FUNCKJE ANALITYCZNE

WYKŁADY DLA SEKCJI TEORETYCZNEJ

INSTYTUT MATEMATYKI UJ, 2007

Zbigniew Błocki

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Spis treści

Wykład 1, 26.02.2007

1. Podstawowe własności liczb zespolonych

Liczbą zespoloną nazywamy parę liczb rzeczywistych, zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ to zatem dokładnie zbiór $\mathbb{R}^2$. Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ zapisujemy w postaci $x + iy$. Na zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy mnożenie (zgodnie z regułą $i^2 = -1$):

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Można łatwo pokazać $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$, że $\mathbb{C}$ z dodawaniem wektorowym w $\mathbb{R}^2$ oraz tak wprowadzonym mnożeniem jest ciałem. Jeżeli $z = x + iy$, to x nazywamy częścią rzeczywistą, natomiast y częścią urojoną liczby z; ozn. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Każdą liczbę zespoloną z możemy rówież zapisać przy pomocy współrzędnych biegunowych:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, zaś φ jest kątem pomiędzy odcinkami $[0, 1]$ i $[0, z]$ (gdy $z \neq 0$) - nazywamy go argumentem liczby z. Zachodzi oczywiście *nierówność trójkąta*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

można również łatwo pokazać $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$, że

$$|zw| = |z|\,|w|, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Chcemy teraz zdefiniować zespoloną funkcję wykładniczą $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dla $z = x + iy \in \mathbb{C}$ oczekujemy, że $e^z = e^x e^{iy}$, czyli wystarczy określić e^{it} dla $t \in \mathbb{R}$. Chcemy by funkcja ta spełniała

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}, \quad e^0 = 1,$$

a więc (oznaczając $e^{it} = A + iB$) $A' = -B$, $B' = A$, $A(0) = 1$, $B(0) = 0$. Jedynym rozwiązaniem tego układu są funkcje $A = \cos t$, $B = \sin t$. Funkcję wykładniczą definiujemy zatem następująco:

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Można łatwo pokazać $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ jej następujące własności

$$e^{z+w} = e^z e^w, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

$$\frac{d}{dt}e^{tz} = ze^{tz}, \quad t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

Z faktu, że $|e^z| = e^x$ oraz dzięki temu, że y jest argumentem liczby e^z wynika, że funkcja wykładnicza proste pionowe $x = x_0$ odwzorowuje na okręgi o promieniu e^{x_0}, natomiast proste poziome $y = y_0$ na półproste otwarte o początku w 0 o argumencie y_0.

Wracając do współrzędnych biegunowych, możemy je teraz zapisać w postaci $z = re^{i\varphi}$. Dla $z \neq 0$ przez $\arg z$ oznaczamy zbiór argumentów liczby z, tzn.

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\varphi}\}.$$

Ponieważ $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$, dla dowolnego $\varphi_0 \in \arg z$ mamy

$$\arg z = \{\varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dla każdego $z \in \mathbb{C}_*(:= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ znajdziemy dokładnie jeden element $\arg z$ należący do przedziału $[-\pi, \pi)$. Nazywamy go argumentem głównym liczby z i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Funkcja Arg, określona na $\mathbb{C}_*$, jest nieciągła na półprostej $(-\infty, 0)$.

Możemy teraz podać geometryczną interpretację mnożenia w $\mathbb{C}$: jeżeli $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, to $zw = r\rho e^{i(\varphi+\psi)}$; czyli mnożymy długości, a dodajemy argumenty. Możemy stąd również wywnioskować *wzór de Moivre'a*: z tego, że $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ otrzymamy

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dla danego $z \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ przez pierwiastek z stopnia n rozumiemy zbiór

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

Zapisując z i w we współrzędnych biegunowych:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\psi},$$

otrzymamy warunki

$$\rho = r^{1/n}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ $e^{i\psi} = e^{i(\psi+2\pi)}$, dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ otrzymamy wszystkie rozwiązania. Zatem

$$\sqrt[n]{z} = \{|z|^{1/n} e^{i(\varphi+2k\pi)/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

W szczególności, pierwiastek stopnia n z liczby niezerowej jest zawsze zbiorem n elementowym.

