana na początku podrozdziału dla dwóch różnych par stałych ω_1, ω_2 , została zilustrowana za pomocą metody kolorowania dziedzin. Zachęcamy do zgłębiania tematu, korzystając jednocześnie z bardziej zaawansowanych źródeł, które przedstawia pełen zakres informacji na temat tego interesującego zagadnienia matematycznego [47].

Wstępnie przedstawiony szkic zawiera wiele cennych informacji, ale niestety pominięto w nim kilka ważnych uwag, które teraz warto wspomnieć. Pragniemy uzupełnić treść, aby była jak najbardziej kompletna i precyzyjna:

1. Ciało funkcji eliptycznych na kratce Λ to $\mathbb{C}(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)$, czyli każda funkcja eliptyczna jest funkcją wymierną funkcji \wp i jej pochodnej \wp' .
2. W tym kontekście najbardziej powszechnie akceptowanym równaniem, niezależnie od innych postaci jest: $\wp'_\Lambda{}^2 = 4\wp_\Lambda^3 - g_2(\Lambda)\wp_\Lambda + g_3(\Lambda)$, stałe $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda/\{0\}} \lambda^{-4}$ oraz $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda/\{0\}} \lambda^{-6}$ pojawiają się w rozwinięciu szeregów Laurenta funkcji \wp oraz \wp' , gdzie ich wartości wynikają z dopasowania szeregów Laurenta, aby uzyskać daną tożsamość. Oczekujemy, że pojawi się składnik sześcienny i kwadratowy, ponieważ funkcja \wp ma bieguny rzędu dwa, podczas gdy funkcja \wp' ma bieguny rzędu trzy.
3. Niech $\Lambda \subset \mathbb{C}$ będzie kratą. Wtedy \mathbb{C}/Λ oraz $E_\Lambda(\mathbb{C})$ są izomorficzne jako zespolone grupy Liego za pośrednictwem izomorfizmu ϕ :

$$z \pmod{\Lambda} \rightarrow (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z)),$$

oraz $0 \rightarrow \mathcal{O}_{E_\Lambda}$. Należy zauważyć, że działanie na $E_\Lambda(\mathbb{C})$ to dodawanie na krzywej eliptycznej, podczas gdy na \mathbb{C}/Λ to zwykle dodawanie liczb zespolonych. Jednym ze sposobów na udowodnienie, że ϕ jest izomorfizmem grup, jest wykorzystanie dywizorów: $\sum_{P \in E_\Lambda} n_P(P)$.

4. To pozwala nam przekształcić torus w izomorficzną krzywą eliptyczną, ale co z drugą stroną? Czy każda krzywa eliptyczna może być przedstawiona w tej postaci? Na szczęście tak. Weźmy nieosobliwą krzywą eliptyczną $E : y^2 = 4x^3 - Ax - B$. Istnieje wtedy taka kratka Λ , że $E_\Lambda = E$. Oznacza to, że krzywe eliptyczne nad \mathbb{C} i torusy zespolone są praktycznie tym samym z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli chcemy znaleźć jawny sposób na przekształcenie E w kratę Λ_E taką, że $\mathbb{C}/\Lambda_E \cong E$ możemy to zrobić, wykorzystując wyrażenie $\Lambda_E = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$, gdzie:

$$\omega_1 = \int_\alpha \frac{dx}{y}, \quad \omega_2 = \int_\beta \frac{dx}{y},$$

gdzie α, β generują pierwszą grupę homologii $H_1(E, \mathbb{Z})$.

Podsumowując główną ideą jest to, że istnieje piękny związek między krzywymi eliptycznymi a funkcjami eliptycznymi, co pozwala nam przechodzić od krzywych eliptycznych do torusów zespolonych.

5 Tensor metryczny

W tym rozdziale zostanie przedstawiona definicja tensora metrycznego. Podkreślmy, że przedstawiona definicja zostanie zaprezentowana w możliwie najprzystępniejszy sposób, mając na celu jedynie nakreślenie intuicji, która stoi za ideą tensora metrycznego. Czyli obliczanie długości krzywych, kątów i powierzchni na danej przestrzeni.

Rozważmy powierzchnię parametryczną, przy użyciu współrzędnych kartezjańskich x, y i z będących punktami na powierzchni, które zależą od dwóch dodatkowych zmiennych u i v . Z tego powodu, powierzchnia parametryczna, wyrażona współrzędnymi wektorowymi ma postać:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

określoną na otwartym zbiorze U w płaszczyźnie uv . Jeśli zmienne u i v zależą od trzeciej zmiennej t , przyjmującej wartości w przedziale $[a, b]$, to $\vec{r}(u(t), v(t))$ będzie śledzić krzywą parametryczną na powierzchni parametrycznej. Długość łuku tej krzywej jest wyrażona jako całka:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}(u(t), v(t)) \right\| dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + 2u'(t)v'(t) \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v + v'(t)^2 \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v} dt, \end{aligned}$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową. Tutaj zastosowano regułę łańcuchową, a dolne indeksy oznaczają pochodne cząstkowe. Definiujemy element liniowy jako:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ E &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v. \end{aligned}$$

Korzystając z notacji macierzowej:

$$ds^2 = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

gdzie macierz $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ oznacza tensor metryczny. Dodajmy tylko, że podana definicja tensora metrycznego może być przedstawiona w oparciu o iloczyn skalarny zamiast elementu liniowego.

6 Struktura zespolona

W tym rozdziale przedstawimy dogłębne omówienie struktury zespolonej, opartej na wykładach [2]. Struktura zespolona jest fascynującym zagadnieniem, które łączy geometrię, analizę i algebrę. Pozwala nam na bardziej intuicyjne zrozumienie różniczkowania na płaszczyźnie zespolonej i w konsekwencji lepsze zrozumienie zespolonych rozmaitości.

Chociaż powierzchnie Riemanna nie posiadają pojęcia długości, mają pojęcie kąta między wektorami stycznymi w punkcie, które nazywane jest **strukturą konforemną**. Oznacza to, że możemy spróbować wprowadzić strukturę konforemną na powierzchni, zanim wprowadzimy strukturę zespoloną. Sposobem uzyskania struktury konforemnej jest skonstruowanie metryki Riemanna na powierzchni, co dostarcza nam kątów i długości wektorów stycznych. Dowód opiera się na tym, że każda rozmaitość ma gładką metrykę Riemanna, co wynika z argumentu wykorzystującego rozkład jedności¹⁷.

Dodatkową hipotezą dotyczącą struktury konforemnej, którą potrzebujemy, jest to, że wokół każdego punktu możemy znaleźć otwarty zbiór, który jest konforemnie równoważny z otwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 ze standardową strukturą konforemną. W odniesieniu do metryki Riemanna, ta hipoteza mówi, że wokół każdego punktu p możemy znaleźć współrzędne takie, że metryka riemannowska ds wygląda następująco:

$$ds^2 = \Phi(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

Tutaj Φ to dodatnia gładka funkcja na otwartym zbiorze wokół p . Taki układ współrzędnych nazywany jest **układem izotermalnym**. Jeśli mamy układy izotermalne wokół każdego punktu, przy dodatkowym warunku, że (dx, dy) tworzą uporządkowaną bazę, twierdzenie (6.1) mówi, że możemy podnieść tę strukturę konforemną do struktury zespolonej.

Aby to zrobić, przypisujemy zespolonej współrzędnej z postać $x+iy$, gdzie (x, y) to uporządkowane izotermalne współrzędne. Musimy pokazać, że to tworzy strukturę zespoloną, czyli przekształcenia przejścia są holomorficzne. Załóżmy, że wokół pewnego punktu mamy dwa różne układy izotermalne, nazwijmy je $z = x+iy$ i $w = a+ib$. Aby wykazać holomorficzność, wystarczy sprawdzić równanie Cauchy'ego-Riemanna.

¹⁷Rozkład jedności to podział funkcji jednostkowej na przestrzeni topologicznej na sumę funkcji ciągłych, z których każda jest niezerowa tylko na niewielkich fragmentach przestrzeni.

Twierdzenie 6.1. *Na gładkiej powierzchni zorientowanej z metryką riemannowską ds istnieje jedyna struktura zespolona, dla której metryka ds jest zespolona.*

Dowód.

Lokalnie możemy napisać:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2. \quad (4)$$

Powiemy, że współrzędne są izotermalne jeżeli (4) może być zapisane w postaci:

$$ds^2 = g^2(dx^2 + dy^2),$$

gdzie $g > 0$. Będziemy potrzebować następującego lematu:

Lemat 6.2. *Jeżeli ϕ, ψ to dwa układy określające izotermalne współrzędne na powierzchni riemannowskiej, to mapa przejścia $\phi \circ \psi^{-1}$ jest albo holomorficzna, albo antyholomorficzna.*

Dowód.

Dla $g > 0$ możemy zapisać, że $|d\phi|^2 = g^2|d\psi|^2$. Wtedy łatwo można pokazać, że istnieje zespolona λ taka, że $|\lambda| = 1$ oraz $d\phi = \lambda g d\psi$ albo $d\phi = \lambda g d\bar{\psi}$.

W pierwszym przypadku za pomocą reguły łańcuchowej:

$$(\phi \circ \psi^{-1})_{\bar{\zeta}} = \lambda g (\psi \circ \psi^{-1})_{\bar{\zeta}} = 0.$$

Podobnie w drugim przypadku pokazujemy, że $(\phi \circ \psi^{-1})_{\zeta} = 0$. □

Jeśli ograniczymy się tylko do układów współrzędnych zachowujących orientację, **Lemat 6.2** łatwo implikuje jednoznaczność. Aby udowodnić istnienie, teraz wystarczy lokalnie skonstruować układ współrzędnych zachowujący orientację, który dostarcza izotermalnych współrzędnych. Poszukujemy funkcji f zachowującej orientację, to jest:

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0, \quad (5)$$

i takiej, że $ds^2 = g^2|df|^2$ dla pewnej gładkiej dodatniej funkcji g . Możemy zapisać (4) w postaci:

$$ds^2 = Adz^2 + 2B|dz|^2 + \bar{A}d\bar{z}^2,$$

$$ds^2 = 2(\Re(A) + B)dx^2 - 4\Im(A)dxdy + 2(-\Re(A) + B)dy^2.$$

Widzimy, że $ds^2 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| < B$. Możemy również zapisać:

$$g^2|df|^2 = g^2|f_z|^2|dz + \mu d\bar{z}|^2,$$

gdzie $\mu = \frac{f_z}{f_{\bar{z}}}$ spełnia warunek $|\mu| < 1$, zgodnie z (5). Poszukujemy więc g, f takich, że $A = g^2|f_z|^2\bar{\mu}$ oraz $2B = g^2|f_z|^2(1 + |\mu|^2)$. Z tego wynika, że:

$$2B\bar{\mu} = A(1 + |\mu|^2),$$

stąd (ponieważ $|\mu| < 1$):

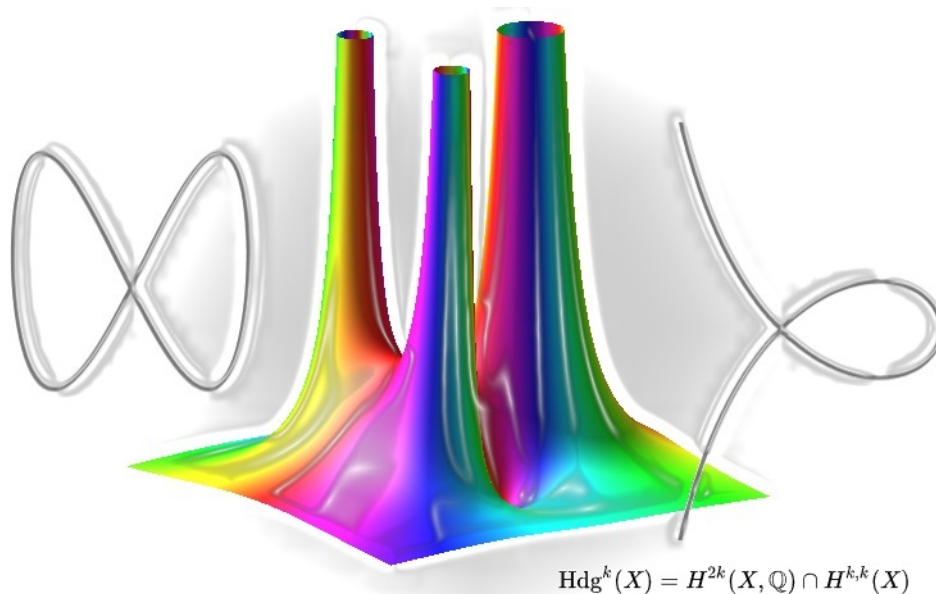
$$\mu = \frac{\bar{A}}{B + \sqrt{B^2 - |A|^2}}.$$

Zostajemy zatem z zadaniem lokalnego rozwiązania równania Beltramiiego:

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z,$$

dla gładkiego μ , gdzie $|\mu| < 1$. To zostało pokazane w [19].

