# FUNKCJE ANALITYCZNE

JEDNOSEMESTRALNY WYKŁAD DLA SEKCJI NIETEORETYCZNYCH

INSTYTUT MATEMATYKI UJ, 2008

Zbigniew Błocki

Spis treści



Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

# 1. Podstawowe własności liczb zespolonych

Liczbą zespoloną nazywamy parę liczb rzeczywistych, zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ to zatem dokładnie zbiór $\mathbb{R}^2$. Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ zapisujemy w postaci $x + iy$. Na zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy mnożenie (zgodnie z regułą $i^2 = -1$):

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Można łatwo pokazać **Ćwiczenie**, że $\mathbb{C}$ z dodawaniem wektorowym w $\mathbb{R}^2$ oraz tak wprowadzonym mnożeniem jest ciałem. Jeżeli $z = x + iy$, to $x$ nazywamy częścią rzeczywistą, natomiast $y$ częścią urojoną liczby $z$; ozn. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Każdą liczbę zespoloną $z$ możemy rówież zapisać przy pomocy współrzędnych biegunowych:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, zaś $\varphi$ jest kątem pomiędzy odcinkami $[0, 1]$ i $[0, z]$ (gdy $z \neq 0$) - nazywamy go argumentem liczby $z$. Zachodzi oczywiście *nierówność trójkąta*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

można również łatwo pokazać **Ćwiczenie**, że

$$|zw| = |z|\,|w|, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Chcemy teraz zdefiniować zespoloną funkcję wykładniczą $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dla $z = x + iy \in \mathbb{C}$ oczekujemy, że $e^z = e^x e^{iy}$, czyli wystarczy określić $e^{it}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Chcemy by funkcja ta spełniała

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}, \quad e^0 = 1,$$

a więc (oznaczając $e^{it} = A + iB$) $A' = -B$, $B' = A$, $A(0) = 1$, $B(0) = 0$. Jedynym rozwiązaniem tego układu są funkcje $A = \cos t$, $B = \sin t$. Funkcję wykładniczą definiujemy zatem następująco:

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Można łatwo pokazać **Ćwiczenie** jej następujące własności

$$e^{z+w} = e^z e^w, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

$$\frac{d}{dt}e^{tz} = ze^{tz}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Z faktu, że $|e^z| = e^x$ oraz dzięki temu, że $y$ jest argumentem liczby $e^z$ wynika, że funkcja wykładnicza proste pionowe $x = x_0$ odwzorowuje na okręgi o promieniu $e^{x_0}$, natomiast proste poziome $y = y_0$ na półproste otwarte o początku w 0 o argumencie $y_0$.

Wracając do współrzędnych biegunowych, możemy je teraz zapisać w postaci $z = re^{i\varphi}$. Dla $z \neq 0$ przez $\arg z$ oznaczamy zbiór argumentów liczby $z$, tzn.

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\varphi}\}.$$

Ponieważ $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$, dla dowolnego $\varphi_0 \in \arg z$ mamy

$$\arg z = \{\varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dla każdego $z \in \mathbb{C}_*(:= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ znajdziemy dokładnie jeden element $\arg z$ należący do przedziału $[-\pi, \pi)$. Nazywamy go argumentem głównym liczby $z$ i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Funkcja $\operatorname{Arg}$, określona na $\mathbb{C}_*$, jest nieciągła na półprostej $(-\infty, 0)$.

Możemy teraz podać geometryczną interpretację mnożenia w $\mathbb{C}$: jeżeli $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, to $zw = r\rho e^{i(\varphi+\psi)}$; czyli mnożymy długości, a dodajemy argumenty. Możemy stąd również wywnioskować *wzór de Moivre'a*: z tego, że $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ otrzymamy

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dla danego $z \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ przez pierwiastek $z$ stopnia $n$ rozumiemy zbiór

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

Zapisując $z$ i $w$ we współrzędnych biegunowych:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\psi},$$

otrzymamy warunki

$$\rho = r^{1/n}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ $e^{i\psi} = e^{i(\psi+2\pi)}$, dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ otrzymamy wszystkie rozwiązania. Zatem

$$\sqrt[n]{z} = \{|z|^{1/n} e^{i(\varphi+2k\pi)/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

W szczególności, pierwiastek stopnia $n$ z liczby niezerowej jest zawsze zbiorem $n$ elementowym.

**Ćwiczenie** Udowodnić, że rozwiązaniem równania kwadratowego w $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

gdzie $a \in \mathbb{C}_*$, $b, c \in \mathbb{C}$, jest

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$, przy czym $\sqrt{\Delta}$ jest zbiorem dwuelementowym jeżeli $\Delta \neq 0$ - w tym przypadku zawsze otrzymamy dwa rozwiązania (jedno jeżeli $\Delta = 0$).

W przypadku wielomianów dowolnego stopnia mamy rezultat niekonstruktywny, tzw. *zasadnicze twierdzenie algebry*.

**Twierdzenie 1.1.** *Każdy niestały wielomian zespolony ma pierwiastek.*

Powyższy rezultat można udowodnić w sposób elementarny przy pomocy *lematu d'Alemberta* (oryginalny dowód z 1746 r. zawierał lukę):

**Lemat 1.2.** *Załóżmy, że $P$ jest niestałym wielomianem zespolonym oraz, że dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$ mamy $P(z_0) \neq 0$. Wtedy dla każdego otoczenia $U$ punktu $z_0$ znajdziemy $z \in U$ takie, że $|P(z)| < |P(z_0)|$.*

*Dowód.* (Argand, 1806) Niech

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Wtedy

$$P(z_0 + h) = a_0 + a_1(z_0 + h) + \cdots + a_n(z_0 + h)^n = P(z_0) + A_1 h + \cdots + A_n h^n,$$

gdzie współczynniki $A_j$ zależą tylko od $P$ i $z_0$. Któryś z nich na pewno nie znika, gdyż w przeciwnym wypadku wielomian $P$ byłby stały. Niech $j$ będzie najmniejszym indeksem, dla którego $A_j \neq 0$. Mamy zatem

$$P(z_0 + h) = P(z_0) + A_j h^j + R(h),$$

gdzie

$$|R(h)| < |A_j h^j|,$$

gdy $|h|$ jest odp. małe, $h \neq 0$. Możemy znaleźć $h$ o dowolnie małym $|h|$, dla którego $A_j h^j$ ma argument przeciwny do argumentu $P(z_0)$. Wtedy

$$|P(z_0 + h)| \leq |P(z_0) + A_j h^j| + |R(h)| = |P(z_0)| - |A_j h^j| + |R(h)| < |P(z_0)|. \quad \square$$

*Dowód Twierdzenia 1.1.* Oznaczając $P$ jak w dowodzie Lematu 1.2 i zakładając, że $a_n \neq 0$, mamy

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n|\,|z|^n - |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \\ &\geq |a_n|\,|z|^n - |a_0| - |a_1|\,|z| - \cdots - |a_{n-1}|\,|z|^{n-1}. \end{aligned}$$

Możemy w szczególności znaleźć $R > 0$ takie, że $|P(z)| > |P(0)|$, gdy $|z| = R$. Funkcja $|P|$ jest ciągła na $\mathbb{C}$ (bo oczywiste jest, że mnożenie jest odwzorowaniem ciągłym), znajdziemy zatem $z_0 \in K(0, R)$ takie, że

$$|P(z_0)| = \min_{\overline{K}(0,R)} |P|.$$

Jeżeli $P(z_0) \neq 0$, to dzięki Lematowi 1.2 znajdziemy $z \in K(0, R)$ takie, że $|P(z)| < |P(z_0)|$ - sprzeczność. $\square$

Dla $z \in \mathbb{C}_*$ definiujemy

$$\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$

(dla $z = 0$ ten zbiór jest oczywiście pusty). Jeżeli zapiszemy $w = \eta + i\xi$, $z = re^{i\varphi}$, to otrzymamy równanie $e^\eta e^{i\xi} = re^{i\varphi}$. Zatem $\eta = \log r = \log |z|$, natomiast $\xi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ostatecznie

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Liczbę

$$\operatorname{Log} z := \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

nazywamy logarytmem głównym $z$.

Przy pomocy logarytmu możemy zdefiniować potęgi zespolone: dla $z \in \mathbb{C}_*$, $w \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Zauważmy, że

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\arg z)} = |z|^{1/n} e^{i\frac{\arg z}{n}},$$

czyli otrzymamy to samo, co przy definicji pierwiastka.

**Ćwiczenie** Obliczyć $i^i$.

Przypomnijmy, że

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zespolone funkcje trygonometryczne można łatwo wyprowadzić ze *wzorów Eulera*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Stąd

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Mamy również

$$\cosh z := \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\sinh z := -i\sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\arccos z = -i\log(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

Dla liczby zespolonej $z = x + iy$ definiujemy jej sprzężenie: $\overline{z} := x - iy$. Natychmiast otrzymujemy, że

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\overline{(zw)} = \overline{z}\,\overline{w}$ oraz $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

## 2. Różniczkowanie funkcji zespolonych

Oczywiście każde odwzorowanie liniowe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto az \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

dla pewnego $a \in \mathbb{C}$. Ponieważ $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, możemy również rozpatrywać równania liniowe w sensie rzeczywistym - będą one postaci

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni z \longmapsto Az \ni \mathbb{R}^2 = \mathbb{C},$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}, \quad p, q, s, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Takie odwzorowania $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będziemy nazywać $\mathbb{R}$-liniowymi, natomiast odwzorowania postaci (2.1) $\mathbb{C}$-liniowymi. Można łatwo sprawdzić, że każde odwzorowanie $\mathbb{C}$-liniowe jest $\mathbb{R}$-liniowe, przy czym $A$ jest postaci

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

gdzie $a = \alpha + i\beta$. Z drugiej strony, dane odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe jest $\mathbb{C}$-liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $p = t$ i $q = -s$ w (2.2) (**Ćwiczenie**).

Niech $f$ będzie funkcją o wartościach zespolonych określoną w pewnym otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$. Analogicznie jak w przypadku rzeczywistym powiemy, że $f$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w punkcie $z_0$, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Granicę tę nazywamy pochodną zespoloną funkcji $f$ w $z_0$ i oznaczamy przez $f'(z_0)$. Jest oczywiste, że każda funkcja $\mathbb{C}$-różniczkowalna w $z_0$ jest w ciągła w $z_0$. W podobny sposób jak w przypadku rzeczywistym dowodzimy podstawowych własności funkcji $\mathbb{C}$-różniczkowalnych.

**Propozycja 2.1.** *Jeżeli funkcje $f, g$ są $\mathbb{C}$-różniczkowalne w $z_0$, to funkcje $f \pm g$, $fg$ oraz $f/g$ (ta ostatnia pod warunkiem, że $g(z_0) \neq 0$) są $\mathbb{C}$-różniczkowalne w $z_0$ oraz w $z_0$ mamy*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad \square$$

**Propozycja 2.2.** *Jeżeli $f$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w $z_0$, zaś $g$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w $f(z_0)$, to $g \circ f$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w $z_0$ oraz*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0). \qquad \square$$

Przypomnijmy, że funkcja zespolona $f$ jest różniczkowalna w $z_0$ w klasycznym sensie (będziemy wtedy mówić, że jest ona $\mathbb{R}$-różniczkowalna), jeżeli istnieje odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe $A$ takie, że

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Jeżeli $f = u + iv$, gdzie $u, v$ są funkcjami rzeczywistymi, to

$$A = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

(ozn. $u_x = \partial u/\partial x$, $u_y = \partial u/\partial y$). Zauważmy, że każda funkcja $\mathbb{C}$-różniczkowalna jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna, przy czym

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}.$$

*Przykład.* Funkcja $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w każdym punkcie (jest nawet $\mathbb{R}$-liniowa), ale nigdzie nie jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna: zauważmy, że dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } z = z_0 + t, \\ -1, & \text{jeżeli } z = z_0 + it, \end{cases}$$

czyli odpowiednia granica nie istnieje.

Załóżmy, że $f = u + iv$ jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w $z_0$. Oznaczając $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$ mamy

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|).$$

Ponieważ

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \tag{2.3}$$

otrzymamy

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f_x(z_0) - if_y(z_0)}{2}(z - z_0) + \frac{f_x(z_0) + if_y(z_0)}{2}\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|).$$

Dla funkcji $\mathbb{R}$-różniczkowalnej definiujemy pochodne formalne

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(= f_z) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(= f_{\overline{z}}) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pochodne cząstkowe $\partial/\partial z$ i $\partial/\partial\overline{z}$ prowadzić możemy również przy pomocy formy $df$: mamy

$$f_x dx + f_y dy = df = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} = f_z(dx + idy) + f_{\overline{z}}(dx - idy),$$

a stąd

$$\begin{cases} f_x = f_z + f_{\overline{z}}, \\ f_y = i(f_z - f_{\overline{z}}), \end{cases} \tag{2.5}$$

skąd łatwo dostaniemy (2.4).

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że dla dowolnej funkcji $\mathbb{R}$-różniczkowalnej $f$ mamy

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}, \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

**Ćwiczenie** Obliczyć $f_z$ oraz $f_{\overline{z}}$, gdzie $f(z) = |z|^2 \mathrm{Re}\,(z^8)$.

Dla funkcji $\mathbb{R}$-różniczkowalnej w $z_0$ mamy więc

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) + o(|z - z_0|)$$

oraz, dla $z \neq z_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} + \frac{o(|z - z_0|)}{z - z_0}.$$

Wspólnie z ostatnim przykładem daje to następującą charakteryzację funkcji $\mathbb{C}$-różniczkowalnych:

**Propozycja 2.3.** *Funkcja zespolona $f = u + iv$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w punkcie $z_o$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w $z_0$ oraz $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, tzn. w $z_0$ spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna:*

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

*W takiej sytuacji $f'(z_0) = f_z(z_0)$.* $\square$

Powiemy, że funkcja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega$ będzie zawsze oznaczało obszar w $\mathbb{C}$) jest holomorficzna, jeżeli jest ona $\mathbb{C}$-różniczkowalna w każdym punkcie. Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych w $\Omega$ oznaczamy przez $\mathcal{O}(\Omega)$, natomiast przez $\mathcal{O}_*(\Omega)$ zbiór nigdzie nieznikających funkcji holomorficznych. Z Propozycji 2.1 i 2.2 wynika, że suma, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji holomorficznych są funkcjami holomorficznymi. Jeżeli $f = u + iv$ jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna, to $f$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna.

**Ćwiczenie** Pokazać, że $e^z$ jest jedyną funkcją z $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ taką, że $f' = f$ oraz $f(0) = 1$.

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\cos, \sin, \cosh, \sinh \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ oraz obliczyć pochodne zespolone tych funkcji.

**Propozycja 2.4.** *Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna i klasy $C^1$ w pewnym otoczeniu $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $f'(z_0) \neq 0$. Wtedy istnieje $U$ - otwarte otoczenie $z_0$ oraz $V$ - otwarte otoczenie $f(z_0)$, t.że $f : U \to V$ jest bijekcją, $f^{-1}$ jest holomorficzna oraz*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in U. \tag{2.6}$$

*Dowód.* Jeżeli zapiszemy $f = u + iv$, to rzeczywista różniczka $f$ ma postać

$$A := \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

dzięki równaniom Cauchy'ego-Riemanna. Z drugiej strony, wprost z definicji $\mathbb{C}$-różniczkowalności

$$f' = f_x = u_x - iu_y.$$

Mamy więc

$$\det A = u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2.$$

Dzięki temu, że $f'(z_0) \neq 0$, z rzeczywistego twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie wynika, że istnieją odp. otoczenia $U$ i $V$, t.że $f : U \to V$ jest bijekcją klasy $C^1$ oraz $f^{-1}$ jest również klasy $C^1$. Zapiszmy $f^{-1} = \alpha + i\beta$. Różniczka $f^{-1}$ jest równa

$$\begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}.$$

W szczególności $\alpha_x = \beta_y$, $\alpha_y = -\beta_x$, czyli $f^{-1}$ jest holomorficzna. Formułę (2.6) dostaniemy różniczkując wzór

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad z \in U. \quad \square$$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że $\operatorname{Log} z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ oraz $(\operatorname{Log} z)' = 1/z$.

Podamy teraz formułę na różniczkowanie złożenia funkcji zespolonej z krzywą. Załóżmy, że funkcje $f : \Omega \to \mathbb{C}$ oraz $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (a, b) \to \Omega$ są różniczkowalne (w klasycznym sensie). Wtedy, korzystając z (rzeczywistej) formuły na pochodną złożenia oraz z (2.3), (2.5), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= f_x(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + f_y(\gamma(t))\, \gamma_2'(t) \\ &= f_z(\gamma(t))\, \gamma'(t) + f_{\overline{z}}(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

## 3. Całkowanie funkcji zespolonych

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Funkcję $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ nazywamy <u>drogą</u>, jeżeli $\gamma$ jest ciągła oraz $\gamma$ jest kawałkami klasy $C^1$, tzn. istnieją $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ takie, że $\gamma \in C^1([t_j, t_{j+1}])$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Punkt $\gamma(a)$ nazywamy <u>początkiem</u> zaś $\gamma(b)$ <u>końcem</u> drogi $\gamma$. Obraz $\gamma$ będziemy oznaczać $\gamma^*$. Jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to $\gamma$ nazywamy drogą <u>zamkniętą</u>.

Załóżmy, że $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą. Definiujemy

$$\int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

(Powyższą definicję otrzymamy także rozpatrując część rzeczywistą i urojoną formy różniczkowej $f\,dz = (u + iv)(dx + idy)$.) Zauważmy, że funkcja pod całką jest całkowalna w sensie Riemanna niezależnie od tego jakie wartości przyjmuje w punktach $t_j$. Ponadto, jeżeli $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ jest dyfeomorfizmem, to $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ jest drogą taką, że $\widetilde{\gamma}^* = \gamma^*$ oraz

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z) dz = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) ds = \begin{cases} \int_\gamma f(z) dz, & \text{jeżeli } \varphi' > 0; \\ -\int_\gamma f(z) dz, & \text{jeżeli } \varphi' < 0. \end{cases}$$

Zatem, jeżeli $\gamma|_{(a,b)}$ jest iniekcją, to $\int_\gamma f(z) dz$ zależy tylko od obrazu $\gamma$ oraz od kierunku, w którym całkujemy, tzn. od orientacji. W takiej sytuacji będziemy często utożsamiać drogi z ich obrazem oraz odpowiednią orientacją.