Ćwiczenie Udowodnić, że rozwiązaniem równania kwadratowego w $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

gdzie $a \in \mathbb{C}_*$, $b, c \in \mathbb{C}$, jest

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$, przy czym $\sqrt{\Delta}$ jest zbiorem dwuelementowym jeżeli $\Delta \neq 0$ - w tym przypadku zawsze otrzymamy dwa rozwiązania (jedno jeżeli $\Delta = 0$).

W przypadku wielomianów dowolnego stopnia mamy rezultat niekonstruktywny, tzw. *zasadnicze twierdzenie algebry*.

Twierdzenie 1.1. *Każdy niestały wielomian zespolony ma pierwiastek.*

Powyższy rezultat można udowodnić w sposób elementarny przy pomocy *lematu d'Alemberta* (oryginalny dowód z 1746 r. zawierał lukę).

Lemat 1.2. *Załóżmy, że P jest niestałym wielomianem zespolonym oraz, że dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$ mamy $P(z_0) \neq 0$. Wtedy dla każdego otoczenia U punktu z_0 znajdziemy $z \in U$ takie, że $|P(z)| < |P(z_0)|$.*

Dowód. (Argand, 1806) Niech

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Wtedy

$$P(z_0 + h) = a_0 + a_1(z_0 + h) + \cdots + a_n(z_0 + h)^n = P(z_0) + A_1 h + \cdots + A_n h^n,$$

gdzie współczynniki A_j zależą tylko od P i z_0. Któryś z nich na pewno nie znika, gdyż w przeciwnym wypadku wielomian P byłby stały. Niech j będzie najmniejszym indeksem, dla którego $A_j \neq 0$. Mamy zatem

$$P(z_0 + h) = P(z_0) + A_j h^j + R(h),$$

gdzie

$$|R(h)| < |A_j h^j|,$$

gdy $|h|$ jest odp. małe, $h \neq 0$. Możemy znaleźć h o dowolnie małym $|h|$, dla którego $A_j h^j$ ma argument przeciwny do argumentu $P(z_0)$. Wtedy

$$|P(z_0 + h)| \leq |P(z_0) + A_j h^j| + |R(h)| = |P(z_0)| - |A_j h^j| + |R(h)| < |P(z_0)|. \quad \square$$

Dowód Twierdzenia 1.1. Oznaczając P jak w dowodzie Lematu 1.2 i zakładając, że $a_n \neq 0$, mamy

$$\begin{aligned}|P(z)| &\geq |a_n|\,|z|^n - |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \\ &\geq |a_n|\,|z|^n - |a_0| - |a_1|\,|z| - \cdots - |a_{n-1}|\,|z|^{n-1}.\end{aligned}$$

Możemy w szczególności znaleźć $R > 0$ takie, że $|P(z)| > |P(0)|$, gdy $|z| = R$. Funkcja $|P|$ jest ciągła na $\mathbb{C}$ (bo oczywiste jest, że mnożenie jest odwzorowaniem ciągłym), znajdziemy zatem $z_0 \in K(0, R)$ takie, że

$$|P(z_0)| = \min_{\overline{K}(0,R)} |P|.$$

Jeżeli $P(z_0) \neq 0$, to dzięki Lematowi 1.2 znajdziemy $z \in K(0, R)$ takie, że $|P(z)| < |P(z_0)|$ - sprzeczność. $\square$

Dla $z \in \mathbb{C}_*$ definiujemy

$$\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$

(dla $z = 0$ ten zbiór jest oczywiście pusty). Jeżeli zapiszemy $w = \eta + i\xi$, $z = re^{i\varphi}$, to otrzymamy równanie $e^\eta e^{i\xi} = re^{i\varphi}$. Zatem $\eta = \log r = \log |z|$, natomiast $\xi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ostatecznie

$$\log z = \log |z| + i\arg z.$$

Liczbę

$$\operatorname{Log} z := \log|z| + i\operatorname{Arg} z$$

nazywamy logarytmem głównym z.

Przy pomocy logarytmu możemy zdefiniować potęgi zespolone: dla $z \in \mathbb{C}_*$, $w \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$z^w = e^{w\log z}.$$

Zauważmy, że

$$z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\arg z)} = |z|^{1/n} e^{i\frac{\arg z}{n}},$$

czyli otrzymamy to samo, co przy definicji pierwiastka.

Ćwiczenie Obliczyć i^i.