Ostatecznie udowodniliśmy, że możemy podnieść strukturę konforemną do struktury zespolonej. W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy alternatywne podejście do konstruowania powierzchni Riemanna. Tamto podejście było oparte na izometriach w \mathbb{C} , co pozwoliło nam uzyskać torusy zespolone. Warto zaznaczyć, że podejście wykorzystujące izometrie w przypadku powierzchni Riemanna o większym genusie niż 1 nie jest łatwe i prawdopodobnie wymaga zaawansowanej algebry.



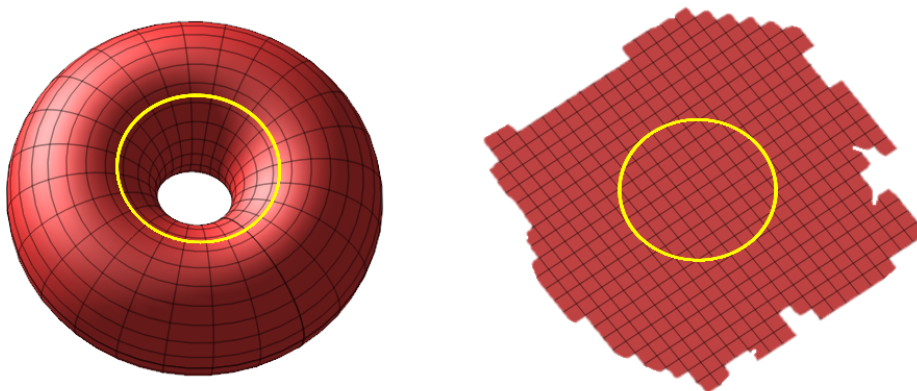
$$\text{Hdg}^k(X) = H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{k,k}(X)$$

Rysunek 8: Czy jest możliwe poddanie dowolnej powierzchni odpowiedniej deformacji, tak aby można było uzyskać zbiór algebraiczny? W 1982 roku Michael Freedman odkrył kontrprzykład, który nazwał rozmaitością E_8 . Jest to monstrualna struktura w czterowymiarowej przestrzeni, tak patologiczna, że niezależnie od stopnia jej deformacji, nie istnieje równanie, które by ją opisało. Jakże zatem jest kryterium zapewniające, że kształt można przekształcić w zbiór algebraiczny? Te pytania prowadzą nas do najtrudniejszego nierozwiązanego problemu w matematyce (choć specjaliści od Hipotezy Riemanna mogliby dyskutować). To zagadnienie jest tak trudne, że niektórzy uważają, że matematyka nie jest nawet gotowa, by rozwiązać ten problem. Mowa tu o tzw. hipotezie Hodge'a, która stanowi jedno z siedmiu problemów milenijnych, za którego rozwiązanie wyznaczono milion dolarów nagrody. Hipoteza Hodge'a, sformułowana w 1950 roku przez szkockiego matematyka Williama Hodge'a głosi, że na dowolnej nieosobliwej zespolonej algebraicznej rozmaitości rzutowej każda klasa Hodge'a jest wymierną kombinacją liniową cykli algebraicznych. Założenie zawarte w hipotezie Hodge'a, że X jest algebraiczna, nie może być osłabione do X będącego jedynie rozmaitością Kählera (rozmaitość wyposażona w trzy wzajemnie kompatybilne struktury: strukturę zespoloną, strukturę riemannowską i strukturę symplektyczną). Kontrprzykładem jest X będący torusem zespolonym [6], [15].

7 Homologie i Kohomologie

Zasady geometrii i analizy zawodzą w nietypowych przestrzeniach, a stopień, w jakim zawodzą, można wyznaczyć poprzez liczbę dziur w danej przestrzeni. W kontekście geometrii, ten fenomen określa się mianem homologii, natomiast w analizie używa się terminu kohomologia. Zaskakującym odkryciem jest fakt, że obie te teorie mierzą te same dziury. Precyzyjnie zostało to sformułowane w twierdzeniu de Rhama [11], s. 67-73.

Homologia odpowiada na dwa kluczowe pytania: jak definiujemy pojęcie dziury oraz w jaki sposób rozróżniamy różne typy dziur. Homologia osiąga to, obalając następujący mit: za każdym razem, gdy tworzymy pętlę, ta pętla ogranicza pewien obszar w przestrzeni. Jednak ta zasada nie zawsze jest prawdziwa. Przykładowo, na torusie istnieją pętle, które nie ograniczają żadnego obszaru, ponieważ torus sam w sobie posiada właśnie dziurę:



Używając terminu "pętla" mamy na myśli **k-łańcuch**. Innymi słowy, to ciągła mapa od k iloczynów kartezjańskich przedziałów $[0, 1]$ do przestrzeni, którą oznaczmy jako X . Definiujemy brzeg łańcucha c jako k -łańcuch, który ogranicza obszar, przy czym nie jest on sam brzegiem dla innego łańcucha. Aby to ogólnie ująć, korzystamy z narzędzi algebry liniowej, gdzie mamy łańcuchy pierwszego rzędu, drugiego rzędu, trzeciego rzędu i tak dalej. Wszystkie te obiekty stanowią przestrzenie wektorowe, a brzeg jest odwzorowaniem liniowym, które przyporządkowuje 2-łańcuch do 1-łańcucha i tak dalej:

$$\{1 - \text{łańcuch}\} \xleftarrow{\partial} \{2 - \text{łańcuch}\} \xleftarrow{\partial} \{3 - \text{łańcuch}\} \xleftarrow{\partial} \dots$$

Aby zidentyfikować k -wymiarowe dziury, wystarczy skupić się na przestrzeni wektorowej obejmującej wszystkie łańcuchy o zerowym brzegu i wyodrębnić te łańcuchy, które są brzegiem dla innych łańcuchów. Nazywamy to k -tą grupą homologii i symbolicznie oznaczamy tę przestrzeń jako:

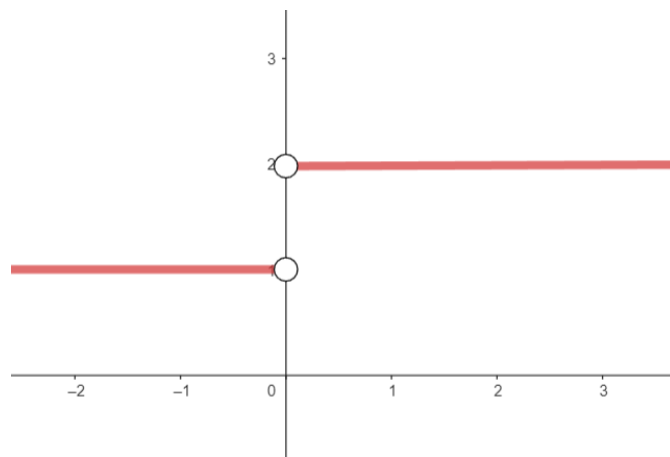
$$\frac{\{c \mid \partial c = 0\}}{\{c \mid \partial c = c\}} = H_k(X).$$

Następnie definiujemy liczbę k -wymiarowych dziur jako wymiar tej przestrzeni:

$$\dim H_k(X) = \#k \text{ wymiarowych dziur w } X,$$

to nowoczesne sformułowanie jest wynikiem pracy geniusza matematycznego Emmy Noether.

Teraz użyjmy innego bardziej nieoczekiwanego narzędzia do liczenia dziur. Kohomologia wykrywa dziury w przestrzeni poprzez badanie funkcji zdefiniowanych w tej przestrzeni, gdy następujący mit kończy się niepowodzeniem: pochodna funkcji jest tożsamościowo równa zero wtedy, gdy rozważana funkcja jest stała. Nic bardziej mylnego. Zdefiniujmy funkcję dla wszystkich liczb rzeczywistych, z wyjątkiem zera. Funkcja ta przyjmuje wartość 1 dla liczb ujemnych, natomiast dla liczb dodatnich przyjmuje wartość 2:



Ta funkcja jest różniczkowalna wszędzie i ma pochodną zero, ale nie jest stała. Spowodowała to dziura, która była w punkcie zero. Kolejne mity: jeśli pole wektorowe ma zerową rotację, to musi być gradientem jakiejś innej funkcji bądź ten, że jeśli dywergencja pola wektorowego wynosi zero to jest ono rotacją jakiegoś innego pola wektorowego. Zatem możemy to potraktować jako testy do znajdowania 0 wymiarowych, 1 wymiarowych i 2 wymiarowych

dziur. Te testy wyglądają inaczej. Mamy tu do czynienia z funkcjami, polami wektorowymi, pochodnymi, gradientami, rotacjami, itd. Na szczęście możemy zamiast funkcji i pól wektorowych zajmować się formami różniczkowymi a zamiast pochodnych i gradientów badać różniczki zewnętrzne. Wadą tych obiektów jest brak wizualnej interpretacji, jednak ich zaletą jest zdolność do uogólniania i klasyfikowania k-wymiarowych dziur. W skrócie dziura jest formą z zerową pochodną, która nie jest pochodną czegokolwiek innego. Formy stanowią przestrzenie wektorowe, a różniczka zewnętrzna odwzorowuje 1-formę na 2-formę i tak dalej:

$$\{1 - \text{forma}\} \xrightarrow{d} \{2 - \text{forma}\} \xrightarrow{d} \{3 - \text{forma}\} \xrightarrow{d} \dots$$

Weźmy przestrzeń wszystkich różniczkowalnych k-form z pochodną zero i wyróżnijmy przy tym k-formy, które są pochodnymi czegoś innego. Nazywamy to k-tą grupą kohomologii i symbolicznie oznaczamy tę przestrzeń jako:

$$\frac{\{\omega \mid d\omega = 0\}}{\{\omega \mid d\eta = \omega\}} = H^k(X).$$

Następnie przypuszczamy, że liczba k-wymiarowych dziur jako wymiar tej przestrzeni (poprzedni mieliśmy to zagwarantowane z definicji). Tak na szczęście jest zgodnie z twierdzeniem de Rhama, które mówi nam, że k-ta grupa homologii jest izomorficzna z k-tą grupą kohomologii a izomorfizm jest określony przez całkę:

$$c \mapsto \omega \mid \int_c \omega = 0,$$

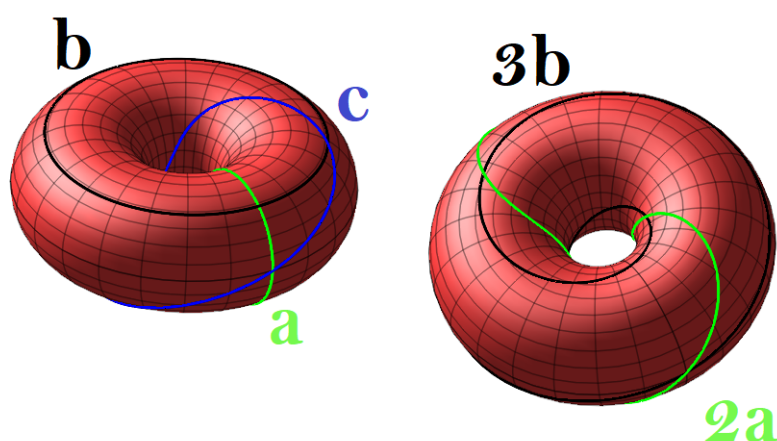
gdzie c oznacza k-łańcuch a ω oznacza k-formę.