W szczególności, jeżeli $D$ jest obszarem, którego brzeg można iniektywnie sparametryzować drogą zamkniętą, to możemy mówić o dodatniej orientacji $\partial D$ - będzie nią dowolna parametryzacja o kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara. Całka $\int_{\partial D} f(z)dz$ ma wówczas sens, gdyż nie zależy od wyboru takiej parametryzacji (i jest ona zgodna z całką z formy po krzywej gładkiej). Będziemy używać tego oznaczenia przede wszystkim, gdy $D$ jest kołem lub wnętrzem trójkąta.

Jeżeli $f$ jest określone w pewnym otoczeniu $\gamma^*$ i ma tam funkcję pierwotną, tzn. istnieje funkcja holomorficzna $F$ taka, że $F' = f$, to z (2.7) otrzymamy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{3.1}$$

W szczególności, jeżeli $\gamma$ jest drogą zamkniętą, to $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

**Ćwiczenie** Pokazać, że jeżeli funkcja $f = u + iv$ ma pierwotną, to pole wektorowe $(v, u)$ jest potencjalne, tzn. $(v, u) = \nabla\chi$ dla pewnej funkcji $\chi$.

*Przykład.* Dla $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $r > 0$ obliczymy

$$\int_{\partial K(z_0,r)} (z - z_0)^n dz.$$

Dla $n \neq -1$ pierwotną funkcji podcałkowej jest funkcja $(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$, określona na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. W tym przypadku więc, dzięki (3.1), nasza całka znika. Dla $n = -1$ połóżmy $\gamma_j(t) = z_0 + re^{it}$, $a_j \le t \le b_j$, gdzie $a_j$ jest pewnym ciągiem malejącym do zera, zaś $b_j$ rosnącym do $2\pi$. Wtedy, także z (3.1), mamy

$$\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = \lim_{j\to\infty} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - z_0} = \lim_{j\to\infty} \left(\operatorname{Log}(re^{ib_j}) - \operatorname{Log}(re^{ia_j})\right) = 2\pi i.$$

Otrzymaliśmy więc

$$\int_{\partial K(z_0,r)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \neq -1; \\ 2\pi i, & \text{jeżeli } n = -1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Pokazuje to w szczególności, że funkcja $1/(z - z_0)$ nie ma pierwotnej w żadnym pierścieniu o środku w $z_0$.

Jeżeli $z, w \in \mathbb{C}$, to przez $[z, w]$ oznaczamy drogę daną przez parametryzację $\gamma(t) = (1 - t)z + tw$, $t \in [0, 1]$.

**Ćwiczenie** Obliczyć $\displaystyle\int_{[1,i]} \operatorname{Log} z\, dz$.

**Ćwiczenie** Podobnie jak powyżej pokazać, że

$$\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \quad z \in K(z_0, r).$$

Zauważmy, że

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)| dt \le l(\gamma) \max_\gamma |f|, \tag{3.3}$$

gdzie
$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$
jest długością $\gamma$.

## 4. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Podstawową własnością geometryczną funkcji holomorficznych jest *twierdzenie całkowe Cauchy'ego*. Łatwo wynika ono ze wzoru Greena w następującym przypadku (Cauchy, 1825): załóżmy, że $f$ jest funkcją holomorficzną klasy $C^1$ w obszarze $\Omega$, natomiast $\gamma$ jest drogą zamkniętą w $\Omega$, która parametryzuje brzeg klasy $C^1$ obszaru $D \Subset \Omega$. Wtedy
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_D d(fdz) = \int_D f_{\overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz = 0.$$
Głównym problemem w uogólnieniu tego faktu jest pozbycie się założenia, że $f$ jest klasy $C^1$. Zostało to dokonane przez Goursata w 1900 r. Podstawowym krokiem w dowodzie ogólnej wersji twierdzenia całkowego Cauchy'ego było wykazanie jego wzmocnionej wersji dla brzegu trójkąta (sam Goursat rozpatrywał czworokąty, jak jednak wkrótce zauważył Pringsheim, naturalnym obiektami metody Goursata były trójkąty):

**Twierdzenie 4.1.** *Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C(\Omega)$, gdzie $z_0 \in \Omega$. Wtedy dla dowolnego trójkąta $T \subset \Omega$ (czyli otoczki wypukłej trzech niewspółliniowych punktów) mamy*
$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że $z_0 \notin T$. Przez $z_1, z_2, z_3$ oznaczmy wierzchołki $T$. Rozpatrując punkty $(z_j + z_k)/2$, $j, k = 1, 2, 3$, dzielimy trójkąt $T$ na cztery trójkąty $T^1, \dots, T^4$. Mamy wtedy
$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial T^j} f(z)dz.$$
Wybierając jako $T_1$ odpowiedni z trójkątów $T^1, \dots, T^4$ otrzymamy
$$\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z)dz \right|.$$
Zauważmy także, że $l(\partial T_1) = l(\partial T)/2$. W ten sam sposób wybieramy indukcyjnie trójkąty $T_n$, $n = 1, 2, \dots$, tak, że
$$\left| \int_{\partial T_{n-1}} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_n} f(z)dz \right|$$

oraz $l(\partial T_n) = l(\partial T_{n-1})/2$. Otrzymaliśmy zatem zstępujący ciąg trójkątów $T_n$ taki, że

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \tag{4.1}$$

oraz

$$\operatorname{diam}(T_n) \leq \frac{l(\partial T_n)}{2} = \frac{l(\partial T)}{2^{n+1}}. \tag{4.2}$$

Z twierdzenia Cantora wynika, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{\widetilde{z}\}$$

dla pewnego $\widetilde{z} \in T$. Z $\mathbb{C}$-różniczkowalności $f$ w $\widetilde{z}$ mamy

$$f(z) = f(\widetilde{z}) + \big(f'(\widetilde{z}) + \varepsilon(z)\big)(z - \widetilde{z}),$$

gdzie

$$\lim_{z \to \widetilde{z}} \varepsilon(z) = 0.$$

Ponieważ funkcja $f(\widetilde{z}) + f'(\widetilde{z})(z - \widetilde{z})$ ma pierwotną, z (3.1) i (3.3) wynika, że

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_n} \varepsilon(z)(z - \widetilde{z})dz\right| \leq l(\partial T_n)\operatorname{diam}(T_n) \max_{T_n} |\varepsilon|.$$

Korzystając z (4.1) i (4.2) otrzymamy dla każdego $n$

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq \frac{(l(\partial T))^2}{2} \max_{T_n} |\varepsilon|,$$

czyli twierdzenie zachodzi przy założeniu, że $z_0 \notin T$.

Jeżeli $z_0 \in T$, to dzieląc $T$ na trzy (lub dwa) mniejsze trójkąty, których wierzchołkiem jest $z_0$ widzimy, że bez straty ogólności możemy założyć, że $z_0$ jest jednym z wierzchołków $T$. Jeżeli teraz podzielimy $T$ na trójkąt $T_n'$ o wierzchołku w $z_0$ oraz czworokąt $Q_n$ tak, że $l(T_n')$ dąży do 0, to z poprzedniej części wnioskujemy, że

$$\int_{Q_n} f(z)dz = 0,$$

zatem

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_n'} f(z)dz\right| \leq l(T_n') \max_{T} |f|. \qquad \square$$

*Przykłady.* i) Niech $f(z) = e^{-z^2}$ i dla $R > 0$ niech $T_R$ będzie trójkątem o wierzchołkach $0, R, R + iR$. Z Twierdzenia 4.1 mamy

$$\int_{\partial T_R} f(z)dz = 0.$$

Mamy także, gdy $R \to \infty$,
i) $\displaystyle\int_{[0,R]} e^{-z^2} dz \longrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
ii) $\displaystyle\left|\int_{[R,R+Ri]} e^{-z^2} dz\right| = \left|i\int_0^R e^{t^2-R^2-2iRt} dt\right| \le \int_0^R e^{t^2-R^2} dt \le \int_0^R e^{Rt-R^2} dt \to 0$,
iii) $\displaystyle\int_{[R+Ri,0]} e^{-z^2} dz = -(1+i)\int_0^R e^{-2it^2} dt$,
skąd łatwo wnioskujemy, że

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Następnym krokiem jest pokazanie związku twierdzenia całkowego Cauchy'ego z istnieniem funkcji pierwotnej:

**Twierdzenie 4.2.** *Niech $f$ będzie funkcją ciągłą w $\Omega$. Wtedy następujące warunki są równoważne*
*i) Istnieje $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $F' = f$;*
*ii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ dla każdej drogi zamkniętej $\gamma$ w $\Omega$.*
*Jeżeli $\Omega$ jest obszarem gwiaździstym, to powyższe warunki są równoważne następującej własności*
*iii) $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ dla każdego trójkąta $T \subset \Omega$.*

*Dowód.* Implikacja i)⇒ii) wynika natychmiast z (3.1). W celu pokazania implikacji przeciwnej ustalmy $z_0 \in \Omega$. Dla $z \in \Omega$ niech $\gamma$ będzie dowolną drogą łączącą $z_0$ oraz $z$. Kładziemy

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)d\zeta.$$

Dzięki i) widać, że definicja $F$ nie zależy od wyboru $\gamma$. Dla odp. małych $h$ mamy

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta, \tag{4.3}$$

a stąd, dzięki (3.3),

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \le \sup_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|.$$

Z ciągłości $f$ w $z$ wynika, że ostatnie wyrażenie dąży do 0. Otrzymaliśmy zatem, że $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ oraz $F' = f$.

Jeżeli $\Omega$ jest gwiaździsty, to implikacja ii)⇒iii) jest trywialna, natomiast, zakładając, że zachodzi iii) i że $\Omega$ jest gwiaździsty względem $z_0$, kładziemy

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(z)dz, \quad z \in \Omega.$$

Z iii) wynika, że zachodzi (4.3) i identycznie jak poprzednio dowodzimy, że $F' = f$. $\square$

Z Twierdzeń 4.1 i 4.2 wynika wersja twierdzenia Cauchy'ego dla zbiorów gwiaździstych:

**Wniosek 4.3.** *Jeżeli obszar $\Omega$ jest gwiaździsty i $f \in \mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})\cap C(\Omega)$ dla pewnego $z_0 \in \Omega$, to*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

*dla każdej drogi zamkniętej $\gamma$ w $\Omega$.* $\square$

## 5. Wzór całkowy Cauchy'ego

Podstawową własnością funkcji holomorficznych jest *wzór całkowy Cauchy'ego* (1831), który odtwarza daną funkcję wewnątrz koła z jej wartości na brzegu.

**Twierdzenie 5.1.** *Jeżeli $f$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \in K(z_0, r). \tag{5.1}$$

*Co więcej, $f$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna dowolną ilość razy oraz*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \quad z \in K(z_0, r), \quad n = 1, 2, \dots$$

*Dowód.* Niech $\Omega$ będzie gwiaździstym otoczeniem $\overline{K}(z_0, r)$, w którym funkcja $f$ jest określona. Dla $\zeta \in \Omega$ zdefiniujmy

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Wtedy $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z\}) \cap C(\Omega)$, zatem Wniosek 3.3 implikuje, że

$$0 = \int_{\partial K(z_0,r)} g(\zeta)d\zeta = \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i f(z).$$

Otrzymaliśmy zatem (5.1). Druga część tezy wynika z faktu, że możemy teraz różniczkować pod znakiem całki, zauważmy, że

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^n \left(\frac{1}{\zeta - z}\right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left(\frac{1}{\zeta - z}\right) &= \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Druga część Twierdzenia 5.1 jest specjalnym przypadkiem ogólnego rezulatu o holomorficzności funkcji danej wzorem całkowym dla dowolnej drogi (nazywanego *lematem o produkcji* funkcji holomorficznych):

**Lemat 5.2.** *Załóżmy, że $\gamma$ jest dowolną drogą w $\mathbb{C}$, natomiast $g$ funkcją ciągłą na $\gamma^*$ . Połóżmy*

$$f(z) := \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

*Wtedy $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$, $f$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna dowolną ilość razy oraz dla $n = 1, 2, \ldots$ mamy*

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*. \quad \square$$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Obliczyć $\displaystyle\int_{\partial K(0,2)} \frac{e^{-z}}{(z+1)^2}\, dz.$

Jeżeli rozpatrzymy wzór Cauchy'ego dla $z = z_0$ oraz parametryzację $\zeta = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, otrzymamy *twierdzenie o wartości średniej*:

**Wniosek 5.3.** (Poisson, 1823) *Jeżeli $f$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \quad \square$$

Bezpośrednią konsekwecją wzoru Cauchy'ego jest także *nierówność Cauchy'ego* (1835):

**Twierdzenie 5.4.** *Niech $f \in \mathcal{O}(K(z_0, r))$ będzie taka, że $|f| \le M$ dla pewnej stałej $M$. Wtedy*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\, M}{r^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*Dowód.* Wystarczy zastosować wzór Cauchy'ego w kole $K(z_0, \rho)$ dla $\rho < r$ oraz (3.3), a następnie skorzystać z dowolności $\rho$. $\square$

## 6. Podstawowe własności funkcji holomorficznych

Udowodnimy teraz szereg własności funkcji holomorficznych wynikających ze wzoru Cauchy'ego. Pokazaliśmy, że każda funkcja holomorficzna jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna dowolną ilość razy. W szczególności, każda funkcja, która lokalnie ma pierwotną jest holomorficzna. Z Twierdzenia 4.2 wynika zatem rezultat odwrotny do twierdzenia całkowego Cauchy'ego:

**Twierdzenie 6.1.** (Morera, 1886) *Załóżmy, że funkcja $f \in C(\Omega)$ spełnia*

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

*dla każdego trójkąta $T \subset \Omega$. Wtedy $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.* $\square$

Funkcję holomorficzną określoną na $\mathbb{C}$ nazywamy całkowitą.

**Twierdzenie 6.2.** (Liouville, 1847, Cauchy, 1844) *Każda ograniczona funkcja całkowita jest stała.*

*Dowód.* Jeżeli $|f| \leq M$ na $\mathbb{C}$, to z nierówności Cauchy'ego wynika, że $|f'(z)| \leq M/r$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$. Jeżeli więc $r \to \infty$, to dostaniemy, że $f' = 0$ na $\mathbb{C}$. Ale to oznacza, że również pochodna rzeczywista $f$ wszędzie znika. $\square$

**Ćwiczenie** Pokazać, że jeżeli funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ jest taka, że $\operatorname{Re} f \leq M$ dla pewnej stałej $M$, to $f$ jest stała.

**Ćwiczenie** Pokazać, że jeżeli funkcja całkowita $f$ spełnia

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \quad \text{gdy } |z| \geq R,$$

dla pewnych $C, R > 0$, to $f$ musi być wielomianem stopnia $\leq n$.

Z twierdzenia Liouville'a w łatwy sposób wynika zasadnicze twierdzenie algebry. Bo jeżeli niestały wielomian $P$ nie miałby pierwiastka, to $f := 1/P$ byłoby funkcją całkowitą. Co więcej

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0.$$

W szczególności, $f$ byłaby funkcją ograniczoną, a więc na mocy twierdzenia Liouville'a otrzymalibyśmy, że $P$ jest stały.

Następnym rezulatem jest *zasada maksimum* dla funkcji holomorficznych:

**Twierdzenie 6.3.** *Jeżeli $f$ jest funkcją holomorficzną w obszarze $\Omega$ taką, że $|f|$ osiąga maksimum w $\Omega$, to $f$ jest stała.*

*Dowód.* Dla $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$ z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

Jeśli zatem $|f| \leq |f(z_0)|$ na $\partial K(z_0, r)$, to z ciągłości $|f|$ wynika, że $|f| = |f(z_0)|$ na $\partial K(z_0, r)$, a wobec dowolności $r$, także w $K(z_0, r)$. Twierdzimy, że jeżeli $|f| = |f(z_0)|$ w $K(z_0, r)$, to wtedy $f = f(z_0)$ w $K(z_0, r)$. Jeżeli $f(z_0) = 0$, to jest to oczywiste, możemy więc założyć, że $f \neq 0$ w $K(z_0, r)$. Mamy

$$0 = (|f|^2)_z = f_z \overline{f} + \overline{(f_{\overline{z}})} f = f' \overline{f},$$

a zatem $f' = 0$, więc $f = f(z_0)$ w $K(z_0, r)$. Pokazaliśmy więc, że jeżeli $\max\limits_{\overline{K}(z_0,r)} |f| = |f(z_0)|$, to $f = f(z_0)$ w $K(z_0, r)$.

Jeżeli teraz $|f|$ osiąga maksimum w $z_0 \in \Omega$, to kładziemy

$$\Omega' := \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}.$$

Zbiór ten jest oczywiście domknięty, natomiast z pierwszej części dowodu wynika, że jest on również otwarty, co oznacza, że $\Omega' = \Omega$. $\square$

Twierdzenie 6.3 to słaba zasada maksimum (zakładamy, że maksimum jest globalne), niedługo pokażemy wzmocnienie Twierdzenia 6.3 (przy założeniu, że maksimum jest lokalne).

**Ćwiczenie** Niech wielomian $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ będzie taki, że $|P(z)| \le 1$, gdy $|z| = 1$. Pokazać, że $|a_j| \le 1$, $j = 1, \ldots, n$.