Przypomnijmy, że

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zespolone funkcje trygonometryczne można łatwo wyprowadzić ze *wzorów Eulera*:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\sin z, \\ e^{-iz} &= \cos z - i\sin z. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

Mamy również

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \sinh z &:= -i\sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie Pokazać, że $\arccos z = -i\log(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

Dla liczby zespolonej $z = x + iy$ definiujemy jej sprzężenie: $\overline{z} := x - iy$. Natychmiast otrzymujemy, że

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Ćwiczenie Pokazać, że $\overline{(zw)} = \overline{z}\,\overline{w}$ oraz $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

2. Różniczkowanie funkcji zespolonych

Oczywiście każde odwzorowanie liniowe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto az \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

dla pewnego $a \in \mathbb{C}$. Ponieważ $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, możemy również rozpatrywać równania liniowe w sensie rzeczywistym - będą one postaci

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni z \longmapsto Az \ni \mathbb{R}^2 = \mathbb{C},$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}, \quad p, q, s, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Takie odwzorowania $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będziemy nazywać $\mathbb{R}$-liniowymi, natomiast odwzorowania postaci (2.1) $\mathbb{C}$-liniowymi. Można łatwo sprawdzić, że każde odwzorowanie $\mathbb{C}$-liniowe jest $\mathbb{R}$-liniowe, przy czym A jest postaci

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

gdzie $a = \alpha + i\beta$. Z drugiej strony, dane odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe jest $\mathbb{C}$-liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $p = t$ i $q = -s$ w (2.2) (**Ćwiczenie**).

Niech f będzie funkcją o wartościach zespolonych określoną w pewnym otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$. Analogicznie jak w przypadku rzeczywistym powiemy, że f jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w punkcie z_0, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Granicę tę nazywamy pochodną zespoloną funkcji f w z_0 i oznaczamy przez $f'(z_0)$. Jest oczywiste, że każda funkcja $\mathbb{C}$-różniczkowalna w z_0 jest w ciągła w z_0. W podobny sposób jak w przypadku rzeczywistym dowodzimy podstawowych własności funkcji $\mathbb{C}$-różniczkowalnych.

Propozycja 2.1. *Jeżeli funkcje f, g są $\mathbb{C}$-różniczkowalne w z_0, to funkcje $f \pm g$, fg oraz f/g (ta ostatnia pod warunkiem, że $g(z_0) \neq 0$) są $\mathbb{C}$-różniczkowalne w z_0 oraz w z_0 mamy*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad \square$$

Propozycja 2.2. *Jeżeli f jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w z_0, zaś g jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w $f(z_0)$, to $g \circ f$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w z_0 oraz*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0). \quad \square$$

Przypomnijmy, że funkcja zespolona f jest różniczkowalna w z_0 w klasycznym sensie (będziemy wtedy mówić, że jest ona $\mathbb{R}$-różniczkowalna), jeżeli istnieje odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe A takie, że

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Jeżeli $f = u + iv$, gdzie u, v są funkcjami rzeczywistymi, to

$$A = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

(ozn. $u_x = \partial u/\partial x,\ u_y = \partial u/\partial y$). Zauważmy, że każda funkcja $\mathbb{C}$-różniczkowalna jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna, przy czym

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}.$$

Przykład. Funkcja $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w każdym punkcie (jest nawet $\mathbb{R}$-liniowa), ale nigdzie nie jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna: zauważmy, że dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } z = z_0 + t, \\ -1, & \text{jeżeli } z = z_0 + it, \end{cases}$$

czyli odpowiednia granica nie istnieje.

Załóżmy, że $f = u + iv$ jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w z_0. Oznaczając $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$ mamy

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|).$$

Ponieważ

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \tag{2.3}$$

otrzymamy

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f_x(z_0) - if_y(z_0)}{2}(z - z_0) + \frac{f_x(z_0) + if_y(z_0)}{2}\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|).$$

Dla funkcji $\mathbb{R}$-różniczkowalnej definiujemy pochodne formalne

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(= f_z) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(= f_{\overline{z}}) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wykład 2, 5.03.2007

Pochodne cząstkowe $\partial/\partial z$ i $\partial/\partial \overline{z}$ prowadzić możemy również przy pomocy formy df: mamy

$$f_x dx + f_y dy = df = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} = f_z(dx + idy) + f_{\overline{z}}(dx - idy),$$

a stąd

$$\begin{cases} f_x = f_z + f_{\overline{z}}, \\ f_y = i(f_z - f_{\overline{z}}), \end{cases} \tag{2.5}$$

skąd łatwo dostaniemy (2.4).