7.1 Liczby Bettiego

Liczby Bettiego, także znane jako liczby Bettiego-Eulera, stanowią znaczący element w teorii homologicznej. Noszą nazwę na cześć Enrica Bettiego, wybitnego matematyka działającego w dziedzinie algebry i topologii, który w znaczący sposób przyczynił się do rozwinięcia teorii homologii w pierwszej połowie XX wieku.

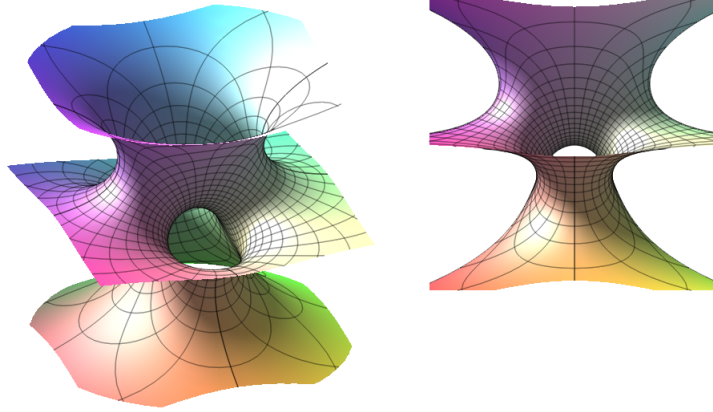
Torus pokazuje, jak wizualizować liczby Bettiego. Możemy stworzyć nieskończoną liczbę niebanalnych pętli na jego powierzchni, które mogą się skręcać, podwajać i owijać wielokrotnie, zanim wrócą do punktu początkowego.

Jednak zamiast tworzyć chaotyczne rozprzężenie, te pętle wykazują elegancką strukturę matematyczną. Nazwijmy pętlę, która przechodzi przez centralny otwór torusa i owija się raz wokół rurki, jako a . Teraz ta pętla stanowi podstawę dla kolejnych pętli. Z uwagi na to, że pętla może owijać się wokół rurki raz, dwukrotnie lub dowolną liczbę razy, z uwzględnieniem kierunku, możemy oznaczyć te pętle jako a , $2a$, $-a$ i tak dalej. Niemniej jednak nie każda pętla jest wielokrotnością a . Na przykład pętla, która owija się wokół centralnego otworu wzdłuż dłuższego obwodu rurki, może być oznaczona jako b . W tym punkcie nie ma już bardziej unikalnych trajektorii: dowolną pętlę na torusie można przekształcić tak, aby "śledziła" pętle a i b pewną całkowitą liczbę razy. To, że istnieją dwie jednowymiarowe pętle, z których można zbudować wszystkie inne, oznacza, że liczba Betti torusa w wymiarze jeden wynosi 2. Jeśli pętla c jest równoważna pętli a połączonej z pętlą b , zapisujemy $c = a + b$. To wyrażenie nie jest tylko wygodą notacyjną. Można uczynić to arytmetyczne działanie dodawania i odejmowania pętli rygorystycznym.

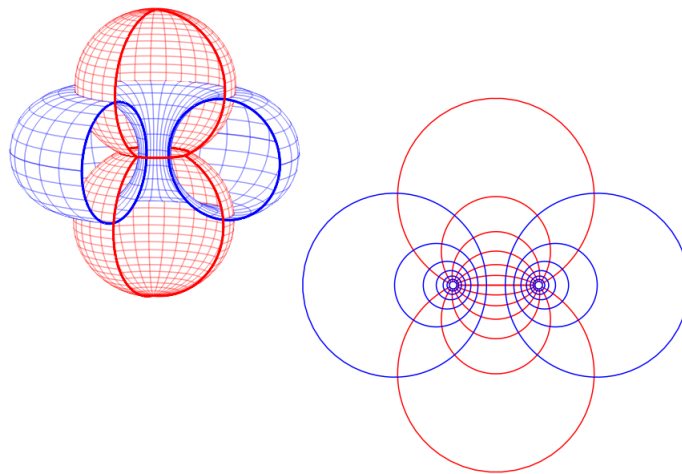


Rysunek 9: Torus ma nieskończenie wiele różnych pętli na swojej powierzchni. Pętle a , b i c są zasadniczo różne, ale pętla c może być zdeformowana tak, aby uzyskać złączenie pętli a i b .

Struktura grupy homologii została odkryta w latach 20. XX wieku przez Emmy Noether, pionierkę badań nad grupami i innymi strukturami algebraicznymi. Dzięki obserwacji Noether matematycy teraz mogą wykorzystać moc, strukturę i twierdzenia algebry do zrozumienia topologii. Na przykład możemy stwierdzić z matematyczną pewnością, że słomka, koszulka i spodnie to wszystkie topologicznie różne obiekty, ponieważ ich grupy homologii są różne. W szczególności mają różną liczbę dziur.



Rysunek 10: Torus z n przekłuciami dla $n \geq 1$ jest homotopijnie równoważny sklejeniu $n + 1$ okręgów. Przedstawiona na ilustracji powierzchnia minimalna Costy jest równoważna topologicznie torusowi z 3 przekłuciami [22]. Hipoteza Hoffmana-Meeksa przewiduje w swoim najprostszym nierozwiązanym przypadku, że nie ma minimalnego, osadzonego torusa o skończonej całkowitej krzywiznie z czterema (lub więcej) przekłuciami [50].

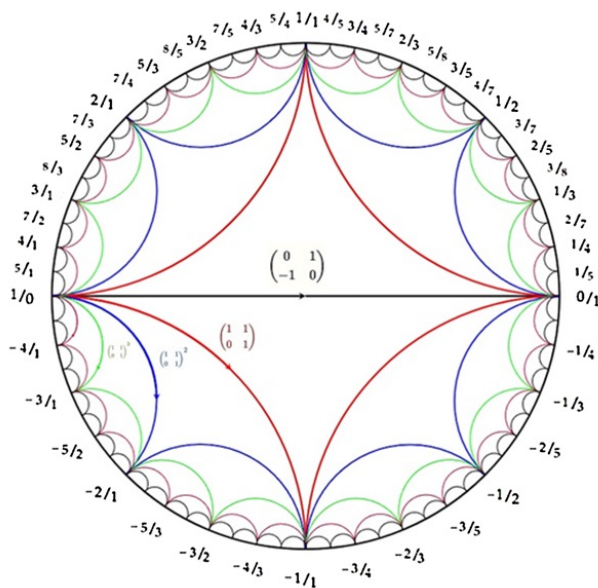


Rysunek 11: Współrzędne toroidalne to układ współrzędnych szczególnie przydatny do opisywania i rozwiązywania problemów związanych z fizyką plazmy, badaniami nad fuzją, elektromagnetyzmem, dynamiką płynów czy mechanice kwantowej. Najczęstszą definicją współrzędnych toroidalnych (τ, σ, ϕ) jest:

$$\left(\frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \phi, \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \phi, \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right)$$

8 Grupy przekształceń odwzorowań

Dla danego zbioru dwóch wektorów w przestrzeni \mathbb{R}^2 , możemy obracać równoległobok tak, aby drugi wektor bazy zawsze był w górnej półpłaszczyźnie. To nie zmienia torusa, na który patrzymy, ani skalowania. Działanie grupy $SL(2, \mathbb{Z})$ na obraz kraty staje się działaniem grupy $SL(2, \mathbb{Z})/SO(2)$, gdzie $SO(2)$ jest grupą rotacji dwuwymiarowych. Pokazana w rozdziale *Torus zespolony* ekwiwalencja równoległoboków, która uwzględnia obroty i skalowanie, pozwala ustawić długość naszego pierwszego wektora bazy na osi rzeczywistej. Możemy następnie jednoznacznie zidentyfikować każdy reprezentant naszej klasy równoważności za pomocą współrzędnych drugiego wektora bazy $\tau = a + bi$. Przestrzeń możliwych współrzędnych τ , które jednoznacznie identyfikują torus w naszej nowej klasie równoważności, to dokładnie przestrzeń Teichmüllera dla torusa. Ale jak to zrozumieć? W definicji przestrzeni Teichmüllera pojawiają się informacje o działaniu grupy przekształceń. Następny podrozdział będzie poświęcony części teoretycznej tego zagadnienia.



Rysunek 12: Ilustracja przedstawiająca działanie grupy przekształceń odwzorowań torusa na grafie Fareya. Zbiór węzłów grafu Fareya to $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, gdzie $\frac{1}{0} = -\frac{1}{0} = \infty$. Dwa węzły $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$. Orientacja strzałki wskazuje, który wierzchołek pozostaje nieruchomy w każdym kroku. Przykładowo macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ odwzorowuje $(\frac{0}{1}, -\frac{1}{0})$ w $(-\frac{1}{1}, -\frac{1}{0})$, macierz $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^2$ odwzorowuje $(-\frac{1}{1}, -\frac{1}{0})$ w $(-\frac{2}{1}, -\frac{1}{0})$, itd.

8.1 Grupy modularne

Niech Γ oznacza grupę macierzy $SL(2, \mathbb{Z})$, w której każda macierz jest identyfikowana z jej wartością ujemną, gdzie:

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

Przez G oznaczymy dowolną podgrupę o indeksie skończonym w Γ . Grupa G jest *dyskretna*, to znaczy nie zawiera nieskończonej sekwencji różnych macierzy, które zbiegają się do macierzy identyczności.

Na potrzeby tej pracy magisterskiej literą Γ będziemy oznaczać grupę modularną, która jest grupą homografii¹⁸:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1. \quad (6)$$

Geometryczna teoria homografii jest niezbędna w naszej pracy. Zajmiemy się tylko homografiami o rzeczywistych współczynnikach i wyznaczniku 1. Nazwijmy grupę takich przekształceń Ω . Element Ω odwzorowuje górną półpłaszczyznę \mathbf{H} na samą siebie i oś rzeczywistą na samą siebie oraz odwrotnie, każda transformacja o tych właściwościach może być zapisana z rzeczywistymi współczynnikami i wyznacznikiem 1, a więc należy do Ω .

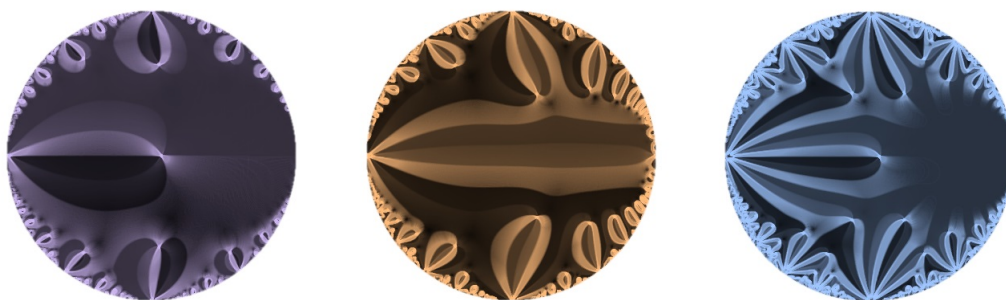
Mówimy, że punkty $a, b \in \mathbf{H}$ są G -równoważne (lub po prostu równoważne, gdy rozumiemy G), jeśli $Va = b$ dla jakiegoś elementu $V \in G$. Przez tę relację równoważności \mathbf{H} jest podzielona na wzajemnie rozłączne klasy równoważności lub orbity:

$$Gz = \{Vz \mid V \in G\}.$$

Pojęcie orbit prowadzi z jednej strony do *obszaru podstawowego*, a z drugiej do *powierzchni Riemanna*. Są to obie realizacje przestrzeni orbitalnej \mathbf{H}/G , zdefiniowanej jako zbiór odrębnych orbit G . \mathbf{H}/G to przestrzeń uzyskana przez zidentyfikowanie punktów w \mathbf{H} , które są G -równoważne.