**Ćwiczenie** Niech $f$ będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu pierścienia $\{1 \le |z| \le 3\}$ taką, że $|f| \le 1$, gdy $|z| = 1$ oraz $|f| \le 9$, gdy $|z| = 3$. Pokazać, że $|f(z)| \le 4$, gdy $|z| = 2$.

Przy pomocy wzoru Cauchy'ego możemy też łatwo udowodnić podstawowy rezultat dotyczący ciągów funkcji holomorficznych:

**Twierdzenie 6.4.** (Weierstrass, 1841) *Jeżeli $f_n$ jest ciągiem funkcji holomorficznych w $\Omega$ zbieżnym lokalnie jednostajnie do funkcji $f$, to $f$ jest funkcją holomorficzną oraz dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ mamy lokalnie jednostajną zbieżność $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$.*

*Dowód.* Niech $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$. Funkcje $f_n$ spełniają wzór Cauchy'ego (3.6), zatem spełnia go również $f$. Z Lematu 4.2 wynika, że $f$ jest holomorficzna w $K(z_0, r)$. Co więcej, z nierówności Cauchy'ego (stosowanej w kole $K(z, r/2) \subset K(z_0, r)$, $z \in K(z_0, r/2)$) dostaniemy

$$\max_{\overline{K}(z_0, r/2)} |f_n^{(k)} - f^{(k)}| \le \frac{k!}{(r/2)^k} \max_{\overline{K}(z_0, r)} |f_n - f|. \qquad \Box$$

## 7. Szeregi potęgowe

Wyrażenie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \tag{7.1}$$

nazywamy szeregiem potęgowym o środku w $z_0 \in \mathbb{C}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots$.

*Przykład.* Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Jest on zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$. Wynika to ze wzoru

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \ne 1.$$

Możemy zatem zapisać

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1. \tag{7.2}$$

**Twierdzenie 7.1.** (Cauchy, 1821, Hadamard, 1892) *Połóżmy*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{7.3}$$

*Wtedy szereg (7.1) jest bezwzględnie i lokalnie jednostajnie zbieżny w kole $K(z_0, R)$ oraz rozbieżny dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, R)$.*

*Dowód.* Dla $z \in K(z_0, R)$ niech $r$ i $\lambda$ będą takie, że $|z - z_0| \le r < R$ oraz $r/R < \lambda < 1$. Wtedy dla $n$ odp. dużego mamy $\sqrt[n]{|a_n|} \le \lambda/r$, zatem

$$\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n(z - z_0)^n\right| \le \sum_{n=N_1}^{N_2} |a_n(z - z_0)^n| \le \sum_{n=N_1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda^{N_1}}{1-\lambda} \to 0,$$

gdy $N_1 \to \infty$. Z warunku Cauchy'ego zbieżności otrzymaliśmy zatem bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu na $\overline{K}(z_0, r)$.

Z drugiej strony, jeżeli $|z - z_0| > R$, to istnieje podciąg $a_{n_k}$ taki, że $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \ge 1/|z - z_0|$, co oznacza, że $|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| \ge 1$, nie jest zatem spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. $\square$

Koło $K(z_0, R)$ z Twierdzenia 7.1 nazywamy kołem zbieżności, zaś $R$ promieniem zbieżności szeregu (7.1). Formuła (7.3) na promień zbieżności szeregu potęgowego nosi nazwę *wzoru Cauchy'ego-Hadamarda*. Zauważmy, że promień zbieżności szeregu (7.1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $M > 0$ takie, że dla $n$ odp. dużego mamy $|a_n| \le M^n$ - wtedy $R \ge 1/M$.

Twierdzenie 7.1 nie rozstrzyga zbieżności szeregu potęgowego na brzegu koła zbieżności:

*Przykłady.* Kołem zbieżności każdego z szeregów $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ jest $K(0, 1)$.

i) Szereg $\sum z^n$ jest rozbieżny we wszystkich punktach z brzegu koła zbieżności.

ii) Szereg $\sum z^n/n^2$ jest zbieżny bezwzględnie na brzegu.

iii) Szereg $\sum z^n/n$ jest rozbieżny w 1 i zbieżny warunkowo na $\partial K(0, 1) \setminus \{1\}$ (**Ćwiczenie**).

Istotną własnością szeregów potęgowych jest jednoznaczność ich współczynników:

**Propozycja 7.2.** *Załóżmy, że szeregi potęgowe $\sum a_n(z - z_0)^n$ oraz $\sum b_n(z - z_0)^n$ są zbieżne do tych samych wartości na zbiorze $A$ takim, że $z_0$ jest punktem skupienia $A$. Wtedy $a_n = b_n$ dla wszystkich $n$.*

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy założyć, że $b_n = 0$ dla wszystkich $n$. Przypuśćmy, że $a_m \ne 0$ dla pewnego $m$ i wybierzmy najmniejsze takie $m$. Wtedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n, \quad z \ne z_0.$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n$, zbieżny do pewnej funkcji ciągłej w otoczeniu $z_0$ (dzięki Twierdzeniu 7.1), znika dla $z \in A$, zatem znika również w $z_0$, czyli $a_m = 0$ - sprzeczność. $\square$

*Przykład.* Rozpatrzmy ciąg Fibonacciego (1202):

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

**Ćwiczenie** Pokazać, że w pewnym (rzeczywistym) otoczeniu 0 mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

oraz, rozwijając prawą stronę w szereg potęgowy, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \text{(de Moivre, 1730).}$$

Następujący rezultat jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 6.4 (można go zresztą udowodnić w bardziej elementarny sposób):

**Twierdzenie 7.3.** *Suma szeregu potęgowego jest funkcją holomorficzną w kole zbieżności. Szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie.* □

## 8. Podstawowe własności funkcji holomorficznych, cd.

Udowodnimy najpierw, że każda funkcja holomorficzna w kole jest granicą szeregu potęgowego, czyli wynik odwrotny do Twierdzenia 7.3:

**Twierdzenie 8.1.** *Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy dla każdego $z_0 \in \Omega$ funkcja $f$ rozwija się w szereg Taylora w kole $K(z_0, \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega))$, tzn.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

*Dowód.* Niech $r$ będzie takie, że $|z-z_0| < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Skorzystamy ze wzoru Cauchy'ego (5.1). Dla $\zeta \in \partial K(z_0, r)$ dzięki (7.2) mamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

przy czym zbieżność jest jednostajna dla $\zeta \in \partial K(z_0, r)$. Zatem

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \quad \square \end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że funkcje holomorficzne to dokładnie te funkcje, które można lokalnie rozwinąć w szereg potęgowy (będący równocześnie szeregiem Taylora tej funkcji). Co więcej, szereg Taylora funkcji holomorficznej w danym punkcie jest zbieżny w każdym kole o środku w tym punkcie, w którym funkcja ta jest określona.

Zasadę identyczności dla funkcji holomorficznych łatwo teraz wynika z zasady identyczności dla szeregów potęgowych (Propozycja 7.2):

**Twierdzenie 8.2.** *Niech $f, g$ będą funkcjami holomorficznymi w obszarze $\Omega$. Załóżmy, że $f = g$ na zbiorze $A \subset \Omega$ posiadającym punkt skupienia w $\Omega$. Wtedy $f = g$ w $\Omega$.*

*Dowód.* Jeżeli $z_0$ jest punktem skupienia zbioru $A$, to z Twierdzenia 7.6 i Propozycji 7.2 wynika, że $f = g$ w dowolnym kole $K(z_0, r) \subset \Omega$. Zatem zbiór $\Omega' = \{z \in \Omega : f = g \text{ w pewnym otoczeniu } z\}$ jest domknięty w $\Omega$. Ponieważ jest on również oczywiście otwarty, otrzymujemy $\Omega' = \Omega$. □

**Ćwiczenie** i) Czy istnieje $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ takie, że $f(1/n) = n/(n+1)$, $n = 2, 3, \dots$?
ii) Czy istnieje $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ takie, że $f(1/n) = n/(n+2)$, $n = 2, 3, \dots$?
iii) Czy istnieje $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ takie, że $f(1/n) = e^{-n}$, $n = 2, 3, \dots$?
(Ozn. $\Delta := K(0, 1)$.)

Z Twierdzeń 6.3 i 8.2 wynika natychmiast *mocna zasada maksimum* dla funkcji holomorficznych.

**Twierdzenie 8.3.** *Jeżeli $f$ jest funkcją holomorficzną w obszarze $\Omega$ taką, że $|f|$ osiąga maksimum lokalne w $\Omega$, to $f$ jest stała.* □

Korzystając z zasady identyczności oraz zasady maksimum można udowodnić *twierdzenie o odwzorowaniu otwartym*:

**Twierdzenie 8.4.** *Niestałe funkcje holomorficzne określone na obszarze w $\mathbb{C}$ są odwzorowaniami otwartymi.*

*Dowód.* Trzeba pokazać, że jeżeli $f$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$, to istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(K(z_0, r)) \supset K(w_0, \delta)$, gdzie $w_0 = f(z_0)$. Wybieramy $\varepsilon \in (0, r)$ tak, że $w_0 \notin f(\partial K(z_0, \varepsilon))$. Gdyby takie $\varepsilon$ nie istniało, to dla każdego odp. małego $\varepsilon > 0$ znaleźlibyśmy punkty $z_\varepsilon$ takie, że $|z_0 - z_\varepsilon| = \varepsilon$ oraz $f(z_\varepsilon) = w_0$. Dzięki zasadzie identyczności stałoby to w sprzeczności z tym, że funkcja $f$ nie jest stała. Kładziemy teraz

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{\zeta \in \partial K(z_0, \varepsilon)} |f(\zeta) - w_0|.$$

Z definicji $\varepsilon$ wynika, że $\delta > 0$. Dla $w \in K(w_0, \delta)$ musimy teraz znaleźć $z \in K(z_0, r)$ takie, że $f(z) = w$. Przypuśćmy, że takie $z$ nie istnieje. Z definicji $\delta$ mamy

$$|f(\zeta) - w| \geq |f(\zeta) - w_0| - |w_0 - w| > \delta, \quad \zeta \in \partial K(z_0, \varepsilon).$$

Funkcja $z \mapsto 1/(f(z) - w)$ jest więc holomorficzna w otoczeniu $\overline{K}(z_0, \varepsilon)$, zatem z zasady maksimum wynika, że

$$\frac{1}{|f(z) - w|} \leq \max_{\zeta \in \partial K(z_0, \varepsilon)} \frac{1}{|f(\zeta) - w|} < \frac{1}{\delta}, \quad z \in K(z_0, \varepsilon).$$

Dla $z = z_0$ otrzymamy $|w_0 - w| > \delta$ - sprzeczność. □

Zauważmy, że w przypadku rzeczywistym nawet wielomiany nie muszą być odwzorowaniami otwartymi, np. $f(x) = x^2$.

**Ćwiczenie** Pokazać, że z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym łatwo wynika słaba zasada maksimum (Twierdzenie 6.3) oraz lemat d'Alemberta (Lemat 1.2).

## 9. Funkcje analityczne

Funkcję $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nazywamy analityczną, jeżeli dla każdego $x_0 \in (a, b)$ istnieje $r > 0$ takie, że $f$ jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $(x_0-r, x_0+r)$. Korzystając z własności szeregów potęgowych można elementarnie pokazać następujący fakt:

**Propozycja 9.1.** *Jeżeli funkcje $f, g$ są funkcjami analitycznymi, to również funkcje $f \pm g$, $fg$ oraz $f/g$ (ta ostatnia pod warunkiem, że $g \neq 0$) są analityczne.*

*Przykład.* Funkcja $1/(1 + x^2)$ jest analityczna na $\mathbb{R}$ dzięki Propozycji 9.1. Szereg Taylora w 0 ma postać (korzystamy z (7.2))

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Szereg ten jest zbieżny tylko w przedziale $(-1, 1)$, a więc, w przeciwieństwie do przypadku zespolonego, funkcji analitycznej nie można zawsze rozwinąć w szereg Taylora w maksymalnym przedziale, w którym funkcja jest określona.

Funkcje analityczne są ściśle związane z funkcjami holomorficznymi dzięki następującej charakteryzacji:

**Propozycja 9.2.** *Każda funkcja analityczna na $(a, b)$ jest zacieśnieniem pewnej funkcji holomorficznej określonej w pewnym otoczeniu $(a, b)$ w $\mathbb{C}$.*

*Dowód.* Jeżeli dla $\alpha \in (a, b)$ mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n, \quad x \in (\alpha - r_\alpha, \alpha + r_\alpha),$$

to jest oczywiste (dzięki Twierdzeniu 7.1), że zespolony szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ jest zbieżny do funkcji holomorficznej $f_\alpha$ w kole $K(\alpha, r_\alpha)$. Co więcej, z zasady identyczności wynika, że $f_\alpha = f_\beta$ w $K(\alpha, r_\alpha) \cap K(\beta, r_\beta)$. Na obszarze

$$\bigcup_{\alpha \in (a,b)} K(\alpha, r_\alpha) \subset \mathbb{C}$$

możemy więc dobrze zdefiniować funkcję holomorficzną $\widetilde{f} := f_\alpha$ na $K(\alpha, r_\alpha)$. $\square$

Zauważmy, że Propozycja 9.1 wynika z Propozycji 9.2 i własności funkcji holomorficznych. To, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji $1/(1 + x^2)$ w 0 wynosi 1 wynika z tego, że jej jednoznacznie określone zespolone przedłużenie, czyli funkcja $1/(1 + z^2)$, ma osobliwości w $\pm i$.

Podobnie możemy znaleźć promień zbieżności szeregu Taylora w 0 funkcji

$$\frac{x}{e^x-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right)^{-1}.$$

Jest ona zacieśnieniem do $\mathbb{R}$ funkcji $z/(e^z-1)$, która jest holomorficzna w (maksymalnym) obszarze $\mathbb{C}\setminus\{2k\pi i : k\in\mathbb{Z}_*\}$. Szukany promień jest więc równy $2\pi$. Znalezienie go bez korzystania z analizy zespolonej byłoby nieporównanie trudniejsze.

## 10. Globalne twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Będziemy chcieli uogólnić twierdzenie całkowe Cauchy'ego (zob. Wniosek 4.3) na szerszą klasę obszarów i dróg zamkniętych. W tym celu wprowadzimy pojęcie indeksu drogi zamkniętej w $\mathbb{C}$.

**Propozycja 10.1.** *Dla drogi zamkniętej* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ *połóżmy*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*.$$

*Wtedy*

*i)* $\operatorname{Ind}_\gamma$ *jest funkcją o wartościach całkowitych;*

*ii)* $\operatorname{Ind}_\gamma$ *jest stała na każdej składowej spójnej zbioru* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$*;*

*iii)* $\operatorname{Ind}_\gamma\equiv 0$ *na składowej nieograniczonej* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$*;*

*iv) Liczba* $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ *jest równa liczbie obrotów (w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara) wektora o początku w* $z$ *i końcu w* $\gamma(t)$, $a\le t\le b$, *dookoła* $z$.

*Dowód.* i) Połóżmy

$$\varphi(t)=\exp\left(\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\right),\quad t\in[a,b],$$

wtedy $\varphi'=\varphi\gamma'/(\gamma-z)$, a stąd $(\varphi/(\gamma-z))'=0$ (tam, gdzie $\gamma$ jest klasy $C^1$). Stąd wynika, że funkcja $\varphi/(\gamma-z)$ jest stała. Korzystając z faktu, że $\varphi(a)=1$, otrzymujemy

$$\exp\left(\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\right)=\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z},\quad t\in[a,b].$$

Dla $t=b$ oznacza to, że $\exp(2\pi i\operatorname{Ind}_\gamma(z))=1$, co jest równoważne temu, że $\operatorname{Ind}_\gamma(z)\in\mathbb{Z}$.

ii) Wynika natychmiast z i) i z tego, że $\operatorname{Ind}_\gamma$ jest funkcją ciągłą (a dzięki lematowi o produkcji funkcji holomorficznych nawet holomorficzną) na $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

iii) Z definicji $\operatorname{Ind}_\gamma$ łatwo otrzymujemy

$$\lim_{|z|\to\infty}\operatorname{Ind}_\gamma(z)=0$$

i wystarczy skorzystać z ii).

iv) Przez $A(t)$, $t \in [a,b]$, oznaczymy całkowity przyrost argumentu wektora $\gamma(s)-z$, gdy $s$ rośnie od $a$ do $t$. Znajdziemy podział $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ taki, że $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ jest zawarte w kole niezawierającym $z$, $j = 1, \ldots, n$. Dla danego $j$ możemy wtedy wybrać logarytm tak, by był ciągły na $\gamma([t_{j-1}, t_j])$. Otrzymamy

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(z) &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\log(\gamma(t_j)-z) - \log(\gamma(t_{j-1})-z)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \log \left| \frac{\gamma(t_j)-z}{\gamma(t_{j-1})-z} \right| + i(A(t_j) - A(t_{j-1})) \right) \\ &= i(A(b) - A(a)). \quad \square \end{aligned}$$

W dalszym ciągu wygodnie będzie całkować funkcje zespolone po skończonej *sumie* dróg (np. po brzegu gładkiego obszaru wielospójnego). Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ będą drogami w $\mathbb{C}$. Tworzą one łańcuch, który zapisujemy $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$. Obrazem łańcucha $\Gamma$ jest $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_k^*$. Mamy wtedy

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz, \quad f \in C(\Gamma^*), \tag{10.1}$$

przy czym prawą stronę możemy traktować jako formalną definicję łańcucha $\Gamma$, tzn. jako funkcjonał liniowy określony na $C(\Gamma^*)$. Zauważmy, że tak naprawdę do tej pory dla danej drogi $\gamma$ interesował nas właściwie tylko funkcjonał

$$C(\gamma^*) \ni f \mapsto \int_\gamma f(z)dz \in \mathbb{C}.$$

Dlatego też sumę $\gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ należy rozumieć jako sumę odpowiednich funkcjonałów (a oczywiście nie jako sumę algebraiczną funkcji $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, która zresztą nie miałaby w ogólnym przypadku sensu). W oczywisty sposób definiujemy sumę i różnicę dwóch łańcuchów. Długością łańcucha $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ jest $l(\Gamma) = l(\gamma_1) + \cdots + l(\gamma_k)$. Jest oczywiste (dzięki (3.3)), że norma funkcjonału (10.1) nie przekracza $l(\Gamma)$.