Ćwiczenie Pokazać, że dla dowolnej funkcji $\mathbb{R}$-różniczkowalnej f mamy

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}, \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Ćwiczenie Obliczyć f_z oraz $f_{\overline{z}}$, gdzie $f(z) = |z|^2 \mathrm{Re}\,(z^8)$.

Dla funkcji $\mathbb{R}$-różniczkowalnej w z_0 mamy więc

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) + o(|z - z_0|)$$

oraz, dla $z \neq z_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} + \frac{o(|z - z_0|)}{z - z_0}.$$

Wspólnie z ostatnim przykładem daje to następującą charakteryzację funkcji $\mathbb{C}$-różniczkowalnych.

Propozycja 2.3. *Funkcja zespolona $f = u + iv$ jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w punkcie z_o wtedy i tylko wtedy, gdy f jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w z_0 oraz $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, tzn. w z_0 spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna:*

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

W takiej sytuacji $f'(z_0) = f_z(z_0)$. $\square$

Powiemy, że funkcja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$, jest holomorficzna, jeżeli jest ona $\mathbb{C}$-różniczkowalna w każdym punkcie. Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych w Ω oznaczamy przez $\mathcal{O}(\Omega)$, natomiast przez $\mathcal{O}_*(\Omega)$ zbiór nigdzie nieznikających funkcji holomorficznych. Z Propozycji 2.1 i 2.2 wynika, że suma, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji holomorficznych są funkcjami holomorficznymi. Jeżeli $f = u + iv$ jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna, to f jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna.

Ćwiczenie Pokazać, że e^z jest jedyną funkcją z $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ taką, że $f' = f$ oraz $f(0) = 1$.

Ćwiczenie Pokazać, że $\cos, \sin, \cosh, \sinh \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ oraz obliczyć pochodne zespolone tych funkcji.

Propozycja 2.4. *Załóżmy, że f jest holomorficzna i klasy C^1 w pewnym otoczeniu $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $f'(z_0) \neq 0$. Wtedy istnieje U - otwarte otoczenie z_0 oraz V - otwarte otoczenie $f(z_0)$, t.że $f : U \to V$ jest bijekcją, f^{-1} jest holomorficzna oraz*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in U. \tag{2.6}$$

Dowód. Jeżeli zapiszemy $f = u + iv$, to rzeczywista różniczka f ma postać

$$A := \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

dzięki równaniom Cauchy'ego-Riemanna. Z drugiej strony, wprost z definicji $\mathbb{C}$-różniczkowalności

$$f' = f_x = u_x - iu_y.$$

Mamy więc

$$\det A = u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2.$$

Dzięki temu, że $f'(z_0) \neq 0$, z rzeczywistego twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie wynika, że istnieją odp. otoczenia U i V, t.że $f : U \to V$ jest bijekcją klasy C^1 oraz f^{-1} jest również klasy C^1. Zapiszmy $f^{-1} = \alpha + i\beta$. Różniczka f^{-1} jest równa

$$\begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}.$$

W szczególności $\alpha_x = \beta_y$, $\alpha_y = -\beta_x$, czyli f^{-1} jest holomorficzna. Formułę (2.6) dostaniemy różniczkując wzór

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad z \in U. \quad \square$$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że $\operatorname{Log} z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ oraz $(\operatorname{Log} z)' = 1/z$.

Podamy teraz formułę na różniczkowanie złożenia funkcji zespolonej z krzywą. Załóżmy, że funkcje $f : \Omega \to \mathbb{C}$ oraz $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (a, b) \to \Omega$ są różniczkowalne (w klasycznym sensie). Wtedy, korzystając z (rzeczywistej) formuły na pochodną złożenia oraz z (2.3), (2.5), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= f_x(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + f_y(\gamma(t))\, \gamma_2'(t) \\ &= f_z(\gamma(t))\, \gamma'(t) + f_{\overline{z}}(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

3. Całkowanie funkcji zespolonych

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Funkcję $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ nazywamy drogą, jeżeli γ jest ciągła oraz γ jest kawałkami klasy C^1, tzn. istnieją $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ takie, że $\gamma \in C^1([t_j, t_{j+1}])$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Punkt $\gamma(a)$ nazywamy początkiem zaś $\gamma(b)$ końcem drogi γ. Obraz γ będziemy oznaczać γ^*. Jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to γ nazywamy drogą zamkniętą.