¹⁸W najbardziej podstawowym ustawieniu a, b, c, d i τ są liczbami zespolonymi (w takim przypadku grupa jest również nazywana grupą transformacji Möbiusa).

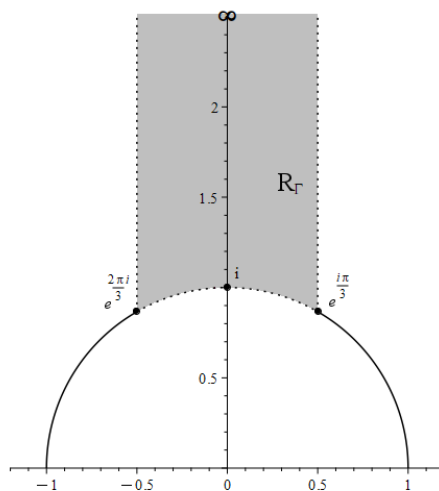
Aby uzyskać przestrzeń orbitalną w \mathbf{H} , wybierzemy po jednym punkcie z każdej orbity i nazwijmy zbiór tych punktów *zbiorem podstawowym* dla \mathbf{G} (względem \mathbf{H}). Ponieważ chcemy mieć do czynienia z ładnymi zbiorami topologicznymi, modyfikujemy nieco to pojęcie i definiujemy obszar podstawowy R_G jako otwarty podzbiór \mathbf{H} , który nie zawiera różnych punktów G -równoważnych, a którego domknięcie zawiera punkt równoważny dla każdego punktu z \mathbf{H} . Istnienie obszarów podstawowych dla naszych interesujących grup można łatwo udowodnić ([30], s. 57). Obszar podstawowy G jest właściwym obszarem (tj. spójny), co nie jest wymagane przez definicję. Oczywiście istnieje wiele obszarów podstawowych. W szczególności, jeśli R jest obszarem podstawowym, to $V(R)$ też nim jest, gdzie $V \in G$. Zbiory regionów $\{V(R) \mid V \in G\}$ tworzą sieć niezachodzących na siebie obszarów, które wraz z ich punktami brzegowymi wypełniają \mathbf{H} . Przykłady tych uderzających konfiguracji geometrycznych można znaleźć w wielu książkach.



Rysunek 13: Formy modularne są istotnym pojęciem w matematyce, zwłaszcza w obszarze teorii liczb i analizy zespolonej. Są to funkcje matematyczne, które wykazują pewne określone właściwości w odniesieniu do grup modularnych. Najprostszymi przykładami z tego punktu widzenia są szeregi Eisensteina:

$$G_k(\tau) = \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(m + n\tau)^k},$$

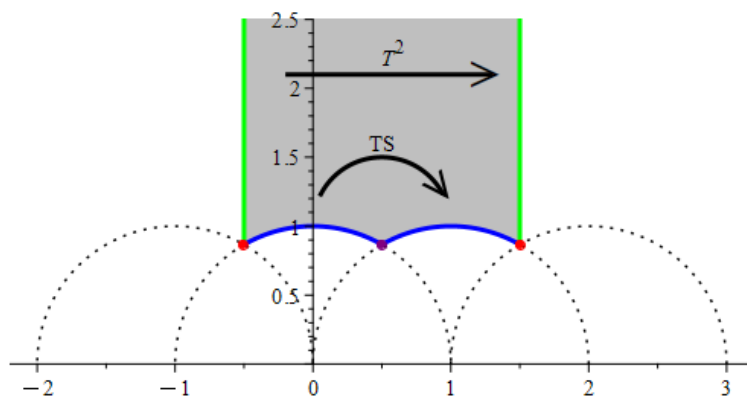
gdzie $\tau \in \mathbf{H}$, k parzyste i większe od dwóch. Na ilustracji powyżej pokazano szeregi dla $k = 2, 3, 6$ (tylko trzeci jest formą modularną). Grafiki zostały zilustrowane za pomocą metody kolorowania dziedzin dla 760 punktów kratowych i poddane dodatkowej obróbce graficznej, aby uzyskać zamierzony efekt wizualny.



Możliwe jest wybranie obszaru podstawowego tak, aby posiadał inne pożądane właściwości. Boki takiego podstawowego obszaru są ułożone w *parach sprzężonych*, przy czym dwa boki pary są równoważne względem elementu grupy. Na przykład, w R_Γ rozważamy łuk koła jako składający się z dwóch boków oddzielonych punktem i . Wówczas pionowe boki są odwzorowywane na siebie przez S , a zakrzywione boki przez T , gdzie:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

są notacjami standardowymi ([30], s. 37). Macierze S oraz T generują grupę przekształceń odwzorowań torusa. Homografia S przekształca punkt τ na zespolonej półpłaszczyźnie w punkt $\tau + 1$. Natomiast przekształcenie T na punkt $-\frac{1}{\tau}$.



8.2 Przestrzeń Teichmüllera

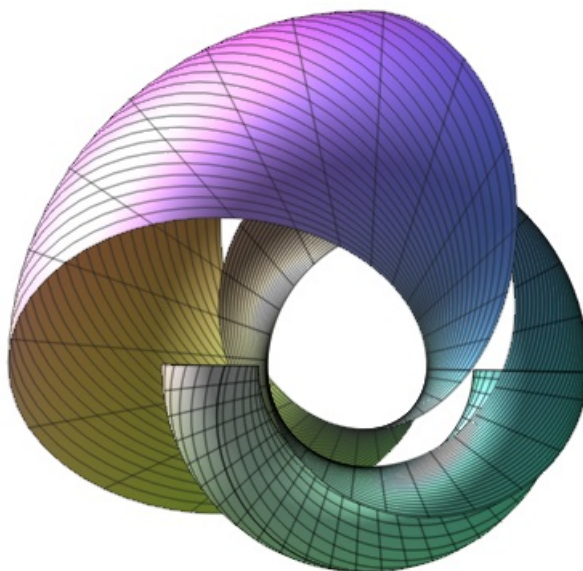
W książce "Znaczenie teorii względności" Einstein napisał [13]:

»Można przedstawić dobre powody, dlaczego rzeczywistość w ogóle nie może być reprezentowana przez ciągłe pole. Zjawiska kwantowe zdają się jednoznacznie sugerować, że skończony układ o skończonej energii można w pełni opisać za pomocą skończonego zbioru liczb (liczb kwantowych). To nie wydaje się być zgodne z teorią ciągłości i musi prowadzić do próby znalezienia czysto algebraicznej teorii opisu rzeczywistości. Ale nikt nie wie, jak zdobyć podstawy takiej teorii.«

Podczas gdy przestrzeń riemannowska ogólnej teorii względności opisuje rzeczywistość w dużych skalach, hipoteza, że przestrzeń Teichmüllera może opisać rzeczywistość w małych skalach, jest bardzo interesująca [49]. Od strony matematycznej przestrzeń Teichmüllera koduje różne sposoby deformacji struktury zespolonej na przestrzeni, co pozwala traktować obiekty jako rodziny tej samej przestrzeni, ale z różnymi strukturami zespolonymi. Geometria tej przestrzeni deformacji dostarcza cennych informacji o pierwotnej przestrzeni. Dla krzywych o genusie g , wymiar przestrzeni Teichmüllera wynosi $3g-3$. Stąd, już patrząc na wymiar, możemy wyczytać topologię krzywej. W rzeczywistości jest to powszechna filozofia w teoriach pola kwantowego, gdzie oblicza się niezmiennicze przestrzenie, sumując po wszystkich możliwych strukturach geometrycznych na przestrzeni (strukturach symplektycznych). Dlatego nawet jeśli interesuje nas wyłącznie topologia przestrzeni, możemy nałożyć na nią pewną strukturę geometryczną i zdeformować ją, aby uzyskać informacje o topologii. Niemniej jednak, aby zachować spójność z tematem tej pracy magisterskiej, skupimy się na aspektach związanych z torusem, omijając szczegóły, które przekraczają zakres naszego zainteresowania.

Oznaczmy $\text{Teich}(T^2)$ jako przestrzeń Teichmüllera dla torusa. Natomiast \mathbb{H}^2 będzie oznaczeniem dla wcześniej wspomnianej przestrzeni hiperbolicznej w rozdziale *Rys historyczny*. Wówczas przestrzeń Teichmüllera dla torusa jest z nią bijektywna. Dowód opiera się na dwóch krokach. Krok 1: Pokazanie izomorfizmu między $\text{Teich}(T^2)$ a kratą w \mathbb{R}^2 z relacją równoważności generowaną przez izometrie euklidesowe i jednokładności. Krok 2: Pokazanie izomorfizmu między \mathbb{H}^2 a wspomnianą już kratą [14].

9 Torus w S^3



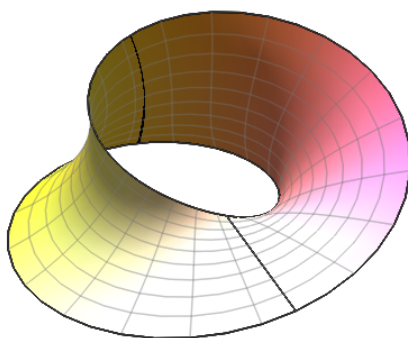
Rozkład Heegaarda trójwymiarowej rozmaitości to dekompozycja rozmaitości na dwie kopie tej samej "prostszej" trójwymiarowej rozmaitości z brzegiem, takiej że sklejenie tych dwóch kopii wzdłuż ich brzegu daje pierwotną rozmaitość [21]. Prowadzi nas to oczywiście do rozkładu S^3 na dwa pełne torusy. Rozwłóknienie Hopfa pomaga w wizualizacji tego procesu, dlatego zaczniemy od wyjaśnienia samego pojęcia rozwłóknienia. Następnie przejdziemy do zdefiniowania pojęcia kwaternionów, żeby móc pod koniec tego rozdziału przedstawić dowód twierdzenia Pinkalla, który jest ściśle powiązany z torusami w S^3 .

9.1 Nakrycie oraz rozwłóknienie

Przestrzenie nakrywające naturalnie pojawiają się przy metodzie rozszerzania dziedziny danej funkcji analitycznej. Przykładem jest funkcja pierwiastka kwadratowego, którą można definiować tylko lokalnie na różnych otwartych zbiorach w przestrzeni liczb zespolonych bez zera. Rozwiązaniem jest zdefiniowanie tej funkcji na podwójnym nakryciu przestrzeni, gdzie istnieją dwie warstwy odpowiadające dwóm wartościom pierwiastka [23].

Definicja 9.1 (Nakrycie). *Ciągła surjekcja $\pi : Y \rightarrow X$, taka że dla każdego $x \in X$ istnieje przestrzeń dyskretna A oraz otoczenie $x \in U$, dla którego przeciwobraz otoczenia U w odwzorowaniu π , tj. $\pi^{-1}(U)$, oraz $U \times A$ są homeomorficzne.*

Rozwłóknienie (fibracja) jest fundamentalnym pojęciem w dziedzinie topologii algebraicznej, która skupia się na badaniu przestrzeni topologicznych i ich właściwości za pomocą metod algebraicznych. Stanowi most między topologią a algebrą, ułatwiając badanie skomplikowanych przestrzeni topologicznych poprzez pryzmat bardziej dostępnych struktur algebraicznych.