Jeżeli wszystkie drogi $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ są zamknięte, to łańcuch $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ nazywamy cyklem. Na cykle możemy rozszerzyć pojęcie indeksu:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) := \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*.$$

Poniższe twierdzenie precyzyjnie charakteryzuje cykle, dla których zachodzi twierdzenie całkowe oraz wzór całkowy Cauchy'ego (jest ono czasami nazywane *twierdzeniem Cauchy'ego-Dixona*):

**Twierdzenie 10.2.** *Dla cyklu $\Gamma$ w obszarze $\Omega$ NWSR*

*i)* $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $\quad z \in \Omega \setminus \Gamma$, $\quad f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *(wzór całkowy Cauchy'ego);*

*ii)* $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$, $\quad f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *(twierdzenie całkowe Cauchy'ego);*

*iii)* $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$, $\quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

*Dowód.* (Dixon, 1971) i)$\Rightarrow$ii) Dla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i $z \in \Omega \setminus \Gamma$ niech $h(\zeta) := (\zeta - z)f(\zeta)$. Wtedy korzystając z i) mamy

$$0 = \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta.$$

ii)$\Rightarrow$iii) Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ funkcja $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ jest holomorficzna w $\Omega$.

iii)$\Rightarrow$i) Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dla $z, w \in \Omega$ połóżmy

$$g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Twierdzimy, że $g \in C(\Omega \times \Omega)$. Jest oczywiste, że funkcja $g$ jest ciągła na $\Delta = \{(z,w) \in \Omega \times \Omega : z = w\}$ oraz na $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$. Dla $z, w \in K(a,r)$, $z \neq w$, gdzie $r > 0$ jest takie że $\overline{K}(a,r) \subset \Omega$, ze wzoru Cauchy'ego dla koła otrzymamy

$$\begin{aligned} g(z,w) - g(a,a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} \left[\frac{1}{z-w}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\right) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2}\right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(a,r)} f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - w)} - \frac{1}{(\zeta - a)^2}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie dąży do 0 jednostajnie na $\partial K(a,r)$, gdy $(z,w) \to (a,a)$, a więc $g \in C(\Omega \times \Omega)$.

Zdefiniujmy

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta, & z \in \Omega, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, & z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, f(z), \quad z \in \Omega \setminus \Gamma^*. \tag{10.2}$$

Z ciągłości $g$ wynika, że $h$ jest ciągła w $\Omega$. Dla trójkąta $T \subset \Omega$ z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\int_{\partial T} h(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \int_{\partial T} g(\zeta, z)dz\, d\zeta = 0$$

(dzięki Wnioskowi 4.3), z twierdzenia Morery otrzymamy zatem holomorficzność $h$ w $\Omega$.

Jeżeli $U$ jest składową spójną $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ taką, że $U \not\subset \Omega$, to dzięki iii) i Propozycji 10.1.ii mamy $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$, $z \in U$, a więc z (10.2)

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in U.$$

Z lematu o produkcji funkcji holomorficznych otrzymamy $h \in \mathcal{O}(U)$. Łącząc to z tym, że $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ wnioskujemy, że $h$ jest funkcją całkowitą. Co więcej

$$\lim_{|z| \to \infty} h(z) = 0,$$

z twierdzenia Liouville'a mamy zatem $h \equiv 0$. Z (10.2) otrzymujemy i). $\square$

Mówimy, że cykl $\Gamma$ jest homologiczny zeru w $\Omega$, jeżeli spełniony jest warunek iii) w Twierdzeniu 10.2.

## 11. Szeregi Laurenta

Pokazaliśmy, że każdą funkcję holomorficzną w kole można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego. Pokażemy teraz, że funkcje określone w pierścieniu

$$P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} = K(z_0, R) \setminus \overline{K}(z_0, r)$$

rozwijają się w uogólniony szereg potęgowy zawierający również potęgi ujemne:

**Twierdzenie 11.1.** (Laurent, 1843, Weierstrass, 1841) *Jeżeli* $f \in \mathcal{O}(P(z_0, r, R))$, *gdzie* $0 \le r < R \le \infty$, *to dla* $z \in P(z_0, r, R)$ *mamy*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k},$$

*(tzn. oba szeregi są zbieżne), gdzie dla dowolnego* $\rho \in (r, R)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11.1}$$

*Dowód.* Niech $r', R'$ będą takie, że $r < r' < R' < R$. Wtedy $\partial P(z_0, r', R')$ jest cyklem (orientacja dodatnia względem wnętrza, czyli zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara na $\partial K(z_0, r')$ i z kierunkiem odwrotnym na $\partial K(z_0, R')$) takim, że

$$\operatorname{Ind}_{\partial P(z_0,r',R')}(z) = \begin{cases} 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{P}(z_0, r', R'), \\ 1, & z \in P(z_0, r', R'). \end{cases}$$

Spełniony jest więc warunek iii) w Twierdzeniu 10.2 (z $\Omega = P(z_0, r, R)$). Dzięki równoważnemu warunkowi ii) dostaniemy teraz niezależność prawej strony (11.1) od $\rho$ (bo funkcja podcałkowa jest holomorficzna w $P(z_0, r, R)$). Z i) otrzymamy natomiast dla $z \in P(z_0, r', R')$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P(z_0,r,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial K(z_0,R)} - \int_{\partial K(z_0,r)} \right).$$

Rozumujemy teraz jak w dowodzie Twierdzenia 8.1. Z (7.2) otrzymamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, & \zeta \in \partial K(z_0, R), \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k}, & \zeta \in \partial K(z_0, r), \end{cases}$$

przy czym zbieżność jest jednostajna względem $\zeta$ na, odpowiednio, $\partial K(z_0, R)$ i $\partial K(z_0, r)$. $\square$

Szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{11.2}$$

nazywamy szeregiem Laurenta. Jest on sumą dwóch szeregów: części regularnej

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$

oraz części osobliwej

$$\sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots$$

Mówimy, że szereg Laurenta (11.2) jest zbieżny w $z$, jeżeli w $z$ zbieżna jest jego część regularna oraz część osobliwa.

**Twierdzenie 11.2.** *Część regularna szeregu Laurenta (11.2) jest zbieżna bezwzględnie i lokalnie jednostajnie w kole $K(z_0,R)$, rozbieżna dla każdego $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{K}(z_0,R)$, gdzie*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

*Część osobliwa szeregu Laurenta (11.2) jest zbieżna bezwzględnie i lokalnie jednostajnie w $\mathbb{C}\setminus\overline{K}(z_0,r)$, rozbieżna dla każdego $z\in K(z_0,r)$, gdzie*

$$r = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{1/k} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to-\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

*Jeżeli $r<R$, to szereg Laurenta (11.2) jest zbieżny bezwzględnie i lokalnie jednostajnie w pierścieniu $P(z_0,r,R)$, rozbieżny dla każdego $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{P}(z_0,r,R)$.*

*Dowód.* Pierwsza część to dokładnie Twierdzenie 7.1. Po podstawieniu

$$w = \frac{1}{z-z_0},$$

część osobliwa będzie miała postać

$$\sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k,$$

a promień zbieżności tego szeregu jest równy $1/r$. Stąd wynika druga część twierdzenia, zaś trzecia jest natychmiastową konsekwencją pierwszych dwóch. $\square$

Z Twierdzenia 11.2 wynika w szczególności, że zbieżność w Twierdzeniu 11.1 jest bezwzględna i lokalnie jednostajna na $P(z_0,r,R)$.

Mamy następująca zasadę identyczności dla szeregów Laurenta:

**Twierdzenie 11.3.** *Jeżeli szeregi Laurenta* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *są jednostajnie zbieżne do tej samej granicy na okręgu* $\partial K(z_0,\rho)$ *dla pewnego* $\rho>0$, *to* $a_n=b_n$ *dla każdego* $n\in\mathbb{Z}$.

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy założyć, że $b_n=0$, $n\in\mathbb{Z}$. Założenie oznacza, że mamy jednostajną zbieżność

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\rho^n e^{int}=0, \quad t\in[0,2\pi]. \tag{11.3}$$

Zbieżność jednostajna implikuje zbieżność w $L^2([0,2\pi])$. Dla $n,m\in\mathbb{Z}$ mamy

$$\langle e^{int},e^{imt}\rangle=\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 2\pi, & n=m.\end{cases}$$

Mnożąc skalarnie obie strony (11.3) przez $e^{imt}$ otrzymamy $a_m=0$, $m\in\mathbb{Z}$. □

**Ćwiczenie** Rozwinąć funkcję $1/(z^2-z)$ w szeregi Laurenta w pierścieniach $\{0<|z|<1\}$ oraz $\{1<|z|<\infty\}$.

## 12. Osobliwości funkcji holomorficznych

Mówimy, że funkcja holomorficzna $f$ ma osobliwość izolowaną w punkcie $z_0$, jeżeli $f\in\mathcal{O}(U\setminus\{z_0\})$, gdzie $U$ jest otwartym otoczeniem punktu $z_0$ w $\mathbb{C}$. Z Twierdzenia 11.1 (dla $r=0$ oraz $R$ takiego, że $K(z_0,R)\subset U$) wynika, że w otoczeniu $z_0$ funkcję $f$ możemy rozwinąć w szereg Laurenta

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{12.1}$$

gdzie współczynniki $a_n$ są wyznaczone jednoznacznie (dzięki Twierdzeniu 11.3; są one dane przez (11.1)). Jeżeli $a_n=0$ dla $n=-1,-2,\dots$, to mówimy, że $f$ ma osobliwość pozorną w $z_0$. Jeżeli istnieje $m\geq 1$ takie, że $a_{-m}\neq 0$ oraz $a_n=0$ dla $n<-m$, to mówimy, że $f$ ma biegun rzędu $m$ w $z_0$ (jeżeli $m=1$, to biegun nazywamy prostym). W pozostałych przypadkach (tzn., gdy istnieje nieskończenie wiele $n<0$ takich, że $a_n\neq 0$) mówimy, że $f$ ma istotną osobliwość w $z_0$.

Jest jasne, że funkcja holomorficzna ma pozorną osobliwość w $z_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy przedłuża się do funkcji holomorficznej w otoczeniu $z_0$ (z tego powodu osobliwości pozorne są również nazywane usuwalnymi). Jeżeli $f$ ma biegun rzędu $m$ w $z_0$, to

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots=\frac{h(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{12.2}$$

gdzie $h$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $z_0$ taką, że $h(z_0)=a_{-m}\neq 0$.

Z drugiej strony, jeżeli $g$ jest holomorficzna w otoczeniu $z_0$, $g \not\equiv 0$ i $g(z_0) = 0$, to

$$g(z) = b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m \widetilde{h}(z),$$

gdzie $m \geq 1$, zaś $\widetilde{h}$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $z_0$ taką, że $\widetilde{h}(z_0) = a_m \neq 0$. Takie $m$ nazywamy krotnością zera funkcji $g$ w $z_0$. Jest to równoważne temu, że

$$g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(m)}(z_0) \neq 0$$

(dzięki wzorowi Taylora).

Z powyższych rozważań widać, że dla funkcji holomorficznej $f$ w otoczeniu $z_0$ mamy

$$f \text{ ma w } z_0 \text{ zero krotności } m \iff 1/f \text{ ma w } z_0 \text{ biegun rzędu } m.$$

Ogólniej, jeżeli $f, g$ są holomorficzne w otoczeniu $z_0$ i mają w $z_0$ zera krotności, odpowiednio, $m$ i $k$, to $f/g$ ma w $z_0$ zero krotności $m - k$, jeżeli $m > k$, oraz biegun rzędu $k - m$, jeżeli $m < k$. (Jeżeli $m = k$, to $f/g$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $z_0$ nieznikającą w $z_0$). W szczególności, funkcja $f/g$ nie może mieć istotnej osobliwości.

*Przykład.* Funkcja

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}$$

ma istotną osobliwość w 0.

Jak wynika z poprzednich rezultatów (z Twierdzeń 4.1 i 6.1), każda funkcja holomorficzna posiadająca osobliwość izolowaną w $z_0$, którą można przedłużyć do funkcji ciągłej w $z_0$, ma w $z_0$ osobliwość pozorną. Ten fakt udowodnił Riemann w 1851 r. Poniższy, ogólniejszy rezultat jest nazywany *twierdzeniem Riemanna o usuwaniu osobliwości*:

**Twierdzenie 12.1.** *Przypuśćmy, że funkcja holomorficzna $f$ ma w $z_0$ osobliwość izolowaną oraz jest ograniczona w otoczeniu $z_0$. Wtedy $f$ ma osobliwość pozorną w $z_0$.*

*Dowód.* Niech $h(z) := (z - z_0) f(z)$. Wtedy dla pewnego otoczeniu $U$ punktu $z_0$ mamy $h \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\}) \cap C(U)$, a stąd $h \in \mathcal{O}(U)$. Ponieważ $h$ ma w $z_0$ zero krotności $\geq 1$, a $z - z_0$ zero krotności 1, to $f(z) = h(z)/(z - z_0)$ ma w $z_0$ osobliwość pozorną. $\square$

**Twierdzenie 12.2.** (Casorati, 1868, Weierstrass, 1876, Sochocki, 1873) *Jeżeli funkcja holomorficzna $f$ ma w $z_0$ istotną osobliwość, to dla każdego odp. małego otwartego otoczenia $V$ punktu $z_0$, zbiór $f(V \setminus \{z_0\})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe, tzn. istnieje $w_0 \in \mathbb{C}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $K(w_0, \varepsilon) \cap f(V \setminus \{z_0\}) = \emptyset$. Oznacza to, że $|f - w_0| \geq \varepsilon$ w $V \setminus \{z_0\}$. Funkcja $g := 1/(f - w_0)$ jest więc ograniczona w $V \setminus \{z_0\}$, z Twierdzenia 12.1 wynika zatem, że ma w $z_0$ pozorną osobliwość. Czyli funkcja $f = w_0 + 1/g$ nie może mieć w $z_0$ istotnej osobliwości - sprzeczność. $\square$

*Uwaga.* Znacznie mocniejsze (ale i trudniejsze do udowodnienia) niż Twierdzenie 12.2 jest tzw. *wielkie twierdzenie Picarda* (1879): przy założeniach Twierdzenia 12.2 zbiór $f(V \setminus \{z_0\})$ omija co najwyżej jedną wartość w $\mathbb{C}$.

**Ćwiczenie** Zweryfikować wielkie twierdzenie Picarda w następujących przypadkach: $e^{1/z}$ (omija jedną wartość), $\cos(1/z)$ (nie omija żadnej wartości).

Możemy teraz skojarzyć rodzaje osobliwości izolowanych z istnieniem odpowiednich granic:

**Twierdzenie 12.3.** *Załóżmy, że funkcja holomorficzna $f$ ma osobliwość izolowaną w $z_0$. Wtedy*

*i) $f$ ma pozorną osobliwość w $z_0$ $\Leftrightarrow$ istnieje $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;*

*ii) $f$ ma biegun w $z_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ (tzn. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$);*

*iii) $f$ ma istotną osobliwość w $z_0$ $\Leftrightarrow$ nie istnieje $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (ani z $\mathbb{C}$ ani $\infty$).*

*Dowód.* i) Natychmiastowa konsekwencja Twierdzenia 12.1 (a nawet Twierdzeń 4.1 i 6.1).

ii) Z (12.2) wynika $\Rightarrow$, natomiast $\Leftarrow$ wnioskujemy z i) ($f$ nie ma pozornej osobliwości) i Twierdzenia 12.2 ($f$ nie ma istotnej osobliwości).

iii) Natychmiastowa konsekwencja i) oraz ii). $\square$

## 13. Twierdzenie o residuach

Niech $f$ będzie funkcją holomorficzną posiadającą osobliwość izolowaną w $z_0$. W pewnym otoczeniu $z_0$ mamy rozwinięcie $f$ w szereg Laurenta (12.1), który jest jednostajnie zbieżny na $\partial K(z_0, r)$ dla $r > 0$ odp. małego. Mamy wtedy

$$\int_{\partial K(z_0,r)} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\partial K(z_0,r)} (z - z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{13.1}$$

Liczbę $a_{-1}$ z rozwinięcia (12.1) nazywamy <u>residuum</u> funkcji $f$ w punkcie $z_0$ i oznaczamy $\operatorname{res}_{z_0} f$.

**Ćwiczenie** Skonstruować funkcję $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ mającą istotną osobliwość w 0, biegun rzędu 2 w 1 oraz taką, że $\operatorname{res}_1 f = 3$.