Załóżmy, że $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą. Definiujemy

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

(Powyższą definicję otrzymamy także rozpatrując część rzeczywistą i urojoną formy różniczkowej $f\,dz = (u + iv)(dx + idy)$.) Zauważmy, że funkcja pod całką jest całkowalna w sensie Riemanna niezależnie od tego jakie wartości przyjmuje w punktach t_j. Ponadto, jeżeli $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ jest dyfeomorfizmem, to $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ jest drogą taką, że $\widetilde{\gamma}^* = \gamma^*$ oraz

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \begin{cases} \int_\gamma f(z)dz, & \text{jeżeli } \varphi' > 0; \\ -\int_\gamma f(z)dz, & \text{jeżeli } \varphi' < 0. \end{cases}$$

Zatem, jeżeli $\gamma|_{(a,b)}$ jest iniekcją, to $\int_\gamma f(z)dz$ zależy tylko od obrazu γ oraz od kierunku, w którym całkujemy, tzn. od orientacji. W takiej sytuacji będziemy często utożsamiać drogi z ich obrazem oraz odpowiednią orientacją.

W szczególności, jeżeli D jest obszarem, którego brzeg można iniektywnie sparametryzować drogą zamkniętą, to możemy mówić o dodatniej orientacji ∂D - będzie nią dowolna parametryzacja o kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara. Całka $\int_{\partial D} f(z)dz$ ma wówczas sens, gdyż nie zależy od wyboru takiej parametryzacji (i jest ona zgodna z całką z formy po krzywej gładkiej). Będziemy używać tego oznaczenia przede wszystkim, gdy D jest kołem lub wnętrzem trójkąta.

Jeżeli f jest określone w pewnym otoczeniu obrazu drogi γ i ma tam funkcję <u>pierwotną</u>, tzn. istnieje funkcja holomorficzna F taka, że $F' = f$, to z (2.7) otrzymamy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{3.1}$$

W szczególności, jeżeli γ jest drogą zamkniętą, to $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Ćwiczenie Pokazać, że jeżeli funkcja $f = u + iv$ ma pierwotną, to pole wektorowe (v, u) jest <u>potencjalne</u>, tzn. $(v, u) = \nabla\chi$ dla pewnej funkcji χ.

Przykład. Dla $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $r > 0$ obliczymy

$$\int_{\partial K(z_0,r)} (z - z_0)^n dz.$$

Odpowiednią parametryzacją tego okręgu będzie

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Wtedy $\gamma'(t) = rie^{it}$ oraz

$$\int_{\partial K(z_0,r)} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^{n+1} i e^{(n+1)it} dt = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \neq -1; \\ 2\pi i, & \text{jeżeli } n = -1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Zauważmy, że dla $n \neq -1$ wynika to również z (3.1), gdyż wtedy funkcja $(z-z_0)^n$ ma pierwotną określoną w otoczeniu $\partial K(z_0, r)$. Pokazuje to także, że funkcja $1/(z-z_0)$ nie ma pierwotnej w żadnym pierścieniu o środku w z_0.

Jeżeli $z, w \in \mathbb{C}$, to przez $[z, w]$ oznaczamy drogę daną przez parametryzację $\gamma(t) = (1 - t)z + tw$, $t \in [0, 1]$.

Ćwiczenie Obliczyć $\displaystyle\int_{[1,i]} \operatorname{Log} z\, dz$.

Ćwiczenie Pokazać, że

$$\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \quad z \in K(z_0, r),$$

trzema sposobami:

i) wprost z definicji, korzystając z faktu, że sinus jest funkcją nieparzystą, a cosinus parzystą, wyprowadzić

$$\int_{\partial K(z_0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2i \int_0^\pi \frac{1 + a\cos t}{1 + 2a\cos t + a^2} dt,$$

gdzie $a = |z - z_0|/r < 1$ i obliczyć odp. całkę nieoznaczoną;

ii) udowodnić, że dla każdej półprostej P o początku w z funkcja $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ ma pierwotną w $\mathbb{C} \setminus P$ oraz użyć (3.1), (3.2);

iii) pokazać, że

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad z \in K(z_0, r), \quad \zeta \in \partial K(z_0, r),$$

przy czym zbieżność jest jednostajna dla $\zeta \in \partial K(z_0, r)$, i użyć (3.2).