Zakładając, że mamy dane dwie przestrzenie X i Y . Rozwłóknienie o **bazie** X , **włóknie** Y i **przestrzeni całkowitej** Z jest definiowane za pomocą atlasu U_α dla X . Przestrzeń całkowita jest zasadniczo zdefiniowana przez podanie atlasu dla Z , gdzie każdy zbiór wygląda jak $U_\alpha \times Z$ w sposób spójny podczas przechodzenia z jednego zbioru do kolejnego. Odwzorowanie π , które nazywane jest **rozwłóknieniem**, to odwzorowanie z Z do X , które przypisuje punkt reprezentowany na zbiorze $U_\alpha \times X$ przez parę (x, y) do punktu x . Dla każdego $x \in X$, w przestrzeni Z znajduje się kopia Y dana przez $\{x\} \times Y$. Nazywamy to włóknem nad x . Dla dowolnej pary przestrzeni możemy zdefiniować trywialną fibrację, gdzie $Z = X \times Y$, i potrzebujemy tylko jednego zbioru otwartego w naszym atlasie, aby opisać to rozwłóknienie. Zauważmy, że nakrycie jest w szczególności rozwłóknieniem. Wstęga Möbiusa (pokazana na ilustracji powyżej) jest najprostszym przykładem nietrywialnej fibracji.

9.2 Kwanterniony

Na ziemi nie ma nic wielkiego poza człowiekiem,
w człowieku nie ma nic wielkiego poza umysłem.
William Rowan Hamilton

Pytanie, czy można wyposażyć \mathbb{R}^3 w strukturę ciała w taki sposób, aby dodawanie i mnożenie jego elementów prosto opisywało wszystkie możliwe rotacje tej przestrzeni, znalazło odpowiedź w połowie XIX wieku dzięki Williamowi Rowanowi Hamiltonowi i wynalezieniu kwaternionów.

Algebrę kwaternionów oznacza się symbolem \mathbb{H} i jako zbiór traktuje się tożsamym z \mathbb{R}^4 . Wektor (a, b, c, d) można zapisywać w postaci $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, gdzie trzy wyróżnione wektory $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ to odpowiednio \mathbf{i} , \mathbf{j} oraz \mathbf{k} . Wektor $(1, 0, 0, 0)$ będziemy oznaczać jako $\mathbf{1}$. Zasady mnożenia są ujęte w następujących relacjach:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

Zauważmy, że elementy \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} nie komutują. Odwrócenie kolejności z lewej na prawą zmienia znak iloczynu:

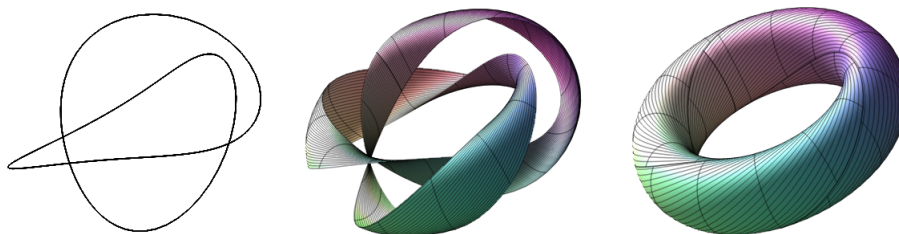
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Tak jak w przypadku liczb zespolonych, sprzężenie kwaternionu $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ oznaczamy jako \bar{q} i definiujemy jako $\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Natomiast długość kwaternionu oznaczamy jako $|q|$, która wynosi $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Każdy niezerowy kwaternion ma element odwrotny postaci $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$.

Określmy w jaki sposób kwaternion q determinuje endomorfizm w \mathbb{R}^3 . Dla punktu $p = (x, y, z)$ utożsamiamy kwaternion $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (mówimy wtedy o czysto urojonym kwaternionie), który również będziemy nazywać p . Wtedy szukanym odwzorowaniem liniowym określającym nasz endomorfizm jest iloczyn qpq^{-1} , który wynosi $x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, a więc również może być traktowany jako punkt w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Dla niezerowego kwaternionu podane odwzorowanie okazuje się być rotacją na \mathbb{R}^3 .

9.3 Rozwłóknienie Hopfa

Hipersfera 3-wymiarowa dopuszcza rozwłóknienie na okręgi, tzn. istnieje odwzorowanie $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ takie, że dla każdego punktu $p \in S^2$ istnieje otoczenie $U \subset S^2$ takie, że jego przeciwobraz $\pi^{-1}(U)$ wygląda jak iloczyn kartezjański $U \times S^1$. W szczególności, dla każdego punktu p włókno $\pi^{-1}(\{p\})$ jest po prostu okręgiem. Warto tutaj odnotować, że S^3 może być rozwłóknione na inne węzły (okrąg jest w szczególności węzłem, który jest rozsupłany), przykładem jest trójlistnik biorący się z odwzorowania Milnora [7], [34]:



Teraz rozważamy hipersferę 3-wymiarową S^3 osadzoną w \mathbb{H} , co oznacza $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ oraz utożsamiamy \mathbb{R}^3 z czysto urojonymi kwaternionami. Hipersfera 2-wymiarowa jest wtedy przecięciem S^3 z \mathbb{R}^3 a **rozwłóknienie Hopfa** $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ dane jest przez¹⁹:

$$q \mapsto q\mathbf{i}\bar{q}. \quad (8)$$

Innymi słowy, odwzorowanie to przekształca kwaternion w punkt, do którego obraca wektor \mathbf{i} . W szczególności jest jasne, że obrazem tego odwzorowania jest cała 2-wymiarowa hipersfera. Podobnie, przeciwobraz punktu p to zbiór wszystkich rotacji, które obracają \mathbf{i} do punktu p . **Odwzorowanie Hopfa** możemy również zadać jako:

$$\pi(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)). \quad (9)$$

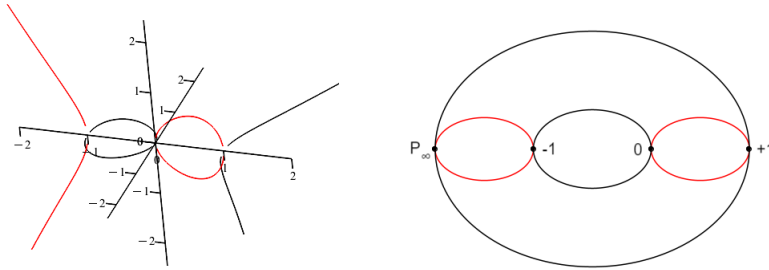
Obie postaci (8) oraz (9) są równoważne. W dalszej części pracy będziemy używać tych dwóch terminów zamiennie, nazywając rozwłóknienie Hopfa również odwzorowaniem Hopfa.

¹⁹Możemy rozważać lewo- i prawoskrętne rozwłóknienia Hopfa.

Przykład

Rozważmy punkt $p = (1, 0, 0)$ na S^2 . Możemy łatwo sprawdzić, że zbiór punktów $K = \{(\cos(t), \sin(t), 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ na S^3 jest odwzorowany na p przez odwzorowanie Hopfa. W rzeczywistości zbiór K stanowi cały zbiór punktów, które są odwzorowane na $(1, 0, 0)$ za pomocą π . Innymi słowy, K jest przeciwobrazem $\pi^{-1}(\{p\})$.

9.3.1 Rozwłóknienie Hopfa - sfera Riemanna



Rozpoczynając opis rozwłóknienia Hopfa, tym razem patrzymy na S^3 zawartą w \mathbb{C}^2 :

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Teraz rozważmy stosunek $\frac{w}{z}$. Jest to liczba zespolona, chyba że $z = 0$. Jednak w tym przypadku sferę można traktować jako zespoloną przestrzeń rzutową²⁰ $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, stąd możemy ustalić $\frac{w}{0} = \infty$, co daje nam odwzorowanie:

$$f : S^3 \rightarrow S^2, \quad (z, w) \mapsto \frac{w}{z},$$

będące rozwłóknieniem Hopfa. Odwzorowanie Hopfa jest zdefiniowana poprzez użycie mnożenia liczb zespolonych:

$$f(z, w) = (2\bar{z}w, |z|^2 - |w|^2).$$

²⁰Na ilustracji został przedstawiony wykres funkcji $y^2 = x(x^2 - 1)$, gdzie x oraz y są zespolone. W przestrzeni rzutowej ten wykres to topologiczny torus [26].

9.4 Cylinder Hopfa

Dla $q_0 \in \pi^{-1}(\{p\})$, $\pi^{-1}(\{p\}) = \{q_0 e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = q_0 S^1$, gdzie:

$$S^1 = \{x + iy \in \mathbb{H} \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

włóknami są okręgi wielkie w S^3 . Załóżmy, że $\eta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^3$ jest krzywą będącą włóknem nad punktem $p \in S^3$, to jest $\pi(\eta(t)) = p$ dla każdego $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ takie, że $\eta(0) = q_0$. Wtedy podana krzywa jest postaci:

$$\eta(t) = q_0 e^{i\alpha(t)},$$

gdzie α to funkcja przyjmująca wartości rzeczywiste taka, że $\alpha(0) = 0$. Licząc pochodną w punkcie $t = 0$:

$$\eta'(0) = q_0 (e^{i\alpha})'(0) = q_0 i\alpha'(0).$$

Dla każdego styczego wektora $x \in T_{q_0} S^3$ istnieje krzywa $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^3$ taka, że $\gamma(0) = q_0$ oraz $\gamma'(0) = x$. Z reguły łańcuchowej otrzymujemy:

$$d_{q_0} \pi(x) = (\pi \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0) \overline{i\gamma(0)} + \overline{\gamma'(0)} i\gamma(0) = x i \overline{q_0} + q_0 i x.$$

Spójrzmy na te pochodną dla kwaternionu $q_0 = \mathbf{1}$. Wtedy $x \in \text{span}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. W szczególności, takie x antykomutują z \mathbf{i} , zatem:

$$d_{\mathbf{1}} \pi(x) = x \mathbf{i} + \mathbf{i} x = x \mathbf{i} + x \mathbf{i} = 2x \mathbf{i}.$$

Weźmy teraz dowolny kwaternion q_0 i zdefiniujmy $\tilde{\gamma} := \overline{q_0} \gamma$ (bądź równoważnie $\gamma = q_0 \tilde{\gamma}$). Wtedy $\tilde{\gamma}$ jest krzywą w S^3 przechodzącą przez punkt $\mathbf{1}$. Teraz:

$$\pi \circ \gamma = \gamma i \tilde{\gamma} = q_0 (\pi \circ \tilde{\gamma}) \overline{q_0},$$

dla $\tilde{x} := \tilde{\gamma}'(0) = \overline{q_0} \gamma'(0) = \overline{q_0} x$ otrzymujemy:

$$d_{q_0} \pi(x) = (\pi \circ \gamma)'(0) = q_0 (\pi \circ \tilde{\gamma})'(0) \overline{q_0} = q_0 d_{\mathbf{1}} \pi(\tilde{x}) \overline{q_0}.$$

W szczególności $\tilde{x} \in \text{span}\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, zatem:

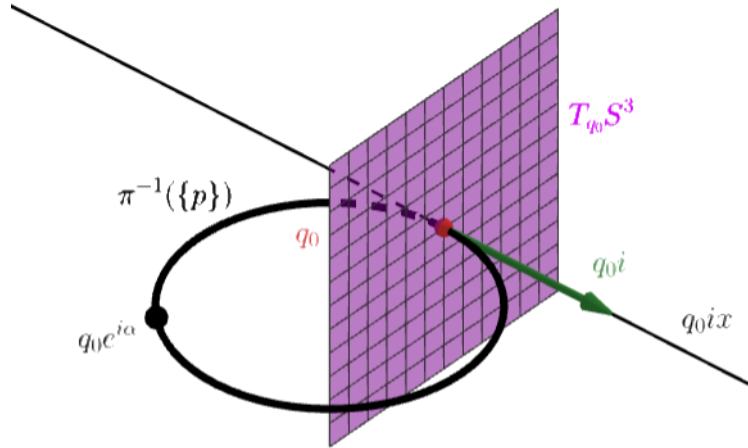
$$d_{q_0} \pi(x) = q_0 d_{\mathbf{1}} \pi(\tilde{x}) \overline{q_0} = q_0 2\tilde{x} i \overline{q_0} = 2x i \overline{q_0}. \quad (10)$$