Przypuśćmy, że $f$ ma w $z_0$ biegun rzędu $m$. Wtedy

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m},$$

gdzie funkcja

$$h(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots$$

jest holomorficzna w otoczeniu $z_0$. Ze wzoru Taylora otrzymamy

$$a_{-m+k} = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Dla $k = m - 1$ dostaniemy następujący rezultat, który jest podstawowym narzędziem przy obliczaniu residuów w przypadku biegunów:

**Propozycja 13.1.** *Jeżeli funkcja holomorficzna $f$ ma biegun rzędu $m$ w $z_0$, to*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} \left((z-z_0)^m f(z)\right)\Big|_{z=z_0}. \quad \square$$

Sformułujemy teraz i udowodnimy *twierdzenie o residuach*:

**Twierdzenie 13.2.** *Niech $\Gamma$ będzie cyklem homologicznym zeru w obszarze $\Omega$. Załóżmy, że $z_1, \dots, z_k \in \Omega \setminus \Gamma$ ($z_j \neq z_l$ dla $j \neq l$) i że $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$. Wtedy*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j) \operatorname{res}_{z_j} f.$$

*Dowód.* Znajdziemy $r > 0$ takie, że $\overline{K}(z_j, r) \cap \overline{K}(z_l, r) = \emptyset$ dla $j \neq l$ oraz $\overline{K}(z_j, r) \cap \Gamma = \emptyset$, $j, l = 1, \dots, k$. Zastosujemy Twierdzenie 10.2 dla cyklu

$$\widetilde{\Gamma} := \Gamma - \sum_{j=1}^k \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j)\, \partial K(z_j, r)$$

i obszaru $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$. Spełniony jest warunek iii), zatem z ii)

$$0 = \int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^k \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j) \int_{\partial K(z_j, r)} f(z)dz$$

i wystarczy skorzystać z (13.1). $\square$

## 13a. Obliczanie pewnych całek rzeczywistych

Twierdzenie o residuach pozwala obliczyć wiele rzeczywistych całek określonych. Poniżej przedstawimy kilka rodzajów takich całek. Będzie to służyło przede wszystkim zaprezentowaniu możliwych metod zastosowania twierdzenia o residuach, z całą pewnościa poniższa lista nie wyczerpuje przypadków, gdzie można je użyć.

I) Całki postaci

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt,$$

gdzie $R$ jest funkcją wymierną (czyli $R = P/Q$, gdzie $P$ i $Q$ są wielomianami dwóch zmiennych; wielomian $Q$ w tym przypadku nie może mieć zer na rzeczywistym okręgu jednostkowym). Podstawiając $z = e^{it}$ otrzymamy

$$\cos t = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{z + 1/z}{2},$$
$$\sin t = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

oraz $dz = ie^{it}dt = izdt$. Mamy więc

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{\partial K(0,1)} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{dz}{iz} = \int_{\partial K(0,1)} \widetilde{R}(z)dz,$$

gdzie $\widetilde{R}$ jest funkcją wymierną, nie mającą osobliwości na $\partial K(0,1)$.

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

II) Całki postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

gdzie $P, Q$ są wielomianami rzeczywistymi takimi, że $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$ oraz $\deg Q \geq \deg P + 2$ (mamy wtedy pewność, że funkcja $P/Q$ jest sumowalna na $\mathbb{R}$). Dla $R > 0$ przez $C_R^+ := \{z \in \partial K(0,R) : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ oznaczmy górną połowę okręgu $\partial K(0,R)$ (o początku w $R$ i końcu w $-R$). Dla $R$ odp. dużego wielomian $Q(z)$ nie ma zer na $\partial K(0,R)$ oraz

$$\left|\int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \leq CR^{\deg P - \deg Q}\pi R \to 0,$$

gdy $R \to \infty$. Mamy więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

co łatwo policzymy przy pomocy twierdzenia o residuach.

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

III) Całki postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\cos x}{Q(x)}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\sin x}{Q(x)}\,dx, \tag{13.2}$$

gdzie $P, Q$ są wielomianami rzeczywistymi. Jeżeli $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$ oraz $\deg Q \geq \deg P + 2$, to funkcje podcałkowe w (13.2) są sumowalne. Zauważmy, że całki (13.2) są, odpowiednio, częścią rzeczywistą i urojoną całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{ix}}{Q(x)}\,dx.$$

W dodatku, dzięki temu, że $|e^{iz}| \leq 1$, gdy $\operatorname{Im} z \geq 0$, mamy

$$\left|\int_{C_R^+} \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}\,dz\right| \leq CR^{\deg P - \deg Q}\pi R \to 0 \tag{13.3}$$

(zauważmy, że nie moglibyśmy powtórzyć tego rozumowania, gdybyśmy zamiast $e^{iz}$ wzięli funkcje, odpowiednio, $\cos z$ i $\sin z$). Podobnie jak poprzednio wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o residuach całkując funkcję $P(z)e^{iz}/Q(z)$ po brzegu odp. półkoła biorąc części rzeczywiste i urojone.

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(3x)}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4e^6}$.

Jeżeli wielomiany $P, Q$ są takie, że $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$ i $\deg Q = \deg P + 1$, to można pokazać, że funkcje podcałkowe w (13.2) nie są sumowalne na $\mathbb{R}$. Pokażemy jednak, że w tym wypadku istnieją wartości główne całek (13.2) (jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\substack{a'\to a^- \\ b'\to b^+}} \int_{a'}^{b'} f(x)dx,$$

to nazywamy ją wartością główną całki $\int_a^b f(x)dx$ i oznaczamy także $\int_a^b f(x)dx$). Powtarzamy poprzednie rozumowanie korzystając z następującego *lematu Jordana*; dostaniemy ponownie formułę (13.4).

**Lemat 13.3.** *Jeżeli wielomiany $P, Q$ są takie że $\deg Q \geq \deg P + 1$, to*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}\,dz = 0.$$

*Dowód.* Będziemy szacować trochę dokładniej niż w (13.3). Dla $z = x + iy \in C_R^+$ i $R$ odp. dużego mamy $|P(z)/Q(z)| \leq C/R$ oraz $|e^{iz}| = e^{-y}$. Parametryzując $C_R^+$ przez $Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, otrzymamy

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}\,dz \right| \leq C \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt. \tag{13.5}$$

Teza lematu wynika teraz np. z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. □

**Ćwiczenie** Udowodnić zbieżność prawej strony (13.5) do 0 bez stosowania twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej: korzystając z tego, że $-\sin t \leq -2t/\pi$ dla $t \in [0, \pi/2]$, pokazać, że

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t}dt \leq \pi\frac{1-e^{-R}}{R}.$$

Możemy obliczyć wartości główne całek (13.2) dla wielomianów rzeczywistych $P, Q$ takich, że $\deg Q \geq \deg P + 1$ dopuszczając dodatkowo możliwość zerowania się wielomianu $Q$ na $\mathbb{R}$ (przez wartość główną takiej całki rozumiemy granicę całek po skończonej sumie odpowiednich przedziałów zwartych). Możemy to zrobić w przypadku, gdy funkcja $Q(z)$ ma pojedyncze zera na $\mathbb{R}$. Wynika to z następującego lematu:

**Lemat 13.4.** *Załóżmy, że funkcja holomorficzna $f$ ma prosty biegun w $z_0$ i że $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Dla $r > 0$ niech $\gamma_r(t) := z_0 + re^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Wtedy*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta-\alpha)\operatorname{res}_{z_0} f.$$

*Dowód.* Znajdziemy funkcję holomorficzną $g$ w otoczeniu $z_0$ taką, że

$$f(z) = \frac{a_1}{z - z_0} + g'(z).$$

Wtedy dla $r > 0$ odp. małego mamy

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta - \alpha)a_{-1} + g(z_0 + re^{i\beta}) - g(z_0 + re^{i\alpha})$$

i przy $r \to 0$ dostaniemy to co trzeba. □

**Ćwiczenie** Pokazać, że (wartość główna) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}\,dx = \pi\cos 2.$

IV) Całki postaci

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{x^a Q(x)}\,dx, \tag{13.6}$$

gdzie $0 < a < 1$, zaś $P, Q$ są wielomianami rzeczywistymi takimi, że $\deg Q \geq \deg P + 1$ oraz $Q \neq 0$ na $[0, \infty)$. Przy takich założeniach funkcja podcałkowa jest sumowalna na $(0, \infty)$. Rozpatrzmy funkcję

$$g(z) := z^a = e^{a\log z} = e^{a(\log|z| + i\arg z)} = |z|^a e^{ia\arg z}.$$

Wybieramy argument $z$ z przedziału $(0, 2\pi)$, tak, że $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [0, \infty))$. Dla $x \in (0, \infty)$ mamy

$$g^+(x) := \lim_{y\to 0^+} g(x+iy) = x^a,$$
$$g^-(x) := \lim_{y\to 0^-} g(x+iy) = e^{2\pi a i}x^a.$$

Można pokazać **Ćwiczenie**, że przy powyższych założeniach mamy

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial K(z_0,R)} \frac{P(z)}{z^a Q(z)}\,dz = \lim_{r\to 0^+} \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{P(z)}{z^a Q(z)}\,dz = 0.$$

Całkując funkcję $P(z)/(z^a Q(z))$ po cyklu $\partial K(0,R) + [R,r] - \partial K(0,r) + [r,R]$, przy czym rozpatrujemy wartości $g^-$ na $[R,r]$ oraz $g^+$ na $[r,R]$, obliczymy (13.6).

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Podobnie jak poprzednio, korzystając z Lematu 13.4, możemy także policzyć wartość główną całki (13.6), jeżeli $Q$ ma pojedyncze zera na $(0, \infty)$.

**Ćwiczenie** Pokazać, że $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

Przy pomocy twierdzenia o residuach można policzyć wiele innych rodzajów całek określonych.

**Ćwiczenie** Całkując po odpowiednio zmodyfikowanym brzegu półkola $K(0,R)\cap\{\operatorname{Re} z>0\}$ pokazać, że
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}dx=-\frac{\pi^2}{4}.$$

**Ćwiczenie** Całkując funkcję $e^{az}/(1+e^z)$ po brzegu prostokąta o wierzchołkach w $\pm R$, $\pm R+2\pi i$ pokazać, że
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx=\frac{\pi}{\sin(a\pi)},\quad 0<a<1.$$

**Ćwiczenie** Pokazać, że
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1-e^x}\,dx=\pi\cot(a\pi),\quad 0<a<1.$$

**Ćwiczenie** Całkując funkcję $1/(1+z^3)$ po brzegu zbioru $\{\rho e^{it}:0\le t\le 2\pi/3,\ 0\le\rho\le R\}$ pokazać, że
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi\sqrt3}{9}.$$

## 14. Lokalizowanie zer funkcji holomorficznych

Przedstawimy teraz pewne ogólne własności funkcji holomorficznych, które można udowodnić przy pomocy twierdzenia o residuach. Pierwszą z nich będzie *zasada argumentu*, która pozwala lokalizować zera oraz bieguny funkcji holomorficznych. Przed jej sformułowaniem jedna uwaga techniczna: jeżeli $\Gamma=\gamma_1+\dots+\gamma_k$ jest łańcuchem, a $f$ funkcją holomorficzną w otoczeniu $\Gamma^*$, to przez $f\circ\Gamma$ rozumiemy łańcuch $f\circ\gamma_1+\dots+f\circ\gamma_k$. Jest oczywiste, że jeżeli $\Gamma$ jest cyklem, to jest nim także $f\circ\Gamma$.

Wprowadzamy jeszcze jedną definicję: funkcję $f$ nazywamy meromorficzną w obszarze $\Omega$, jeżeli istnieje zbiór dyskretny $A\subset\Omega$ taki, że $f$ jest holomorficzna w $\Omega\setminus A$ oraz w każdym punkcie $A$ funkcja $f$ ma albo biegun albo pozorną osobliwość.

**Twierdzenie 14.1.** *Załóżmy, że $D$ jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$ takim, że $\partial D=\Gamma^*$ dla pewnego cyklu takiego, że $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)=1$ dla $z\in D$. Niech $f$ będzie funkcją meromorficzną w otoczeniu $\overline{D}$ nie mającą zer ani biegunów na $\partial D$. Wtedy*
$$\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)=Z-B,$$
*gdzie $Z$ oznacza liczbę zer funkcji $f$ w $D$ liczonych razem z krotnościami, natomiast $B$ sumę rzędów wszystkich biegunów funkcji $f$ w $D$.*

*Dowód.* Zauważmy, że (podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 10.8)
$$\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

Do obliczenia tej całki wykorzystamy twierdzenie o residuach. Zauważmy, że funkcja podcałkowa $f'/f$ ma osobliwości dokładnie tam, gdzie $f$ ma zera lub bieguny. Jeżeli $f$ ma w $z_0$ zero krotności $m$, to, zapisując $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$, gdzie $h(z_0) \neq 0$, mamy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

a zatem $\operatorname{res}_{z_0}(f'/f) = m$. Powyższe rozumowanie działa także, gdy $m$ jest ujemną liczbą całkowitą. Oznacza to, że jeżeli $f$ ma w $z_0$ biegun rzędu $k$, to $\operatorname{res}_{z_0}(f'/f) = -k$. Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o residuach. $\square$

*Przykład.* Szukamy ile pierwiastków w półpłaszczyźnie $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ ma wielomian $P(z) := z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$. Dla $R$ odp. dużego badamy ile razy obraz przez $P$ brzegu półkola $\{|z| \leq R,\ \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$P(it) = t^4 - 3t^2 + 2 + it(1 - 2t^2).$$

Sprawdzamy najpierw kiedy $P(it)$, gdy $t$ przechodzi od $R$ do $-R$, przecina półosie, dostaniemy następującą tabelę:

| $t$ | $\operatorname{Re} P(it)$ | $\operatorname{Im} P(it)$ |
|---|---|---|
| $R$ | $++$ | $+$ |
| $\sqrt{2}$ | $0$ | $+$ |
| $1$ | $0$ | $+$ |
| $\sqrt{2}/2$ | $+$ | $0$ |
| $0$ | $+$ | $0$ |
| $-\sqrt{2}/2$ | $+$ | $0$ |
| $-1$ | $0$ | $-$ |
| $-\sqrt{2}$ | $0$ | $-$ |
| $-R$ | $++$ | $-$ |

Pierwsza i ostatnia linia oznaczają, że część rzeczywista jest znacznie większa niż część urojona, tzn. argument $P(iR)$ dąży do 0, gdy $R \to \pm\infty$. Z powyższego zachowania się krzywej $P(it)$ wnioskujemy, że „przychodzi z kierunku wschodniego i tam wraca” nie obracając się przy tym wokół zera. Ponieważ dla dużych $z$ wielomian $P(z)$ zachowuje się jak część wiodąca $z^4$, która dla $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, obraca się dwa razy wokół zera, wnioskujemy, że w rozpatrywanym obszarze $P$ ma dwa pierwiastki (liczone z krotnościami). Pozostaje jeszcze pytanie czy istnieje pierwiastek podwójny? Jeżeli tak, to spełnia on układ równań

$$\begin{cases} z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0 \\ 4z^3 + 6z^2 + 6z + 1 = 0, \end{cases}$$

który, jak można pokazać **Ćwiczenie**, nie ma rozwiązań.

**Ćwiczenie** Znaleźć liczbę pierwiastków wielomianu $2z^4 + z^3 - 5z^2 + z + 2$ w półpłaszczyźnie $\{\operatorname{Re} z < 0\}$.

**Twierdzenie 14.2.** (Rouché, 1862) *Niech $D$ będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$. Załóżmy, że $f, g$ są funkcjami holomorficznymi w $D$, ciągłymi na $\overline{D}$ i takimi, że $|g| < |f|$ na $\partial D$. Wtedy $f$ i $f+g$ mają tyle samo zer w $D$ liczonych z krotnościami.*

*Dowód.* Dzięki Lematowi 10.3 możemy założyć, że $D$ jest jak w Twierdzeniu 14.1, natomiast $f$ i $g$ są holomorficzne w otoczeniu $\overline{D}$. Dla $t \in [0,1]$ na $\Gamma^* = \partial D$ mamy $|f + tg| \geq |f| - t|g| > 0$. Funkcja

$$[0,1] \ni t \longmapsto \mathrm{Ind}_{(f+tg)\circ\Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\zeta) + tg'(\zeta)}{f(\zeta) + tg(\zeta)}\,d\zeta \in \mathbb{Z},$$

jest więc ciągła, musi być zatem stała. Dla $t = 0$ i $t = 1$ z zasady argumentu dostaniemy tezę. $\square$

**Ćwiczenie** Znaleźć liczbę pierwiastków wielomianu $z^6 + 4z^2 - 1$ w kole $K(0,1)$.

Korzystając z twierdzenia Rouchégo można podać kolejny dowód zasadniczego twierdzenia algebry: jeżeli $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, jest wielomianem zespolonym, to znajdziemy $R > 0$ takie, że $|a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}| < |a_n| R^n$ dla $z \in \partial K(0,R)$. Wnioskujemy, że $P$ ma w $K(0,R)$ tyle samo zer liczonych z krotnościami co $a_n z^n$, czyli $n$.

Możemy teraz opisać topologiczne zachowanie się funkcji holomorficznych w pobliżu zera krotności $m$:

**Twierdzenie 14.3.** *Jeżeli funkcja holomorficzna $f$ ma w $z_0$ zero krotności $m$, to istnieje otoczeniu $U$ punktu $z_0$ takie, że odwzorowanie $f$ jest $m$-krotne na $U \setminus \{z_0\}$ (tzn. dla każdego $w \in f(U) \setminus \{0\}$) zbiór $f^{-1}(w) \cap (U \setminus \{z_0\})$ jest $m$-elementowy).*

*Dowód.* Zapiszmy $f(z) = a_m(z - z_0)^m + g(z)$, gdzie $a_m \neq 0$, zaś $g$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $z_0$ taką, że $|g(z)| \leq C|z - z_0|^{m+1}$. Dla $r > 0$ odp. małego mamy $\rho := |a_m| r^m - C r^{m+1} > 0$. Dla $w \in K(0,\rho)$ mamy

$$|g(z) - w| < C r^{m+1} + \rho = |a_m (z - z_0)^m|, \quad z \in \partial K(z_0, r),$$

a więc z twierdzenia Rouchégo wynika, że funkcja $f - w$ ma w $K(z_0, r)$ $m$ zer liczonych z krotnościami. Jeżeli któreś z tych zer nie jest pojedyncze, to mamy w nim $f' = 0$. Dla $r > 0$ odp. małego mamy jednak $f' \neq 0$ na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ (bo inaczej z zasady identyczności funkcja $f$ byłaby stała, co jest niemożliwe w naszym przypadku), czyli tam wszystkie zera muszą być pojedyncze. Bierzemy wtedy $U := f^{-1}(K(0,\rho)) \cap K(z_0, r)$. $\square$

## 15. Odwzorowania konforemne

Niech $D$ będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $f : D \to \mathbb{C}$ nazywamy lokalnie konforemnym, jeżeli $f$ jest lokalnym dyfeomorfizmem klasy $C^1$ oraz $f$ zachowuje kąty oraz orientację, tzn. jeżeli $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ są krzywymi klasy $C^1$ takimi, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1' \neq 0$, $\gamma_2' \neq 0$, to kąt zorientowany pomiędzy wektorami $\gamma_1'(0)$ a $\gamma_2'(0)$ jest równy kątowi zorientowanemu pomiędzy wektorami $(f \circ \gamma_1)'(0)$ a $(f \circ \gamma_2)'(0)$.