Zauważmy, że

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)| dt \le l(\gamma) \max_\gamma |f|, \tag{3.3}$$

gdzie

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

jest długością γ.

Wykład 3, 12.03.2007

4. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Podstawową własnością geometryczną funkcji holomorficznych jest *twierdzenie całkowe Cauchy'ego*. Łatwo wynika ono ze wzoru Greena w następującym przypadku (Cauchy, 1825): załóżmy, że f jest funkcją holomorficzną klasy C^1 w obszarze Ω, natomiast γ jest drogą zamkniętą w Ω, która parametryzuje brzeg klasy C^1 obszaru $D \Subset \Omega$. Wtedy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_D d(f dz) = \int_D f_{\bar z}\, d\bar z \wedge dz = 0.$$

Głównym problemem w uogólnieniu tego faktu jest pozbycie się założenia, że f jest klasy C^1. Zostało to dokonane przez Goursata w 1900 r. Podstawowym krokiem w dowodzie ogólnej wersji twierdzenia całkowego Cauchy'ego było wykazanie jego wzmocnionej wersji dla brzegu trójkąta (sam Goursat rozpatrywał czworokąty, jak jednak wkrótce zauważył Pringsheim, naturalnym obiektami metody Goursata były trójkąty).

Twierdzenie 4.1. *Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C(\Omega)$, gdzie Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$, zaś $z_0 \in \Omega$. Wtedy dla dowolnego trójkąta $T \subset \Omega$ (czyli otoczki wypukłej trzech niewspółliniowych punktów) mamy*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $z_0 \notin T$. Przez z_1, z_2, z_3 oznaczmy wierzchołki T. Rozpatrując punkty $(z_j + z_k)/2$, $j, k = 1, 2, 3$, dzielimy trójkąt T na cztery trójkąty $T^1, \dots, T^4$. Mamy wtedy

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial T^j} f(z)dz.$$

Wybierając jako T_1 odpowiedni z trójkątów $T^1, \dots, T^4$ otrzymamy

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial T_1} f(z)dz\right|.$$

Zauważmy także, że $l(\partial T_1) = l(\partial T)/2$. W ten sam sposób wybieramy indukcyjnie trójkąty T_n, $n = 1, 2, \dots$, tak, że

$$\left|\int_{\partial T_{n-1}} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right|$$

oraz $l(\partial T_n) = l(\partial T_{n-1})/2$. Otrzymaliśmy zatem zstępujący ciąg trójkątów T_n taki, że

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \tag{4.1}$$

oraz

$$\operatorname{diam}(T_n) \leq \frac{l(\partial T_n)}{2} = \frac{l(\partial T)}{2^{n+1}}. \tag{4.2}$$

Z twierdzenia Cantora wynika, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{\widetilde{z}\}$$

dla pewnego $\widetilde{z} \in T$. Z $\mathbb{C}$-różniczkowalności f w $\widetilde{z}$ mamy

$$f(z) = f(\widetilde{z}) + \big(f'(\widetilde{z}) + \varepsilon(z)\big)(z - \widetilde{z}),$$

gdzie

$$\lim_{z \to \widetilde{z}} \varepsilon(z) = 0.$$

Ponieważ funkcja $f(\widetilde{z}) + f'(\widetilde{z})(z - \widetilde{z})$ ma pierwotną, z (3.1) i (3.3) wynika, że

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_n} \varepsilon(z)(z - \widetilde{z})dz\right| \leq l(\partial T_n)\operatorname{diam}(T_n) \max_{T_n} |\varepsilon|.$$

Korzystając z (4.1) i (4.2) otrzymamy dla każdego n

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq \frac{(l(\partial T))^2}{2} \max_{T_n} |\varepsilon|,$$

czyli twierdzenie zachodzi przy założeniu, że $z_0 \notin T$.