Z tego, że kwaterniony o jednostkowej długości są izometriami przestrzeni \mathbb{H} dla $x, y \in \mathbb{H}$ oraz $q \in S^3$, otrzymujemy:

$$\langle qx, qy \rangle = \langle x, y \rangle = \langle xq, yq \rangle. \quad (11)$$

Zatem z (10) oraz (11) pochodna ograniczona do przestrzeni stycznej zachowuje metrykę²¹:

$$\langle d_{q_0}\pi(x), d_{q_0}\pi(y) \rangle = 4\langle x, y \rangle. \quad (12)$$



Teraz, jeśli $\gamma : [0, L] \rightarrow S^2$, $|\gamma'| = 1$, to przeciwobraz tej krzywej jest rodziną wielkich okręgów w S^3 , co można zinterpretować jako cylinder. Mając podniesienie η_0 krzywej γ to jest krzywą $\eta_0 : [0, L] \rightarrow S^3$ taką, że $\gamma = \pi \circ \eta_0$, cylinder może być sparametryzowany w następujący sposób:

$$\mathfrak{X}_0 : [0, L] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^3, \quad (t, \alpha) \mapsto \eta_0(t)e^{i\alpha}.$$

Nie jest trudno zauważyć, że każde inne podniesienie η krzywej γ jest postaci:

$$\eta = \eta_0 g,$$

gdzie $g : [0, L] \rightarrow S^1$. Takie η definiuje zatem inną parametryzację powiedzmy, że \mathfrak{X} . Naszym celem jest uzyskanie izometrycznego zanurzenia to znaczy:

$$\left| \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \alpha} \right| = 1, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \perp \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \alpha}.$$

²¹W algebrze liniowej uczymy się o odwzorowaniach liniowych i jest to proste dowiedzenie, że zbiór wszystkich odwzorowań liniowych stanowi sam w sobie przestrzeń wektorową nad tym samym ciałem. Zatem licząc podane wcześniej pochodne mamy na myśli kowariantną pochodną pola wektorowego, która jest zdefiniowana tylko dla pól wektorowych stycznych do (pod)rozmaitości. W naszym przypadku pole wektorowe jest dalekie od stycznego, ponieważ jest normalne. Ale "ograniczona" pochodna kowariantna - dla pola wektorowego stycznego do podrozmaitości - jest obliczana poprzez pobranie pochodnej kowariantnej w przestrzeni otoczenia, a następnie rzutowanie na przestrzeń styczną podrozmaitości.

Obliczmy pochodną \mathfrak{X} względem α :

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \alpha} = \eta_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{i\alpha} = \eta_0 e^{i\alpha} \mathbf{i}.$$

W ten sposób, z konstrukcji wynika, że zawsze mamy:

$$\left| \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \alpha} \right| = |\eta_0| = 1.$$

Pochodna względem t jest praktycznie równa pochodnej podniesienia η :

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \eta'(t) e^{i\alpha}.$$

Widzimy, że $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \perp \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial \eta}{\partial t}(t) \in T_{\eta(t)} S^3$. Takie podniesienie jest nazywane **podniesieniem horyzontalnym**. Zatem mając takie podniesienie horyzontalne η oraz korzystając z (12), otrzymujemy:

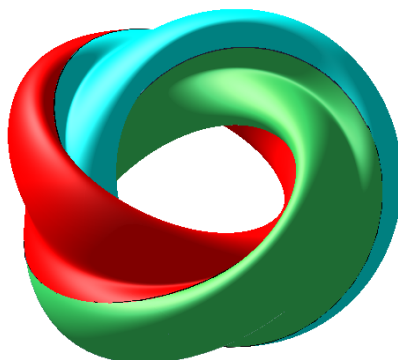
$$|\eta'| = \frac{1}{2} |d_\eta \pi(\eta')| = \frac{1}{2} |(\pi \circ \eta)'| = \frac{1}{2} |\gamma'|.$$

Podany wynik można "naprawić" poprzez zmianę parametru t . Prowadzi nas do tego, że mając krzywą $\gamma : [0, \frac{L}{2}] \rightarrow S^2$ taką, że $|\gamma'| = 2$ oraz mając podniesienie horyzontalne η idące w S^3 , odwzorowanie:

$$\mathfrak{X} : [0, \frac{L}{2}] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^3, \quad (t, \alpha) \mapsto \eta(t) e^{i\alpha}, \quad (13)$$

jest izometryczną parametryzacją, którą od tej pory będziemy nazywać **cy-lindrem Hopfa** zadanego przez γ .

9.5 Torus Hopfa



Założmy, że $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ jest okresowa. Wtedy przeciwobraz tworzy torus zamiast cylindra, zwany dalej **torusem Hopfa**. Przy założeniu, że $|\gamma'| = 2$ parametryzacja z (13) nadal daje izometryczne zanurzenie. Jednak zanurzenie to nie musi być okresowe względem t . Rozważmy podniesienie horyzontalne η . Jeśli $\frac{L}{2} \in \mathbb{R}$ oznacza okres funkcji γ , czyli $\gamma(t + \frac{L}{2}) = \gamma(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to mamy:

$$\pi(\eta(0)) = \gamma(0) = \gamma\left(\frac{L}{2}\right) = \pi\left(\eta\left(\frac{L}{2}\right)\right).$$

Zatem oba $\eta(0)$ oraz $\eta(\frac{L}{2})$ są we włóknie nad punktem $\gamma(0)$, czyli istnieje $r \in S^1$ takie, że:

$$\eta\left(\frac{L}{2}\right) = \eta(0)r.$$

Ale nie ma powodu, aby r było równe $\mathbf{1}$.

Niech $\delta \in [-\pi, \pi)$ taka, że $r = e^{i\delta}$ oraz dodatkowo potraktujmy \mathfrak{X} jako rozmaitość Riemanna pokrywającą (t, α) -płaszczyznę zanurzony torus w S^3 . Cała grupa transformacji pokrycia jest generowana przez translacje w kierunku $(2\pi, 0)$ oraz $(\delta, \frac{L}{2})$. Zauważmy, że linie równoległe do osi α są odwzorowane przez \mathfrak{X} na włókno π , natomiast linie równoległe do osi t są odwzorowane przez \mathfrak{X} na krzywą η .

Niech krzywizna geodezyjna γ wynosi κ . Wtedy na podstawie twierdzenia Gaussa-Boneta na stronie 51 w [44]:

$$\int_{\gamma} \kappa ds = \iint_c \omega, \quad (14)$$

gdzie ω to forma krzywizny Gaussa (dla nas forma powierzchniowa, 2-forma).

Następnie korzystając z twierdzenia na stronie 191 w [39], które może być łatwo dostosowane do uzyskania tego, że forma krzywizny wiązki okręgu mierzy "niebliskie" podniesienia zamkniętych krzywych, co w naszym przypadku oznacza:

$$\delta = \iint_c \omega. \quad (15)$$

Dalej przypomnijmy, że obszar ograniczony przez krzywą jest równy całce z formy powierzchniowej po 2-łańcuchu, którego brzegiem jest ta krzywa. Możemy to zapisać jako:

$$A = \int_c dV. \quad (16)$$

Zatem dla krzywej γ , podany wzór określa, że obszar ograniczony przez tę krzywą wynosi A i jest równy całce kanonicznej formy objętościowej dV po dowolnym 2-łańcuchu c na S^2 , dla którego $\partial c = \gamma$ oraz $\int_c dV \in [-2\pi, 2\pi)$.

Korzystając z (14), (15), (16) oraz z twierdzenia, które głosi, że całka krzywizny geodezyjnej zamkniętej, współorientowalnej krzywej zanurzonej w S^2 , jest równa polu jej charakterystycznego 2-łańcucha (strona 5, [44]):

$$\delta = \frac{A}{2}.$$

Podsumowując dotychczasowe rozważania, udowodniliśmy, że dla γ będącej zamkniętą krzywą na powierzchni S^2 o długości L , która otacza zorientowany obszar A , jej odpowiadający torus Hopfa jest izometryczny z \mathbb{R}^2/Λ , gdzie krata Λ jest generowana przez wektory $(2\pi, 0)$ i $(\frac{A}{2}, \frac{L}{2})$.

9.6 Twierdzenie Pinkalla

W oparciu o dotychczasowe rozważania będziemy w stanie udowodnić twierdzenie Pinkalla:

Twierdzenie 9.2. *Każda zwarta powierzchnia Riemanna o genusie jeden może być zanurzona konforemnie w sferze jednostkowej $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ jako płaski torus. Zanurzenie można wybrać jako przecięcie S^3 z hiperpowierzchnią czwartego stopnia w \mathbb{R}^4 .*

Jednak na początek skupmy się na udowodnieniu, że dowolna zwarta powierzchnia Riemanna o genusie 1 jest równoważna torusowi \mathbb{C}/Λ , gdzie Λ oznacza kratę na płaszczyźnie zespolonej:

Twierdzenie 9.3. *Istnieje nietrywialna, holomorphyzna jednoforma η na powierzchni X , gdzie X oznacza powierzchnię Riemanna o genusie 1.*

Dowód.

Jeżeli założymy, że forma η zanika (jest zerem) w pewnym punkcie p_1 , to możemy wybrać punkt p_2 różny od p_1 oraz funkcję meromorphyzną F mającą proste bieguny w punktach p_1 i p_2 oraz będącą holomorphyzną w innych miejscach dziedziny²². Wówczas meromorphyzna forma $F\eta$ miałaby pojedynczy biegun w punkcie p_2 i byłaby holomorphyzna w innych punktach. To jednak stoi w sprzeczności z twierdzeniem o resztach (suma reszt meromorphyznej jednoformy na zwartej powierzchni Riemanna wynosi zero [11], str. 76). Zatem dochodzimy do wniosku, że każda holomorphyzna forma różniczkowa nie może zanikać w żadnym punkcie.

□

Zgodnie z twierdzeniem [11], str. 84, możemy stwierdzić, że powierzchnia X jest izomorphyzna z torusem \mathbb{C}/Λ . Na tej podstawie oraz z poprzednich podrozdziałów wynika pierwsza z dwóch tez w twierdzeniu (9.1).

²²Zgodnie z propozycją z pracy [11], str. 113, dla dwóch różnych punktów p_1 i p_2 na X , istnieje funkcja meromorphyzna $F : X \rightarrow S^1$ taka, że $F^{-1}(\infty) = \{p_1, p_2\}$ i p_1 oraz p_2 są biegunami rzędu 1 (prostymi).

Po zakończeniu tego dowodu, jesteśmy w stanie zademonstrować, że możliwe jest osiągnięcie różnorodnych struktur zespolonych na $\pi^{-1}(\gamma)$ poprzez odpowiedni wybór krzywej γ , która jest zdefiniowana na przestrzeni S^2 i ma stopień mniejszy lub równy cztery. Tutaj $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ oznacza oczywiście rozwłóknienie Hopfa.

Zmiana orientacji na krzywej γ zmienia znak wartości A . Możemy więc założyć, że $0 \leq A \leq 2\pi$. Ostatnim dodatkowym ograniczeniem dla pary (A, L) , która jednoznacznie określa torus Hopfa, jest nierówność:

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A - A^2 &\geq 0, \\ \left(\frac{A}{2} - \pi\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 &\geq \pi^2, \end{aligned} \tag{17}$$

wynikająca z izoperymetrycznej nierówności na sferze. Następnie wyróżniamy dwie sytuacje:

Jeśli omawiana struktura zespolona odpowiada kracie prostokątnej, wtedy możemy wybrać krzywą γ jako odpowiedni okrąg na S^2 . W tym przypadku mamy równość w nierówności (17).