**Propozycja 15.1.** *Dla odwzorowania $f : D \to \mathbb{C}$ NWSR*
*i) $f$ jest lokalnie konforemne;*
*ii) $f \in \mathcal{O}(D)$, $f' \neq 0$;*
*iii) $f \in \mathcal{O}(D)$, $f$ jest lokalnie jednokrotne.*

*Dowód.* ii)$\Leftrightarrow$iii) wynika natychmiast z Propozycji 2.4 i Twierdzenia 14.3.
i)$\Leftrightarrow$ii) Przypomnijmy (zob. (2.7)), że dla dowolnej krzywej $\gamma$ mamy

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(0))\,\gamma'(0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(0))\,\overline{\gamma'(0)}.$$

Zachowywanie kątów zorientowanych jest więc równoważne temu, że

$$\arg \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)} = \arg \frac{f_z(z_0)\gamma_1'(0) + f_{\bar{z}}(z_0)\overline{\gamma_1'(0)}}{f_z(z_0)\gamma_2'(0) + f_{\bar{z}}(z_0)\overline{\gamma_2'(0)}},$$

gdzie $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. Jeżeli więc $f$ jest funkcją holomorficzną taką, że $f' = \partial f/\partial z \neq 0$, to $f$ jest lokalnym dyfeomorfizmem (bo $Jac\, f = |f'|^2$) oraz zachowuje kąty i orientację.

Z drugiej strony, jeżeli rozpatrzymy krzywe postaci $\gamma_\vartheta(t) = z_0 + e^{i\vartheta}t$ dla ustalonego $z_0 \in D$ i dowolnego $\vartheta \in \mathbb{R}$, to

$$\arg \frac{\gamma_\vartheta'(0)}{\gamma_0'(0)} = \arg e^{i\vartheta},$$

natomiast

$$\arg \frac{(f \circ \gamma_\vartheta)'(0)}{(f \circ \gamma_0)'(0)} = \arg \frac{f_z(z_0)e^{i\vartheta} + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-i\vartheta}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)}.$$

Jeżeli więc $f$ jest odwzorowaniem lokalnie konforemnym, to w szczególności dla każdego $\vartheta \in \mathbb{R}$ argument liczby $f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2i\vartheta}$ byłby niezależny od $\vartheta$, a jest to możliwe tylko wtedy, gdy $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$. $\square$

Odwzorowanie $f : D \to G$, gdzie $D, G$ są obszarami w $\mathbb{C}$, nazywamy konforemnym (lub też biholomorficznym), jeżeli $f$ jest holomorficzną bijekcją. Z Propozycji 15.1 wynika, że wtedy $f$ jest w szczególności lokalnie konforemne, zaś dzięki Propozycji 2.4 odwzorowanie $f^{-1}$ jest także konforemne. Dwa obszary nazywamy konforemnymi, jeżeli istnieje odwzorowanie konforemne pomiędzy nimi. Zauważmy, że każde odwzorowanie holomorficzne jednokrotne $f$ jest odwzorowaniem konforemnym na obraz.

*Przykład.* Płaszczyzna zespolona $\mathbb{C}$ nie jest obszarem konforemnym z $\Delta$ - jest to natychmiastowy wniosek z twierdzenia Liouville'a.

Odwzorowanie konforemne $f : D \to D$ nazywamy automorfizmem obszaru $D$, przez $\mathrm{Aut}\,(D)$ oznaczamy zbiór wszystkich automorfizmów obszaru $D$. Ma on strukturę grupy (względem składania odwzorowań). Zauważmy, że jeżeli obszary $D$ i $G$ są konforemne, to grupy $\mathrm{Aut}\,(D)$ i $\mathrm{Aut}\,(G)$ są izomorficzne: jeżeli $f : D \to G$ jest odwzorowaniem konforemnym, to odwzorowanie

$$\mathrm{Aut}\,(D) \ni g \longmapsto f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}\,(G)$$

jest izomorfizmem.

Opiszemy teraz dokładnie automorfizmy $\Delta$ oraz $\mathbb{C}$:

**Twierdzenie 15.2.** $\mathrm{Aut}\,(\Delta) = \left\{\lambda\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} : \lambda, a \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, |a| < 1\right\}.$

*Dowód.* W celu wykazania $\supset$ możemy założyć, że $\lambda = 1$. Dla $a \in \Delta$ oznaczmy

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Zauważmy, że

$$|1-\bar{a}z|^2 - |z-a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2),$$

skąd wynika, że $T_a(\Delta) \subset \Delta$. Łatwo sprawdzić, że $T_{-a}$ jest odwzorowaniem odwrotnym do $T_a$, skąd wynika, że $T_a \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$.

W celu wykazania $\subset$ skorzystamy z *lematu Schwarza* (1884):

**Lemat 15.3.** *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta)$ jest takie, że $f(0) = 0$, to*

$$|f(z)| \le |z|, \quad z \in \Delta, \quad \textit{oraz} \;\; |f'(0)| \le 1.$$

*Co więcej, jeżeli $|f(z_0)| = |z_0|$ dla pewnego $z_0 \in \Delta_*$ lub $|f'(0)| = 1$, to $f$ jest postaci $f(z) = \lambda z$, gdzie $|\lambda| = 1$, tzn. $f$ jest obrotem.*

*Dowód.* Funkcja

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & z \in \Delta_*, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

jest holomorficzna w $\Delta$. Dla $r \in (0,1)$ mamy $|g(z)| \le 1/r$, jeżeli $|z| = r$. Z zasady maksimum wynika zatem, że $|g(z)| \le 1/r$, gdy $|z| \le r$, otrzymamy więc, że $|g| \le 1$ w $\Delta$. To pokazuje pierwszą część lematu. Druga część wynika z tego, że jeżeli $|g(z_0)| = 1$ dla pewnego $z_0 \in \Delta$, to funkcja $g$ jest stała. $\square$

*Koniec dowodu Twierdzenia 15.2.* Niech $f \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$. Odwzorowanie $\widetilde{f} := f \circ T_a \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$ spełnia $\widetilde{f}(0) = 0$, jeżeli $a = -f^{-1}(0)$. Z lematu Schwarza (lub z nierówności Cauchy'ego) wynika, że $|\widetilde{f}'(0)| \le 1$. Z drugiej strony, $1 \ge |(\widetilde{f}^{-1})'(0)| = 1/|\widetilde{f}'(0)|$, a więc $|\widetilde{f}'(0)| = 1$. Korzystając z ostatniej części lematu Schwarza znajdziemy $\lambda$, $|\lambda| = 1$, takie, że $\widetilde{f}(\zeta) = \lambda\zeta$, $\zeta \in \Delta$. Stąd $f = \lambda T_{-a}$. $\square$

**Propozycja 15.4.** $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}) = \{az + b : a \in \mathbb{C}_*, b \in \mathbb{C}\}$.

*Dowód.* $\supset$ jest oczywiste. Jeżeli $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$, to $f$ ma osobliwość izolowaną w $\infty$, z Twierdzenia 12.2 wynika, że nie jest to osobliwość istotna (bo $f$ jest bijekcją). Funkcja $f$ musi więc być wielomianem, jeżeli stopień tego wielomianu byłby różny od 1, to $f$ nie byłoby bijekcją. $\square$

**Ćwiczenie** Pokazać, że dla każdych par różnych punktów $z_1, z_2$ oraz $w_1, w_2$ w $\mathbb{C}$ ($z_1 \ne z_2$, $w_1 \ne w_2$) istnieje dokładnie jedno $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$ takie, że $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2$.

Podstawowym rezultatem w teorii odwzorowań konforemnych jest następujące *twierdzenie Riemanna* (1851 - pierwsze precyzyjne dowody podali Koebe i Poincaré na początku XX w.). Podamy je bez dowodu:

**Twierdzenie 15.5.** *Każdy obszar jednospójny w $\mathbb{C}$, z wyjątkiem całej płaszczyzny, jest konforemny z dyskiem jednostkowym $\Delta$.*

## 16. Sfera Riemanna

Sfera Riemanna $\mathbb{P} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ to przestrzeń topologiczna będąca uzwarceniem $\mathbb{C}$. Jeżeli $\Omega$ jest obszarem w $\mathbb{P}$, to możemy mówić o funkcjach holomorficznych na $\Omega$: funkcja $f$ jest holomorficzna w otoczeniu $\infty$, jeżeli funkcja $\zeta \mapsto f(1/\zeta)$ jest holomorficzna w otoczeniu 0. Możemy także mówić o funkcjach holomorficznych $\Omega \to \mathbb{P}$: w przypadku, gdy $f(z_0) = \infty$, to żądamy by funkcja $1/f$ była holomorficzna w otoczeniu $z_0$. Dla obszarów $D, G \subset \mathbb{P}$ odwzorowania konforemne i automorfizmy definiujemy oczywiście tak jak poprzednio.

**Propozycja 16.1.** *i)* $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{P}) = \{$*funkcje meromorficzne na* $\Omega\}$*;*
*ii)* $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P}) = \{$*wielomiany*$\}$*;*
*iii)* $\mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P}) \setminus \{\infty\} = \{$*funkcje wymierne*$\}$.

*Dowód.* i) Spełnianie przez funkcję $f$ jakiegokolwiek z tych dwóch warunków oznacza, że w otoczeniu każdego punktu $f$ lub $1/f$ jest holomorficzna.

ii) Jeśli funkcja całkowita ma nie jest wielomianem, to w $\infty$ ma istotną osobliwość.

iii) Niech $f = P/Q$ będzie funkcją wymierną, gdzie $P, Q$ są wielomianami bez wspólnego dzielnika (czyli ich zbiory zer są rozłączne). Jest oczywiste, że $f|_{\mathbb{C}\setminus Q^{-1}(0)}$ jest funkcją holomorficzną, przedłużającą się do odwzorowania ciągłego $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$. Z twierdzenia Riemanna o usuwaniu osobliwości wynika więc, że $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P})$.

Załóżmy z kolei, że $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P})$, $f \neq const$. Wtedy zbiór $f^{-1}(\infty)$ jest skończony (bo gdyby nie był, to ze zwartości $\mathbb{P}$ miałby punkt skupienia, więc z zasady identyczności wynikałoby, że $f = const$). Stosując zmianę zmiennych w $\mathbb{P}$ postaci $z' = 1/(z - z_0)$, gdzie $z_0 \notin f^{-1}(\infty)$, bez straty ogólności możemy założyć, że zbiór $f^{-1}(\infty) = \{z_1, \dots, z_n\}$ nie zawiera $\infty$. Wtedy funkcja $f|_{\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}}$ jest holomorficzna oraz z ciągłości $f$ na $\mathbb{P}$ oczywiście mamy $\lim_{z\to z_j} f(z) = \infty$, czyli $f$ ma bieguny w $z_1, \dots, z_n$. Istnieją zatem liczby naturalne $m_1, \dots, m_n$ takie, że

$$P(z) := (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_n)^{m_n} f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Co więcej, $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$ (bo $f(\infty) \neq \infty$), czyli $P$ jest wielomianem. $\square$

**Propozycja 16.2.** $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}) = \left\{\dfrac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\right\}$.

*Dowód.* Niech $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ będą takie, że $ad - bc \neq 0$. Jeżeli $c \neq 0$, to

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}, \tag{16.1}$$

skąd łatwo wynika $\supset$ (jeżeli $c = 0$, to mamy odwzorowanie liniowe). Dla $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ korzystamy z Propozycji 15.4: jeżeli $f(\infty) = \infty$, to $f|_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$, jeżeli zaś $f(\infty) \in \mathbb{C}$ to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \frac{1}{f(z) - f(\infty)} \in \mathbb{C}$$

jest liniowe dzięki Propozycji 16.1.ii, skąd otrzymujemy $\subset$. $\square$

**Ćwiczenie** Pokazać, że dla każdej pary trójek różnych punktów $z_1, z_2, z_3$ oraz $w_1, w_2, w_3$ z $\mathbb{P}$ istnieje dokładnie jedno $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{P})$ takie, że $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.

Elementy $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{P})$ nazywamy homografiami. Z (16.1) wynika, że każda homografia jest złożeniem odwzorowań liniowych i odwzorowania $z \mapsto 1/z$. Dzięki temu można pokazać, że (**Ćwiczenie**)

i) każda homografia przekształca okrąg w $\mathbb{P}$ (tj. okrąg lub prostą w $\mathbb{C}$) w okrąg w $\mathbb{P}$;

ii) każda homografia zachowuje *dwustosunek* każdej czwórki punktów:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}, \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}.$$

**Ćwiczenie** Znaleźć odwzorowanie konforemne $\Delta \to \mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H} := \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$. Pokazać, że $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{H}) = \left\{\frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0\right\}$. Wywnioskować, że grupa $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$ jest izomorficzna z grupą $PSL(\mathbb{R}, 2)$.

**Ćwiczenie** i) Pokazać, że wszystkie inwolucje (tj. elementy $f \neq id$ takie, że $f^2 = id$) grupy $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$ są postaci $\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, $a \in \Delta$.

ii) Wykazać, że inwolucje w $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$ nigdy nie są przemienne ze sobą.

iii) Pokazać, że wszystkie inwolucje grupy $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$ są postaci $-z + b$, $b \in \mathbb{C}$ i że nigdy nie są one przemienne ze sobą.

iv) Udowodnić, że iloczyny dwóch inwolucji w $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$ są zawsze przemienne, natomiast w $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$ zwykle nie są.

v) W grupie $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{P})$ znaleźć przemienne inwolucje. Wywnioskować, że żadna para z grup $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$, $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$ i $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{P})$ nie jest izomorficzna (w sensie teorii grup).

## 17. Funkcje harmoniczne

Funkcję $h : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$) nazywamy harmoniczną, jeżeli $h$ jest klasy $C^2$ oraz

$$\Delta h := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Zbiór funkcji harmonicznych w $\Omega$ oznaczamy $\mathcal{H}(\Omega)$. Można łatwo sprawdzić, że (**Ćwiczenie**)

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Korzystając z tego (i odpowiednika (2.7)) dostaniemy następujące związki funkcji harmonicznych z holomorficznymi:

**Propozycja 17.1.** *i)* $f \in \mathcal{O}(\Omega, \widetilde{\Omega})$, $h \in \mathcal{H}(\widetilde{\Omega}) \;\Rightarrow\; h \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$;

*ii)* $f \in \mathcal{O}(\Omega) \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

*iii)* $f \in \mathcal{O}(\Omega), f \neq 0 \;\Rightarrow\; \log|f| \in \mathcal{H}(\Omega)$. □

Lokalnie zachodzi również rezultat odwrotny do ii):

**Twierdzenie 17.2.** *Jeżeli $u$ jest funkcją harmoniczną w kole otwartym, to znajdziemy w nim funkcję holomorficzną $f$ taką, że $u = \mathrm{Re}\, f$. Jest ona jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do stałej.*

*Dowód.* Zauważmy, że jeżeli funkcja $f = u + iv$ byłaby holomorficzna, to z równań Cauchy'ego-Riemanna mielibyśmy $f' = u_x + iv_x = u_x - iu_y$. Jeżeli teraz $u$ jest harmoniczna, to funkcja $g := u_x - iu_y$ jest holomorficzna (bo spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna), więc w kole (który jest obszarem gwiaździstym) ma pierwotną $f = \widetilde{u} + iv$. Mamy $g = f' = \widetilde{u}_x + iv_x = \widetilde{u}_x - i\widetilde{u}_y$, czyli $u_x = \widetilde{u}_x$, $u_y = \widetilde{u}_y$. Stąd $\widetilde{u} = u + const$ i możemy założyć, że $\widetilde{u} = u$. Podobne rozumowanie pokazuje także, że $f$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej. $\square$

Z twierdzenia Riemanna wynika, że w Twierdzeniu 17.2 moglibyśmy wziąć dowolny obszar jednospójny.

**Wniosek 17.3.** *Funkcje harmoniczne są klasy $C^\infty$.* $\square$

Funkcje harmoniczne $u, v$ nazywamy sprzężonymi, jeżeli $u + iv$ jest funkcją holomorficzną.

*Przykład.* Funkcja $\log|z|$ jest harmoniczna w $\mathbb{C}_*$. W $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ funkcją do niej sprzężoną jest $\operatorname{Arg} z$, której jednak nie można ciągle przedłużyć na $\mathbb{C}_*$. Pokazuje to, że funkcja $\log|z|$ nie ma funkcji sprzężonej w $\mathbb{C}_*$.

**Ćwiczenie** Znaleźć funkcję sprzężoną do funkcji $x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + x$.

Jeżeli $u, v$ są sprzężonymi funkcjami harmonicznymi, to z równań Cauchy'ego-Riemanna natychmiast wynika, że $u_x v_x + u_y v_y = 0$. Oznacza to, że gradienty obu funkcji w danym punkcie są do siebie prostopadłe, skąd wnioskujemy, że w przypadku generycznym (gdy te gradienty nie znikają) krzywe poziomicowe funkcji sprzężonych przecinają się pod kątem prostym.