W przypadku, gdy struktura zespolona nie przyjmuje postaci prostokątnej (przykładowo parkietaż z trójkątów równobocznych), wybieramy odpowiadający jej punkt (A, L) w obszarze $U \in \mathbb{R}^2$, określonym przez nierówności:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{A}{2} < 2\pi, \\ \sqrt{\pi^2 - \left(\frac{A}{2} - \pi\right)^2} < \frac{L}{2} < 2\sqrt{\pi^2 - \left(\frac{A}{2} - \pi\right)^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

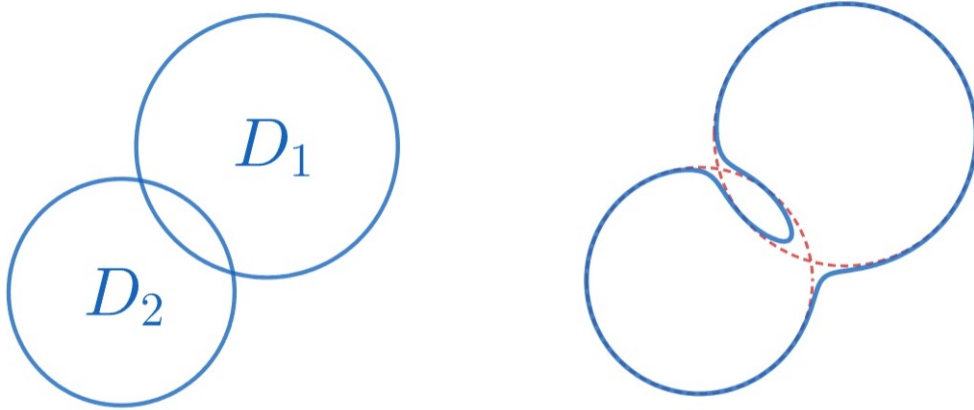
Ten wybór jest możliwy, ponieważ U zawiera niemal cały obszar podstawowy grupy modularnej. Brak tylko punktów na okręgu $\frac{L}{2} = \sqrt{\pi^2 - \left(\frac{A}{2} - \pi\right)^2}$, które odpowiadają jednak kratom prostokątnym.

Ostatecznie nie może nikt z rzeczy,
wliczając w to książki,
wysłyszeć więcej niż wie.
Friedrich Nietzsche

Niech D_1 będzie dyskiem na S^2 o polu powierzchni A , a długość jego brzegu niech wynosi L_1 . Z równania (18) mamy:

$$\begin{aligned} L_1 &< L < 2L_1, \\ 0 &< L - L_1 < L_1. \end{aligned}$$

Niech D_2 będzie dyskiem na S^2 takim, że $\partial D_2 = L_2 = L - L_1$ oraz powierzchnia części wspólnej D_1 i D_2 wynosi połowę powierzchni D_2 .

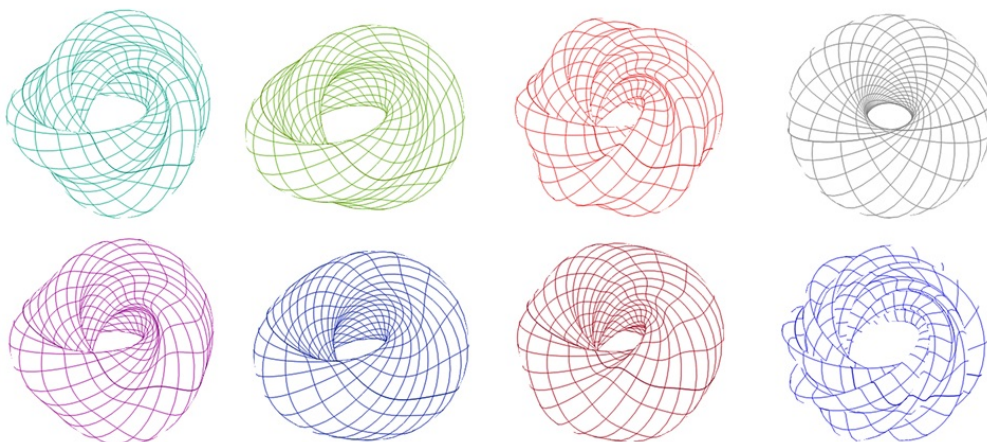


Suma brzegów D_1 oraz D_2 może być traktowana jako zredukowana krzywa czwartego stopnia. Na ilustracji powyżej widzimy, że podaną krzywą można nieznacznie zaburzyć tak, aby uzyskać nieosobliwą i spójną krzywą czwartego stopnia γ , której długość \tilde{L} i pole powierzchni \tilde{A} są przybliżone wartościami L i A . Można parametryzować tę perturbację za pomocą parametru ϵ spełniającego $0 \leq \epsilon < 1$, tak że \tilde{L} i \tilde{A} zależą w sposób ciągły od L , A i ϵ . Funkcja:

$$f = (\tilde{L}, \tilde{A}) : U \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (19)$$

otrzymana w ten sposób spełnia warunek $f(x, 0) = x$ dla wszystkich x należących do U . Wtedy dla każdego $x \in U$ istnieje para (y, ϵ) należąca do $U \times (0, 1)$ taka, że $f(y, \epsilon) = x$. To zapewnia nam nieosobliwą spójną krzywą kwartyczną na S^2 o zadanym polu powierzchni i długości (A, L) należącym do U , kończąc tym samym dowód twierdzenia Pinkalla.

10 Torus Hopfa - wizualizacja



Podjęcie Pinkalla łączy mnożenie kwaternionów na S^3 , parametryzację długości krzywej na S^2 , wybór podniesienia krzywej, który jest ortogonalny do włókien Hopfa, oraz obliczenie powierzchni poprzez całkowanie formy krzywizny na wiązce kołowej. W celu zwizualizowania torusów Hopfa najlepiej jest przyjąć kartezjański układ współrzędnych, dowolną parametryzację bazowej krzywej, konkretne podniesienie niekoniecznie ortogonalne do włókien oraz jawną postać na policzenie powierzchni.

Jedną ogólną parametryzację płaskiego torusa na jednostkowej 3-sferze w czterech wymiarach to:

$$Z(\alpha, \beta, \gamma) = [\cos \alpha \cos \gamma, \sin \alpha \cos \gamma, \cos \beta \sin \gamma, \sin \beta \sin \gamma], \quad (20)$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ oraz $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$. Reprezentuje to sferę jednostkową, ponieważ suma kwadratów czterech współrzędnych wynosi jeden:

$$(\cos \alpha \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha \cos \gamma)^2 + (\cos \beta \sin \gamma)^2 + (\sin \beta \sin \gamma)^2 = 1. \quad (21)$$

Jednym ze sposobów pokazania, że jest płaska geometrycznie, to zsumowanie kwadratów różniczek czterech współrzędnych ze stałą γ :

$$\begin{aligned} & (\cos \gamma d \cos \alpha)^2 + (\cos \gamma d \sin \alpha)^2 + (\sin \gamma d \cos \beta)^2 + (\sin \gamma d \sin \beta)^2 = \\ & = \cos^2 \gamma d\alpha^2 + \sin^2 \gamma d\beta^2 = dA^2 + dB^2, \end{aligned} \quad (22)$$

tworząc w ten sposób płaską metrykę po przeskalowaniu zmiennych parametryzacji.

Podane przez nas modele komputerowe wykorzystują nieco inną parametryzację. Dwie zmienne są zastępowane ich sumą i różnicą:

$$H(u, v) = [\cos(u + v) \cos \gamma, \sin(u + v) \cos \gamma, \cos(u - v) \sin \gamma, \sin(u - v) \sin \gamma],$$

gdzie $0 \leq u \leq 2\pi$ i $0 \leq v \leq \pi$. Następnie wybiera się trzeci parametr, aby przyjąć *ścieżkę oscylacyjną* w jednej ze zmiennych:

$$\gamma = a + b \sin 2nv, \quad (23)$$

tworząc strukturę końcowej powierzchni. Aby zwizualizować powierzchnię, należy ją rzutować z czterowymiarowej przestrzeni do naszych trzech wymiarów. Jednym ze sposobów na to jest typowa projekcja stereograficzna:

$$\left[\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right], \quad (24)$$

ale zmodyfikowana projekcja stereograficzna:

$$[rx, ry, rz], \quad r = \frac{\arccos w}{\pi \sqrt{1-w^2}}, \quad (25)$$

generuje wynik, który pozostaje mniej więcej takiego samego rozmiaru, gdy zmieniają się parametry. Wszystkie te elementy są niezbędne w procesie uzyskiwania pożądanego obrazu.

Krzywe, na których przeprowadza się rozwłóknienie, można również łatwo zobrazować. Mogą być one zidentyfikowane za pomocą odwzorowania Hopfa:

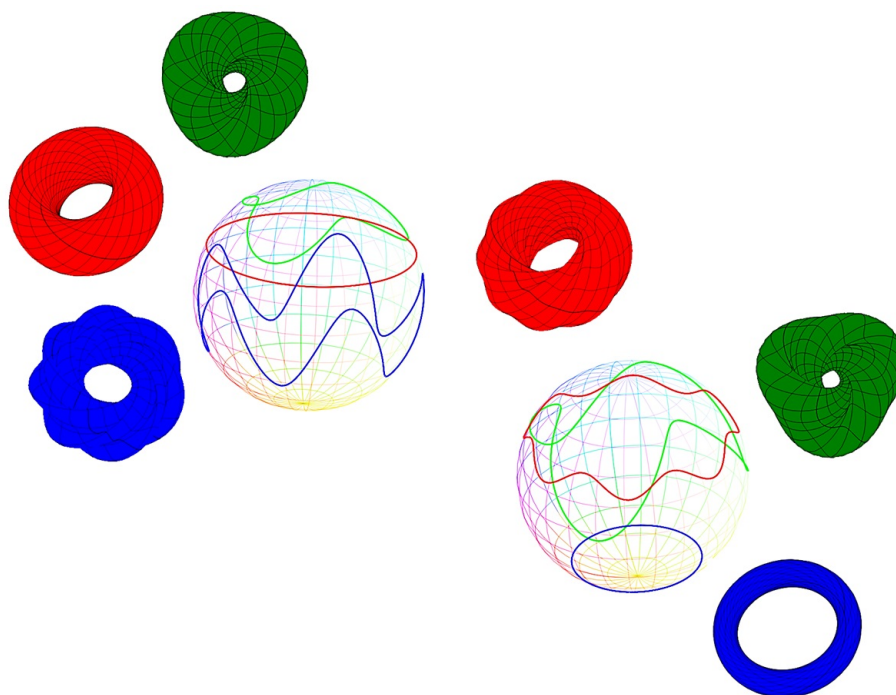
$$[x, y, z, w] \rightarrow [2(xz + wy), 2(yz - wx), w^2 + z^2 - x^2 - y^2]. \quad (26)$$

W przypadku naszej parametryzacji:

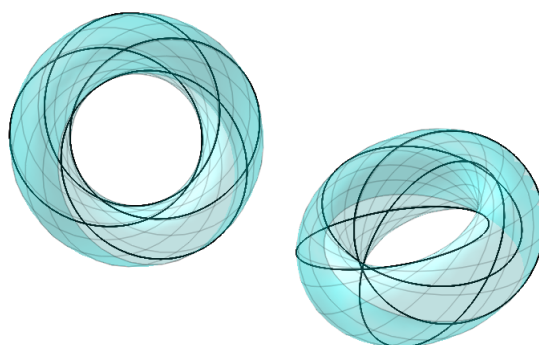
$$[\sin 2\gamma \cos 2v, \sin 2\gamma \sin 2v, -\cos 2\gamma], \quad (27)$$

która zasadniczo opisuje położenie punktów oraz w konsekwencji krzywych na jednostkowej dwuwymiarowej sferze w trzech wymiarach. Pokazuje to wyraźnie, dlaczego dziedzina v rozciąga się tylko na π , a także dlaczego trzeci parametr γ jest zależny od v .