Przypuśćmy teraz, że $h$ jest funkcją harmoniczną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$. Dzięki Twierdzeniu 17.2 znajdziemy funkcję holomorficzną $f$ w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$ taką, że $h = \operatorname{Re} f$. Z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji holomorficznych mamy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

Biorąc części rzeczywiste dostaniemy twierdzenie o wartości średniej dla funkcji harmonicznych:

**Twierdzenie 17.4.** *Jeżeli $h$ jest funkcją harmoniczną w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{it})dt. \quad \square$$

Udowodnimy teraz zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych:

**Twierdzenie 17.5.** *Jeżeli $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ osiąga maksimum lokalne w obszarze $\Omega$, to $h$ jest stała.*

*Dowód.* Załóżmy, że $h$ ma maksimum lokalne w $z_0$. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.3, korzystając z Twierdzenia 17.4, łatwo pokazujemy, że funkcja $h$ jest stała na $\overline{K}(z_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Połóżmy $\Omega' := \operatorname{int}\{h = h(z_0)\}$. Zbiór $\Omega'$ jest więc niepusty, otwarty, trzeba jeszcze pokazać, że jest domknięty. Jeżeli $\widetilde{z} \in \overline{\Omega'}$, to w kole $K(\widetilde{z}, \widetilde{r}) \subset \Omega$ mamy $h = \operatorname{Re} f$ dla pewnego $f \in \mathcal{O}(K(\widetilde{z}, \widetilde{r}))$. Ponieważ $\operatorname{Re} f$ jest stała w niepustym zbiorze otwartym $\Omega' \cap K(\widetilde{z}, r)$, to $f$ jest również stała w pewnej (niepustej) składowej tego zbioru, a z zasady identyczności dla funkcji holomorficznych, także na całym $K(\widetilde{z}, \widetilde{r})$. Wnioskujemy, że $\widetilde{z} \in \Omega'$. $\square$

Korzystając z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych można pokazać, że pierścienie w $\mathbb{C}$ są konforemne wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo izomorficzne (fakt ten podamy bez dowodu). Pokazuje to, że odpowiednik twierdzenia Riemanna nie zachodzi dla obszarów wielospójnych, tzn. konforemność nie jest w tym wypadku równoważna homeomorficzności.

**Twierdzenie 17.6.** *Niech $z_j \in \mathbb{C}$, $0 < r_j < R_j < \infty$, $j = 1, 2$. Pierścienie $P(z_1, r_1, R_1)$, $P(z_2, r_2, R_2)$ są konforemne wtedy i tylko, gdy $R_1/r_1 = R_2/r_2$.*

Chcemy teraz znaleźć odpowiednik wzoru Cauchy'ego dla funkcji harmonicznych, tj. wyrazić jej wartości wewnątrz koła przy pomocy wartości na brzegu. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $K(z_0, r) = \Delta$ i że funkcja $h$ jest harmoniczna w otoczeniu $\overline{\Delta}$. Dla $a \in \Delta$ funkcja $h \circ T_{-a}$ jest harmoniczna w otoczeniu $\overline{\Delta}$. Dzięki Twierdzeniu 17.4 mamy więc

$$h(a) = h(T_{-a}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(T_{-a}(e^{it}))\, dt.$$

Stosując podstawienie $e^{is} = T_{-a}(e^{it})$, tzn. $e^{it} = T_a(e^{is})$, otrzymamy

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T_a'(e^{is})}{T_a(e^{is})}\, e^{is} h(e^{is})\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{is} - a|^2} h(e^{is})\, ds.$$

Po podstawieniu $z = z_0 + ra$ otrzymamy następujący *wzór Poissona*:

**Twierdzenie 17.7.** *Jeżeli $h$ jest funkcją harmoniczną w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, h(z_0 + re^{it})\, dt, \quad z \in K(z_0, r). \quad \square$$

Przy pomocy wzoru Poissona możemy teraz rozwiązać *problem Dirichleta* dla koła:

**Twierdzenie 17.8.** *Dla ustalonego koła $K(z_0, r)$ oraz $\varphi \in C(\partial K(z_0, r))$ połóżmy*

$$h(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, \varphi(z_0 + re^{it})\, dt, \quad z \in K(z_0, r).$$

*Wtedy $h$ jest jedyną funkcją spełniającą następujące własności:*

$$h \in \mathcal{H}(K(z_0, r)) \cap C(\overline{K}(z_0, r)), \qquad h = \varphi \text{ na } \partial K(z_0, r).$$

*Dowód.* Jednoznaczność wynika łatwo z zasady maksimum zastosowanej dla różnicy dwóch rozwiązań. Zauważmy, że

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad \zeta, z \in \mathbb{C},\ \zeta \neq z,$$

skąd wynika, że jądro Poissona

$$\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}$$

jest funkcją harmoniczną względem $z$. Stąd łatwo wnioskujemy, że $h$ jest funkcją harmoniczną w $K(z_0, r)$. Musimy jeszcze pokazać, że

$$\lim_{\substack{z\to w\\ z\in K(z_0,r)}} h(z) = \varphi(w), \quad w \in \partial K(z_0, r). \tag{17.1}$$

Dla $z \in K(z_0, r)$ i ustalonego $w \in \partial K(z_0, r)$ mamy (korzystamy z Twierdzenia 17.7 dla $h \equiv 1$)

$$h(z) - \varphi(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2} \big(\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)\big)\, dt.$$

Ustalmy teraz $\varepsilon > 0$. Znajdziemy $\delta > 0$ takie, że $|\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)| \le \varepsilon$, gdy $|z_0 + re^{it} - w| \le \delta$. Możemy teraz podzielić przedział $[0, 2\pi]$ na dwa rozłączne podzbiory $A$ i $B$ takie, że $|\varphi(z_0+re^{it})-\varphi(w)| \le \varepsilon$, gdy $t \in A$, oraz $|z_0+re^{it}-w| \ge \delta$, gdy $t \in B$. Dla $z \in \partial K(z_0, r)$ odp. bliskiego $w$ mamy wtedy

$$\begin{aligned}
|h(z) - \varphi(w)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2} \big|\big(\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)\big)\big|\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_A + \int_B\right) \\
&\le \varepsilon + 2M\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{(\delta - |z - w|)^2},
\end{aligned}$$

gdzie $M := \max_{\partial K(z_0,r)} |\varphi|$. Stąd otrzymamy (17.1). $\square$

## 18. Iloczyny nieskończone

Dla ciągu $b_n \in \mathbb{C}$ mówimy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} b_n \in \mathbb{C}.$$

Granicę tę oznaczamy $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$. Zbieżność iloczynu $\prod(1 + a_n)$ ma związek ze zbieżnością szeregu $\sum a_n$. Np. jeżeli $a_n \ge 0$ dla wszystkich $n$, to

$$1 + a_1 + \dots + a_N \le (1 + a_1)\dots(1 + a_N) \le e^{a_1+\dots+a_N},$$

(korzystając z tego, że $1 + x \le e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$), czyli w tym przypadku zbieżności te są równoważne.

W ogólnym przypadku mamy następujący rezultat dotyczący zbieżności iloczynów nieskończonych:

**Twierdzenie 18.1.** *Załóżmy, że szereg* $\sum a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny. Wtedy*
*i) iloczyn* $\prod(1+a_n)$ *jest zbieżny;*
*ii)* $\prod(1+a_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + a_{n_0} = 0$ *dla pewnego* $n_0$.

*Dowód.* i) Oznaczmy $p_N := \prod_{n=1}^N (1+a_n)$. Zbieżność ciągu $p_N$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum(p_N - p_{N-1})$ (bo sumy częściowe tego szeregu to dokładnie ciąg $p_N$). Mamy

$$
\begin{aligned}
|p_N - p_{N-1}| = |a_N|\,|p_{N-1}| &\leq |a_N|(1+|a_1|)\dots(1+|a_{N-1}|) \\
&\leq |a_N| e^{|a_1|+\dots+|a_{N-1}|} \\
&\leq |a_N| \exp\big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\big).
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

Dostaniemy bezwzględną zbieżność szeregu $\sum(p_N - p_{N-1})$.

ii) Implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista, natomiast w celu udowodnienia $\Rightarrow$ pokażemy, że jeżeli $m$ jest takie, że $|a_n| < 1$ dla $n > m$, to

$$H := \prod_{n=1}^m (1+a_n) = 0,$$

skąd wynika, że $a_{n_0} + 1 = 0$ dla pewnego $n_0 \leq m$. Takie $m$ istnieje, gdyż w szczególności $a_n \to 0$. Mamy wtedy nawet $|a_n| \leq \lambda < 1$ dla $n > m$. Dla $N > m$

$$|p_N| = |H| \prod_{n=m+1}^N |1 + a_n|.$$

Z kolei dla $n > m$

$$|1+a_n| \geq 1 - |a_n| \geq e^{-b|a_n|},$$

gdzie $b := -\lambda^{-1}\log(1-\lambda) > 0$ (z wypukłości funkcji $e^{-bx}$ dostajemy $1 - x \geq e^{-bx}$ dla $x \in [0,\lambda]$). Otrzymamy

$$|p_N| \geq |H| \exp\big(-b \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|\big).$$

Z założenia mamy $p_N \to 0$, skąd wnioskujemy, że $H = 0$. $\square$

**Twierdzenie 18.2.** *Niech* $f_n$ *będzie ciągiem funkcji holomorficznych w obszarze* $\Omega$ *takim, że szereg* $\sum |f_n|$ *jest lokalnie ograniczony w* $\Omega$ *(tzn. szereg* $\sum f_n$ *jest lokalnie bezwzględnie jednostajnie zbieżny). Wtedy*
*i)* $I := \prod(1+f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)$ *(zbieżność lokalnie jednostajna);*
*ii)* $I(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_{n_0}(z_0) + 1 = 0$ *dla pewnego* $n_0$.

*Dowód.* i) Oznaczmy $I_N := \prod_{n=1}^N (1+f_n)$. Z (18.1) wynika, że szereg $\sum |I_N - I_{N-1}|$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny w $\Omega$, a zatem ciąg $I_N$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie w $\Omega$. Z Twierdzenia 6.4 wnioskujemy, że jego granica jest funkcją holomorficzną.

ii) Wynika natychmiast z Twierdzenia 18.1. $\square$

Iloczyny nieskończone można wykorzystać do konstrukcji funkcji holomorficznych o z góry zadanych zerach. Z zasady identyczności wynika, że zera te nie mogą mieć punktu skupienia. Okazuje się, że jest to jedyne ograniczenie:

**Twierdzenie 18.3.** (Weierstrass, 1876) *Niech $z_n$ będzie ciągiem różnych punktów w obszarze $\Omega$ bez punktów skupienia w $\Omega$. Niech $m_n$ będzie dowolnym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $z_1, z_2, \dots$ są wszystkimi zerami funkcji $f$ o krotnościach, odpowiednio, $m_1, m_2, \dots$*

Jeżeli np. $\Omega = \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$, $z_n \to \infty$ (tzn. ciąg $z_n$ nie ma punktów skupienia), to dzięki Twierdzeniu 18.2 iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

definiuje funkcję całkowitą pod warunkiem, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty,$$

czyli jeżeli ciąg $z_n$ dąży odp. szybko do $\infty$. W celu pozbycia się tego dodatkowego założenia trzeba zamienić wyrażenie $1-z/z_n$ na wyrażenie, które także znika dla $z = z_n$, ale które jest bliżej 1 dla $z$ w pobliżu $z_n$. Posłużą do tego czynniki Weierstrassa

$$E_n(z) := (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right).$$

**Lemat 18.4.** *Jeżeli $|z| \leq 1$ oraz $n = 1, 2, \dots,$ to*

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}.$$

*Dowód.* Mamy

$$E_n'(z) = -z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right) = -z^n \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j,$$

gdzie $c_j \geq 0$. Stąd wynika, że funkcja $1 - E_n$ ma w 0 zero rzędu $n + 1$ oraz

$$f(z) := \frac{1 - E_n(z)}{z^{n+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

gdzie $a_j = c_j/(j + n + 1) \geq 0$ dla wszystkich $j$. Wnioskujemy, że $|f(z)| \leq f(1) = 1$, gdy $|z| \leq 1$. $\square$

Wracając teraz do problemu konstrukcji funkcji całkowitej o zadanych zerach $z_n \to \infty$, $z_n \neq 0$, możemy zdefiniować

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Wtedy z Lematu 18.4 mamy $|E_n(z/z_n)-1| \leq |z/z_n|^{n+1}$, z Twierdzenia 18.2 wynika więc, że powyższy iloczyn nieskończony jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $\mathbb{C}$ oraz, że zeruje się dokładnie w punktach $z_n$, przy czym krotność zera jest taka ile razy dany punkt pojawia się w ciągu $z_n$.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić także w ogólnym przypadku:

*Dowód Twierdzenia 18.3.* Stosując zmianę zmiennych w $\mathbb{P}$ postaci $z' = 1/(z - z_0)$, gdzie $z_0 \in \Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ jest ustalone, bez straty ogólności możemy założyć, że $\Omega$ jest obszarem w $\mathbb{P}$ zawierającym $\infty$, przy czym $z_n \neq \infty$, $n = 1, 2, \dots$ Niech $\widetilde{z}_n$ będzie ciągiem postaci $z_1, \dots, z_1, z_2, \dots, z_2, \dots$, gdzie każdy z punktów $z_n$ powtarza się $m_n$ razy. Niech $a_n \in \partial\Omega$ będą takie, że $\operatorname{dist}(\widetilde{z}_n, \partial\Omega) = |\widetilde{z}_n - a_n|$. Ciąg $\widetilde{z}_n$ ma punkty skupienia tylko na $\partial\Omega$, który jest zbiorem zwartym w $\mathbb{C}$, a zatem $|\widetilde{z}_n - a_n| \to 0$. Kładziemy

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\widetilde{z}_n - a_n}{z - a_n}\right).$$

Z Lematu 18.4 mamy

$$\left|E_n\left(\frac{\widetilde{z}_n - a_n}{z - a_n}\right) - 1\right| \leq \left|\frac{\widetilde{z}_n - a_n}{z - a_n}\right|^{n+1}.$$

Z Twierdzenia 18.2 otrzymamy więc lokalnie jednostajną zbieżność powyższego iloczynu nieskończonego w $\Omega \setminus \{\infty\}$. Co więcej, $f$ jest ograniczone w pobliżu $\infty$, a więc przedłuża się do funkcji holomorficznej w $\Omega$. Z Twierdzenia 18.2 wynika ponadto, że $f$ nie ma zer poza ciągiem $z_n$, jest także jasne, że ich krotność jest równa $m_n$. $\square$

Definiując zbiór funkcji meromorficznych na danym obszarze pokazaliśmy, że jest on *lokalnie* ciałem ułamków pierścienia funkcji holomorficznych. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa można łatwo pokazać, że jest on w istocie ciałem ułamków:

**Twierdzenie 18.5.** *Każdą funkcję meromorficzną w obszarze $\Omega$ można zapisać w postaci $f/g$, gdzie $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

*Dowód.* Niech $h$ będzie funkcją meromorficzną w $\Omega$. Z Twierdzenia 18.3 wynika, że istnieje funkcja $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że zbiór zer funkcji $g$ jest taki sam jak zbiór biegunów funkcji $h$, przy czym krotności zer są takie same jak rzędy biegunów. Jest jasne, że wtedy funkcja $f := gh$ ma tylko pozorne osobliwości. $\square$

## 19. Funkcja $\zeta$ Riemanna

Kładziemy

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1. \tag{19.1}$$

Zauważmy, że

$$\zeta(s) = \sum_{n \neq 2k} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2^s}\zeta(s),$$

czyli

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \sum_{n \neq 2k} \frac{1}{n^s}.$$

Postępując podobnie z lewą stroną zamiast $\zeta(s)$ otrzymamy

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\zeta(s) = \sum_{\substack{n \neq 2k \\ n \neq 3k}} \frac{1}{n^s}.$$

Kontynuując ten proces dla wszystkich liczb pierwszych widzimy, że prawa strona dąży do 1, ze zbieżności szeregu $\sum_p p^{-s}$ ($p$ będzie zawsze oznaczało liczby pierwsze) dla $s > 1$ otrzymamy więc następujący rezultat, między innymi dzięki któremu funkcja $\zeta$ jest jednym z głównych obiektów badanych w teorii liczb.

**Propozycja 19.1.** (Euler, 1748) *Dla $s > 1$ mamy*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \quad \square \tag{19.2}$$

Wnioskujemy stąd w szczególności, że szereg $\sum_p 1/p$ jest rozbieżny.

Chcemy przedłużyć funkcję $\zeta$ dla zespolonych $s$. Dla $s = \sigma + it$ mamy $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$, skąd wynika, że szereg $\sum n^{-s}$ jest bezwzględnie i lokalnie jednostajnie zbieżny w półpłaszczyźnie $\{\operatorname{Re} s > 1\}$. Formuła (19.1) dobrze zatem definiuje funkcję $\zeta$ dla takich $s$. Mamy także

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})dx, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

oraz

$$\left| \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})dx \right| = \left| s \int_n^{n+1} \int_n^x y^{-1-s} dy\, dx \right| \leq |s| n^{-1-\sigma},$$

a więc funkcja $\zeta(s) - 1/(s-1)$ przedłuża się do funkcji holomorficznej w półpłaszczyźnie $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ (dzięki zasadzie identyczności takie przedłużenie jest oczywiście jednoznaczne). Udowodniliśmy więc następujący fakt:

**Propozycja 19.2.** *Funkcję $\zeta$ można jednoznacznie przedłużyć do funkcji holomorficznej w obszarze $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$. W 1 ma ona biegun prosty z residuum równym 1.* $\square$

W rzeczywistości można pokazać, że $\zeta$ przedłuża się do funkcji holomorficznej w $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ z zerami w $-2, -4, \ldots$ (są to tzw. trywialne zera funkcji $\zeta$). Okazuje się wtedy np., że $\zeta(-1) = -1/12$, co możemy zapisać

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

Z (19.2) wynika, że $\zeta$ nie ma zer w zbiorze $\{\mathrm{Re}\,\zeta > 1\}$. *Hipoteza Riemanna* mówi, że wszystkie nietrywialne zera funkcji $\zeta$ leżą na prostej $\{\mathrm{Re}\,s = 1/2\}$ (można pokazać, że są one symetryczne względem punktu $1/2$). Okazuje się, że nietrywialne zera funkcji $\zeta$ mają bardzo bliski związek z rozkładem liczb pierwszych. Niech $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych $\leq x$. *Twierdzenie o liczbach pierwszych* mówi, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Jego dowód został naszkicowany przez Riemanna w 1859 r. i precyzyjnie udowodniony niezależnie przez Hadamarda i de la Vallée-Poussina w 1896 r. Jednym z głównych kroków w jego dowodzie jest wykazanie, że funkcja $\zeta$ nie ma zer na prostej $\mathrm{Re}\,\zeta = 1$.