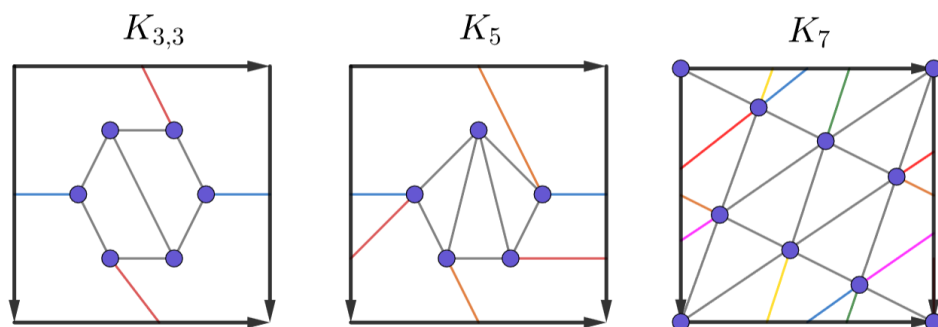
Na następnej stronie znajduje się grafika, gdzie punkty na 2-sferze odpowiadają poszczególnym okręgom, a pełna krzywa tworzy cały torus Hopfa. Poprzez odpowiednie dostosowanie parametrów w ścieżce oscylacyjnej, krzywa staje się bardziej "falista", co w konsekwencji nadaje torusowi bardziej "poskręcany" wygląd.



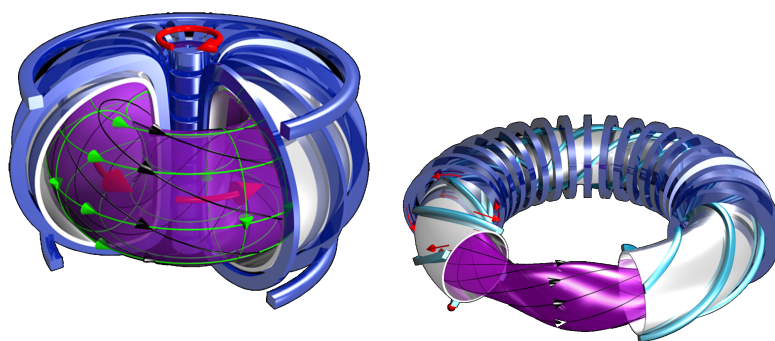
Innym sposobem wizualizacji tych torusów jest narysowanie powierzchni z niską przezroczystością i uwzględnienie okręgów w równych odstępach. Pomysł został zainspirowany ilustracjami w odnośniku [37].



Choć staje się to bardziej chaotyczne w przypadku torusów z wieloma skrętami, to jednak podkreśla, jak wiele szczegółów ukrytych jest w samej istocie tej figury. W przypadku torusa o niewielkiej liczbie skrętów, można dość wyraźnie dostrzec wzajemne powiązania między okręgami, co jest spodziewane w kontekście rozwłóknienia Hopfa.



Rysunek 14: Współcześnie grafy są wyjątkowo skutecznym narzędziem do modelowania związków i relacji między różnymi obiektami. Istnieją grafy, które nie mogą być przedstawione na płaszczyźnie w taki sposób, aby linie reprezentujące krawędzie grafu się nie przecinały. Jednak można je z powodzeniem narysować na torusie. Powyżej zamieszczamy rysunki grafów $K_{3,3}$, K_5 oraz K_7 , aby zobrazować ten fakt. Co ciekawe twierdzenie o czterech barwach w przypadku torusa prowadzi do wniosku, że minimalna liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania torusa wynosi siedem [48].



Rysunek 15: Magneto hydrodynamika to model fizyczny mający na celu opisanie ruchu płynów przewodzących prąd elektryczny w polu elektromagnetycznym, który traktuje wszystkie przenikające się cząstki jako jednolitą, ciągłą substancję. Istotnym aspektem magneto hydrodynamiki jest pułapka magnetyczna, zwana również magnetycznym uwięzieniem plazmy. Metoda ta polega na wykorzystaniu plazmy o wysokiej temperaturze, uwięzionej przy pomocy pola magnetycznego w tokamakach i stellaratorach [45]. Optymalizacja geometrii pola magnetycznego za pomocą modelowania na superkomputerach pokazała, że toroidalne kształty maksymalnie zapobiegają zderzeniom plazmy ze ściankami reaktora. Przedstawiona ilustracja ukazuje oba te urządzenia, których grafiki zostały zaczerpnięte z [36].

Literatura

- [1] Alexandrini H. *Opera quae Supersunt Omnia*; s. 128, linijki 3–4.
https://www.wilbourhall.org/pdfs/Heronis_Alexandrini_Opera_quae_SupersuntVOL_III.pdf.
- [2] Becker K., Becker M., Schwarz J. H. *String Theory and M-Theory A Modern Introduction*; California Institute of Technology; (2006), s. 1–9; s. 366; s. 387–390.
- [3] Bianchi L. *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*; Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 24(1); s. 93–129.
- [4] Błocki Z. *Complex Analysis 2*; (2020).
- [5] Borrelli V., Jabrane S., Lazarus F., Thibert B. *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*; Proc. of the National Acad. of Sciences; (2012).
- [6] Carlson J., Jaffe A., Wiles A. *The Millennium Prize Problems*; American Mathematical Society; (2006), s.50.
- [7] Chinyere I. *Computer Simulation of the Modular Fibration*; African Institute for Mathematical Sciences (AIMS); (17 May 2012).
- [8] Clebsch A., Gordan P. *Theorie der Abelschen functionen*; Leipzig B.G. Teubner; (1866), s. 67–69.
- [9] Cygan E. *Wykłady z analizy matematycznej 4*; (2020).
- [10] Diamond F., Shurman J. *A First Course in Modular Forms*; Graduate Texts in Mathematics (GTM, volume 228); (2005), s. 31–37.
- [11] Donaldson S. *Riemann Surfaces*; Oxford Graduate Texts in Mathematics; (24 March 2011).
- [12] Dumas H. S. *The KAM Story - A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov-Arnold-Moser Theory*; World Scientific Publishing; (2014).
- [13] Einstein A. *The Meaning of Relativity*; Princeton University Press, Princeton, New Jersey; (1956), s. 165–169.

- [14] Farb B., Margalit D. *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*; Princeton Mathematical Series, Princeton University Press; (2012), s. 265–272.
- [15] Freedman M. H. *The topology of four-dimensional manifolds*; Journal Of Differential Geometry. 17(3): 357-453; (1982), s, 360–374.
- [16] Garsia A. M. *An imbedding of closed Riemann surfaces in Euclidean space*; Commentarii Mathematici Helvetici; (1961), s. 93-110.
- [17] Garsia A. M. *On the conformal types of algebraic surfaces of Euclidean space*; Commentarii Mathematici Helvetici; (1962), s. 49-60.
- [18] Granville A. *RATIONAL AND INTEGRAL POINTS ON CURVES*; Université de Montréal; (2011), s. 129-135.
- [19] Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*; Developments in Mathematics (DEVM, volume 26); (2012), s. 49-53.
- [20] Hanson A. J. *A Construction for Computer Visualization of Certain Complex Curves*; Computer Science Department, Indiana University; (1994).
- [21] Hempel J. *3-manifolds*; Annals of Mathematics Studies, vol. 86, Princeton University Press; (1976), s. 14-20.
- [22] Hoffman D. A., Meeks W. *A complete embedded minimal surface in R^3 with genus one and three ends*; Journal of Differential Geometry; (3 April 1985), s. 109-127.
- [23] Jänich K. *Topology*; Undergraduate Texts in Mathematics; Springer; (1984), s. 127-156.
- [24] Katok A., Climenhaga V. *Lectures on Surfaces: (Almost) Everything You Wanted to Know about Them*; American Mathematical Society; (28 October 2008).
- [25] Kauffman L. H. *Knots and Physics*; World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Series on Knots and Everything: Volume 1; (2013).
- [26] Kendig K. *Elementary Algebraic Geometry*; Springer-Verlag; New York; (1977), s. 13-15.

- [27] Klein F. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of the Fifth Degree*; Cosimo Classics; (1 April 2007), s. 211-213.
- [28] Knöppel F. *Tutorial 6: Close-to-conformal parametrizations of Hopf tori*; Visualization course at TU Berlin - summer 2016; Berlin Mathematical School (BAN); (2 June 2016).
<http://wordpress.discretization.de/ddg2016/>
- [29] Koebe P. *Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*; Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; (1907), s. 633–669.
- [30] Lehner J. *A Short Course in Automorphic Functions*; Holt, Rinehart and Winston; (1966).
- [31] Lehner J. *Lectures on Modular Forms*; Dover Books on Mathematics; (2017).
- [32] Marques F. C., Neves A. *Min-Max theory and the Willmore conjecture*; Annals of Mathematics. 179: 683–782; arXiv:1202.6036 [math.DG]; (2012).
<https://arxiv.org/pdf/1202.6036.pdf>
- [33] Miller J. *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics*;
<https://jeff560.tripod.com/t.html>.
- [34] Milnor J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*; Princeton University Press; (1968), s. 3–5; s. 82–83.
- [35] Poincaré H. *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*; Acta Mathematica; (1907).
- [36] Picot W. *Magnetic Fusion Confinement with Tokamaks and Stellarators*; International Atomic Energy Agency bulletin; Vol. 62–2; (2021), s. 6–7.
- [37] Pinkall U. *Hopf tori in S^3* ; Invent. Math. 81; (1985), s. 379–386.
- [38] Silverman J. H. *The arithmetic of elliptic curves 2nd Edition*; Springer-Verlag New York Inc., (2016), s. 157–178.
- [39] Singer I. M., Thorpe J. A. *Lecture notes on elementary topology and geometry*; Undergraduate Texts in Mathematics (UTM); (1967).

- [40] Soliman A. *A BEGINNER'S GUIDE TO MODULAR CURVES*; WThe University of Chicago Mathematics REU 2021; (2021), s. 9–12.
- [41] Tangora M. C. *Computers in Algebra*; Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics; (1997), s. 57–62.
- [42] Thibert B. *Embeddings of the square flat torus and smooth fractals*; LJK / Université de Grenoble, Workshop on geometric structures with symmetry and periodicity; (8 June 2014).
- [43] Treisman Z. *A young person's guide to the Hopf fibration*; arXiv preprint arXiv:0908.1205; (2009).
<https://arxiv.org/pdf/0908.1205.pdf>.
- [44] Vladimir I. A. *The Geometry of Spherical Curves and The Algebra of Quaternions*; Russian Mathematical Surveys 50; (1995).
- [45] Vladimir I. A., Boris A. K. *Topological Methods in Hydrodynamics Second Edition*; Applied Mathematical Sciences (AMS, volume 125); Springer; (2021), s. 426.
- [46] Volkert K. *Space forms: a history **; Bulletin of the Manifold Atlas; (2013).
<http://www.boma.mpim-bonn.mpg.de/data/42print.pdf>.
- [47] Wegert E. *Visual Complex Functions*; Birkhauser Verlag AG; (2012).
- [48] West D. B. *Introduction to Graph Theory Second Edition*; Pearson Education; (2017), s. 266–269.
- [49] Winterberg F. *Teichmuller Space Interpretation of Quantum Mechanics*; Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 38; (2013).
- [50] Wohlgemuth M. *Minimal Surfaces of Higher Genus with Finite Total Curvature*; Archive for Rational Mechanics and Analysis; (1997), s. 1–25.
- [51] Online Etymology Dictionary;
<https://www.etymonline.com/word/torus>.