Połóżmy

$$li(x) := \int_2^x \frac{dy}{\log y} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \quad (\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}).$$

Można pokazać, że jeżeli $\zeta$ nie miałoby zer w $\{\mathrm{Re}\,s \geq \theta\}$, gdzie $1/2 < \theta < 1$, to

$$\pi(x) = li(x) + O(x^\theta \log x).$$

Sama zaś hipoteza Riemanna okazuje się być równoważna tożsamości

$$\pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

Opisywałoby to więc rozkład liczb pierwszych w znacznie dokładniejszy sposób niż twierdzenie o liczbach pierwszych.

## 20. Rodziny normalne, iteracja funkcji wymiernych

Dla ustalonego obszaru $\Omega \subset \mathbb{P}$ rodzinę $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{P})$ nazywamy <u>normalną</u>, jeżeli z każdego ciągu w $\mathcal{G}$ można wybrać podciąg zbieżny lokalnie jednostajnie (w metryce sferycznej na $\mathbb{P}$) w $\Omega$. Można pokazać, że własność normalności ma charakter czysto lokalny względem $\Omega$ (jeżeli rodzina $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{P})$ jest lokalnie normalna w $\Omega$, to dla ciągu $f_n \in \mathcal{G}$ i ciągu zbiorów zwartych $K_j \subset \Omega$ rosnącego do $\Omega$ znajdziemy podciągi $f^j_{n_k}$ zbieżne jednostajnie w $K_j$; stosując rozumowanie przekątniowe znajdziemy odp. podciąg zbieżny jednostajnie na dowolnym $K_j$).

*Przykład.* Rodzina $\{z^n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ jest normalna w $\Delta$ oraz w $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, ale nie jest normalna w żadnym obszarze mającym niepuste przecięcie z $\partial\Delta$.

Podstawowym rezulatem dotyczącym rodzin normalnych jest następujący fakt (podamy go bez dowodu):

**Twierdzenie 20.1.** (Montel, 1912) *Rodzina $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ jest <u>normalna</u>.*

Twierdzenie Montela jest głębokim rezultatem, wynika z niego łatwo np. *wielkie twierdzenie Picarda*:

**Twierdzenie 20.2.** (Picard, 1879) *Funkcja holomorficzna posiadająca istotną osobliwość omija co najwyżej jedną wartość.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że funkcja holomorficzna $f$ w $\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, posiadająca istotną osobliwość w $z_0$, omija dwie wartości $w_0 \neq w_1$. Składając $f$ z odp. funkcją liniową możemy założyć, że $w_0 = 0$, $w_1 = 1$. Z twierdzenia Montela wynika, że ciąg $f_n(z) := f(z/n)$ jest rodziną normalną. Znajdziemy zatem podciąg $f_{n_k}$ albo jednostajnie zbieżny na okręgu $\partial K(z_0, \varepsilon/2)$ albo jednostajnie rozbieżny do $\infty$ na tym okręgu. W pierwszym przypadku $f$ byłoby jednostajnie ograniczone na okręgach $\partial K(z_0, \varepsilon/(2n_k))$, skąd (i z zasady maksimum) wynikałoby, że funkcja $f$ jest ograniczona w pobliżu $z_0$. W drugim przypadku podobnie dostalibyśmy $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Otrzymalibyśmy więc, że $z_0$ jest albo osobliwością usuwalną albo biegunem - sprzeczność. $\square$

Twierdzenie Montela okazuje się być szczególnie przydatne do badania iteracji funkcji wymiernych. Będziemy teraz stale zakładać, że $R = P/Q$ jest funkcją wymierną (którą traktujemy jako odwzorowanie holomorficzne $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$), gdzie $P, Q$ są wielomianami zespolonymi bez wspólnych zer. Zakładamy także, że $d = \deg R := \max\{\deg P, \deg Q\} \geq 2$. Oznacza to, że dla $w$ spoza skończonego podzbioru $\mathbb{P}$ zbiór $R^{-1}(w)$ jest dokładnie $d$-elementowy. Przez $R^n = R \circ \cdots \circ R$ oznaczamy $n$-tą iterację odwzorowania $R$.

Zbiór Fatou $\mathcal{F}$ funkcji $R$ definiujemy jako zbiór wszystkich $z \in \mathbb{P}$ takich, że ciąg $R^n$ jest rodziną normalną w pewnym otoczeniu $z$. Dopełnienie zbioru Fatou $\mathcal{J} := \mathbb{P} \setminus \mathcal{F}$ to zbiór Julii funkcji $R$. Oczywście $\mathcal{F}$ jest otwarty, zaś $\mathcal{J}$ jest zwarty. Zbiory te zostały zdefiniowane niezależnie przez tych dwóch matematyków w 1918 r.

Przedstawimy teraz bez dowodów podstawowe własności zbioru Julii (udowodnione niezależnie przez Fatou i Julia w 1918 r. w ramach konkursu ogłoszonego przez francuską Akademię Nauk).

**Twierdzenie 20.3.** *i)* $\mathcal{J} \neq \emptyset$*;*
*ii)* $R^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$*;*
*iii) Zbiór Julii odwzorowania* $R^N$*,* $N \geq 1$*, jest taki sam jak zbiór Julii* $R$*;*
*iv) Jeżeli* $\mathcal{J}$ *ma niepuste wnętrze, to* $\mathcal{J} = \mathbb{P}$*;*
*v) Dla każdego* $z_0 \in \mathcal{J}$ *zbiór* $\bigcup_{n\geq 1} R^{-n}(z_0)$ *jest gęsty w* $\mathcal{J}$*;*
*vi)* $\mathcal{J}$ *jest zbiorem doskonałym, tzn. nie zawiera punktów izolowanych.*

Przyjrzymy się teraz dokładniej przypadkowi, gdy $R = P$ jest wielomianem (stopnia $d \geq 2$):

**Twierdzenie 20.4.** *Dla wielomianu* $P$ *połóżmy*

$$\mathcal{K} := \{z \in \mathbb{C} : \text{ ciąg } P^n(z) \text{ jest ograniczony}\}.$$

*Wtedy* $\mathcal{K}$ *jest zbiorem zwartym w* $\mathbb{C}$*,* $\partial\mathcal{K} = \mathcal{J}$ *oraz* $\mathcal{K}$ *jest wypełnionym zbiorem Julii, tzn.* $\mathcal{K} = \mathcal{J} \cup \mathcal{U}$*, gdzie* $\mathcal{U}$ *jest sumą składowych ograniczonych* $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}$*.*

*Dowód.* Znajdziemy $r > 0$ i $\lambda > 1$ takie, że $|P(z)| \geq \lambda|z|$, gdy $|z| \geq r$, a zatem $|P^n(z)| \geq \lambda^n|z|$, gdy $|z| \geq r$ i $n \geq 1$. Wynika stąd, że $\mathcal{K} \subset K(0, r)$ oraz

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{K} = \bigcup_{n\geq 1} P^{-n}(\{|z| > r\}). \tag{20.1}$$

W szczególności, $\mathcal{K}$ jest zwarty. Zauważmy, że $z \in P(\mathcal{K}) \Leftrightarrow z \in \mathcal{K}$, tzn. $P^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Z kolei $P(z) \in \partial\mathcal{K}$ oznacza, że $P(z) \in \mathcal{K}$ oraz istnieje ciąg $w_k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ zbieżny do

$z$. Np. dzięki otwartości $P$ jest to równoważne istnieniu ciągu $z_{k_l} \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ zbieżnego do $z$ i takiego, że $P(z_{k_l}) = w_{k_l}$. Mamy więc $P^{-1}(\partial\mathcal{K}) = \partial\mathcal{K}$.

Jeżeli $z \in \partial\mathcal{K}$, to ciąg $P^n(z)$ jest ograniczony, ale z (20.1) mamy $P^n \to \infty$ lokalnie jednostajnie na $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$, a więc na żadnym otoczeniu punktu $z$ ciąg $P^n$ nie jest rodziną normalną, czyli $\partial\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$. Ponieważ $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, to $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ i, dzięki i), $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Niech $z_0 \in \partial\mathcal{K}$. Z v) wynika, że zbiór $\bigcup_{n\geq 1} P^{-n}(z_0)$ jest gęsty w $\mathcal{J}$. Zbiór ten jest jednak zawarty w $\partial\mathcal{K}$ (bo $P^{-1}(\partial\mathcal{K}) = \partial\mathcal{K}$), a więc $\partial\mathcal{K}$ jest gęsty w $\mathcal{J}$. Stąd $\partial\mathcal{K} = J$.

Mamy $\partial\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$, więc z zasady maksimum i dzięki temu, że $P(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ dostaniemy $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$. Pokazaliśmy, że $\partial\mathcal{K} \cup \mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ i że $\mathcal{U}$ jest sumą składowych ograniczonych $\mathbb{C} \setminus \partial\mathcal{K}$. Ponieważ składowa nieograniczona $\mathbb{C} \setminus \partial\mathcal{K}$ nie ma punktów wspólnych z $\mathcal{K}$, mamy $\partial\mathcal{K} \cup \mathcal{U} = \mathcal{K}$. $\square$

*Przykłady.* i) Dla $P(z) = z^2$ mamy $\mathcal{J} = \partial\Delta$.

ii) Niech $P(z) = z^2 - 2$. Można pokazać $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$, że funkcja $f(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ odwzorowuje konforemnie obszar $\{|\zeta| > 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Mamy także $(f^{-1} \circ P \circ f)(\zeta) = \zeta^2$. Wynika stąd, że $P^n \to \infty$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Z drugiej strony $P([-2, 2]) \subset [-2, 2]$, a więc z Twierdzenia 20.4 $\mathcal{J} = \mathcal{K} = [-2, 2]$.

W ogólnym przypadku jednak dynamika wielomianu kwadratowego $P_c(z) := z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, jest bardzo skomplikowana i zbiory Julii $\mathcal{J}_c$ wielomianu $P_c$ mają zwykle strukturę fraktali. Zbiór Mandelbrota (Brook, Matelski, 1978, Mandelbrot, 1980) $\mathcal{M}$ to zbiór tych $c \in \mathbb{C}$, dla których ciąg $P_c^n(0)$ jest ograniczony.

Można udowodnić (zob. np. [2]), że $\mathcal{M}$ jest spójny i jednospójny, ale otwartym problemem pozostaje lokalna spójność $\mathcal{M}$. Można także pokazać, że jeżeli $c \in \mathcal{M}$, to $\mathcal{J}_c$ jest spójny, natomiast dla $c \notin \mathcal{M}$ zbiór $\mathcal{J}_c$ jest całkowicie niespójny (tzn. wszystkie składowe spójne $\mathcal{J}_c$ są jednopunktowe).

## Literatura

[1] E. Bombieri, *Problems of the Millenium: Riemann Hypothesis*, zob. http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis.

[2] L. Carleson, T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[4] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] N.D. Elkies, *Introduction to Analytic Number Theory*, lecture notes, 1998, zob. http://www.math.harvard.edu/~elkies/M259.98/index.html.

[6] R.E. Greene, S.G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[7] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa, 1986.

[9] E.B. Saff, A.D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis for Mathemtics, Science, and Engineering,* wyd. 2, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[10] S. Saks, A. Zygmund, *Analytic functions*, Monografie Matematyczne 28, PTM, Warszawa-Wrocław, 1952.

[11] J. Stillwell, *Mathematics and its History,* wyd. 2, Springer-Verlag, New York, 2001.

## Zagadnienia na egzamin ustny

*Uwaga.* Powyższy tekst oraz poniższe zagadnienia mają charakter pomocniczy (niewykluczone są pytania dodatkowe wykraczające poza poniższe zagadnienia). Na egzaminie ustnym obowiązuje cały materiał przedstawiony na wykładzie poza następującymi częściami: dowodami Twierdzeń 8.4 (twierdzenie o odwzorowaniu otwartym), 10.2 (twierdzenie Cauchy'ego-Dixona) i 17.8 (problem Dirichleta w kole) oraz sekcjami 13a (Obliczanie pewnych całek rzeczywistych) i większością 20 (Rodziny normalne, iteracja funkcji wymiernych) - z wyjątkiem dowodu wielkiego twierdzenia Picarda.

- Sformułować i udowodnić lemat d'Alemberta.
- Sformułować zasadnicze twierdzenie algebry i udowodnić je trzema różnymi sposobami (korzystając odp. z lematu d'Alemberta, twierdzenia Liouville'a i twierdzenia Rouché).
- Sformułować i udowodnić wzór na pochodną złożenia funkcji.
- Wyprowadzić wzór na pochodne formalne $\partial f/\partial z$, $\partial f/\partial \bar{z}$ przy pomocy $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$. Pokazać, że funkcja zespolona jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna.
- Sformułować i udowodnić wzór na pochodną funkcji odwrotnej.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie całkowe Cauchy'ego dla trójkąta.
- Pokazać, że istnienie funkcji pierwotnej jest równoważne znikaniu całek po drogach zamkniętych.
- Sformułować i udowodnić wzór całkowy Cauchy'ego dla koła.
- Sformułować i udowodnić lemat o produkcji funkcji holomorficznych.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie o wartości średniej dla funkcji holomorficznych.
- Sformułować i udowodnić nierówność Cauchy'ego.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Morery.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Liouville'a.
- Sformułować i udowodnić słabą i mocną zasadę maksimum dla funkcji holomorficznych.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Weierstrassa o ciągach funkcji holomorficznych.
- Sformułować i udowodnić wzór Cauchy'ego-Hadamarda na promień zbieżności szeregu potęgowego.
- Sformułować i udowodnić zasadę identyczności dla szeregów potęgowych i funkcji holomorficznych.
- Pokazać, że każda funkcja holomorficzna w kole rozwija się w nim w szereg potęgowy.
- Podać definicję funkcji analitycznej. Podać przykład funkcji klasy $C^\infty$, która nie jest analityczna. Podać związek funkcji analitycznych z funkcjami holomorficznymi. W jaki sposób znaleźć promień zbieżności szeregu Taylora funkcji analitycznej w danym punkcie?
- Podać definicję indeksu drogi zamkniętej względem punktu. Podać i udowodnić podstawowe własności oraz interpretację geometryczną.
- Pokazać, że funkcje holomorficzne w pierścieniu można rozwinąć w szereg Laurenta.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie o obszarze zbieżności szeregu Laurenta.

- Sformułować i udowodnić zasadę identyczności dla szeregów Laurenta.
- Podać definicję osobliwości pozornej, bieguna i osobliwości istotnej (każdy przypadek zilustrować przykładem). Omówić rodzaj zera lub osobliwości w punkcie $z_0$ funkcji postaci $f/g$, gdzie $f, g$ są funkcjami holomorficznymi w otoczeniu $z_0$.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Riemanna o usuwaniu osobliwości.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa-Sochockiego.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie charakteryzujące rodzaj osobliwości izolowanej funkcji holomorficznej przy pomocy granic.
- Wyprowadzić formułę na residuum w punkcie, w którym funkcja holomorficzna ma biegun rzędu $m$.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie o residuach.
- Sformułować i udowodnić zasadę argumentu.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Rouchégo.
- Udowodnić, że funkcja holomorficzna w pobliżu zera krotności $m$ jest odwzorowaniem $m$-krotnym.
- Podać definicję odwzorowania lokalnie konforemnego. Pokazać, że pojęcie to jest równoważne funkcji holomorficznej o nieznikającej pochodnej (lub lokalnie iniektywnej).
- Podać i udowodnić charakteryzację automorfizmów holomorficznych koła oraz płaszczyzny.
- Sformułować i udowodnić lemat Schwarza.
- Pokazać, że odwzorowania holomorficzne $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ to dokładnie funkcje wymierne.
- Podać i udowodnić charakteryzację automorfizmów sfery Riemanna.
- Pokazać, że każda funkcja harmoniczna jest lokalnie częścią rzeczywistą funkcji holomorficznej.
- Udowodnić zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych.
- Udowodnić wzór Poissona.
- Pokazać, że iloczyn nieskończony $\prod(1 + f_n)$, gdzie $f_n$ są funkcjami holomorficznymi, jest zbieżny lokalnie jednostajnie, jeżeli szereg $\sum |f_n|$ jest lokalnie ograniczony.
- Pokazać, że jeżeli szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to iloczyn nieskończony $\prod(1 + a_n)$ znika wtedy i tylko wtedy, gdy znika jeden ze składników.
- Podać definicję czynników Weierstrassa $E_n$. Pokazać, że $|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}$, gdy $|z| \leq 1$.
- Sformułować i udowodnić twierdzenie Weierstrassa o istnieniu funkcji holomorficznej o zadanych zerach. Pokazać, że funkcje meromorficzne tworzą (globalnie) ciało ułamków pierścienia funkcji holomorficznych.
- Podać definicję funkcji $\zeta$ Riemanna w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 1$. Wyprowadzić przedstawienie funkcji $\zeta$ przy pomocy liczb pierwszych (iloczyn Eulera).
- Pokazać, że funkcja $\zeta$ Riemanna przedłuża się do funkcji holomorficznej w obszarze $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$. Jaka jest jej osobliwość w 1? Sformułować hipotezę Riemanna.
- Sformułować i udowodnić wielkie twierdzenie Picarda.