Jeżeli $z_0 \in T$, to dzieląc T na trzy (lub dwa) mniejsze trójkąty, których wierzchołkiem jest z_0 widzimy, że bez straty ogólności możemy założyć, że z_0 jest jednym z wierzchołków T. Jeżeli teraz podzielimy T na trójkąt T_n' o wierzchołku w z_0 oraz czworokąt Q_n tak, że $l(T_n')$ dąży do 0, to z poprzedniej części wnioskujemy, że

$$\int_{Q_n} f(z)dz = 0,$$

zatem

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_n'} f(z)dz\right| \leq l(T_n') \max_T |f|. \quad \square$$

Przykłady. i) Niech $f(z) = e^{-z^2}$ i dla $R > 0$ niech T_R będzie trójkątem o wierzchołkach $0, R, R + iR$. Z Twierdzenia 4.1 mamy

$$\int_{\partial T_R} f(z)dz = 0.$$

Ćwiczenie Wywnioskować stąd, że

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

ii) **Ćwiczenie** Całkując funkcję e^{-z^2} po brzegu prostokąta o wierzchołkach $0, R, R + \lambda i, \lambda i$ (ponieważ każdy wielokąt możemy podzielić na skończoną liczbę trójkątów, jest jasne, że Twierdzenie 4.1 zachodzi w przypadku, gdy T jest dowolnym wielokątem) pokazać, że

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\lambda x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Następnym krokiem jest pokazanie związku twierdzenia całkowego Cauchy'ego z istnieniem funkcji pierwotnej.

Twierdzenie 4.2. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$, natomiast f funkcją ciągłą w Ω. Wtedy następujące warunki są równoważne*

i) Istnieje $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $F' = f$;

ii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w Ω.

Jeżeli Ω jest obszarem gwiaździstym, to powyższe warunki są równoważne następującej własności

iii) $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ dla każdego trójkąta $T \subset \Omega$.

Dowód. Implikacja i)⇒ii) wynika natychmiast z (3.1). W celu pokazania implikacji przeciwnej ustalmy $z_0 \in \Omega$. Dla $z \in \Omega$ niech γ będzie dowolną drogą łączącą z_0 oraz z. Kładziemy

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)d\zeta.$$

Dzięki i) widać, że definicja F nie zależy od wyboru γ. Dla odp. małych h mamy

$$F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta, \tag{4.3}$$

a stąd, dzięki (3.3),

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right|\leq \sup_{\zeta\in[z,z+h]}|f(\zeta)-f(z)|.$$

Z ciągłości f w z wynika, że ostatnie wyrażenie dąży do 0. Otrzymaliśmy zatem, że $F\in\mathcal{O}(\Omega)$ oraz $F'=f$.

Jeżeli Ω jest gwiaździsty, to implikacja ii)$\Rightarrow$iii) jest trywialna, natomiast, zakładając, że zachodzi iii) i że Ω jest gwiaździsty względem z_0, kładziemy

$$F(z):=\int_{[z_0,z]} f(z)dz, \quad z\in\Omega.$$

Z iii) wynika, że zachodzi (4.3) i identycznie jak poprzednio dowodzimy, że $F'=f$. $\square$

Z Twierdzeń 4.1 i 4.2 wynika wersja twierdzenia Cauchy'ego dla zbiorów gwiaździstych.

Wniosek 4.3. *Jeżeli obszar Ω jest gwiaździsty i $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})\cap C(\Omega)$ dla pewnego $z_0\in\Omega$, to*

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

dla każdej drogi zamkniętej γ w Ω. $\square$

5. Wzór całkowy Cauchy'ego

Podstawową własnością funkcji holomorficznych jest *wzór całkowy Cauchy'ego* (1831), który odtwarza daną funkcję wewnątrz koła z jej wartości na brzegu.

Twierdzenie 5.1. *Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0,r)$, to*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \quad z\in K(z_0,r). \tag{5.1}$$

Co więcej, f jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna dowolną ilość razy oraz

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \quad z\in K(z_0,r),\quad n=1,2,\dots$$

Dowód. Niech Ω będzie gwiaździstym otoczeniem $\overline{K}(z_0,r)$, w którym funkcja f jest określona. Dla $\zeta\in\Omega$ zdefiniujmy

$$g(\zeta):=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & \zeta\neq z,\\ f'(z), & \zeta=z.\end{cases}$$

Wtedy $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z\}) \cap C(\Omega)$, zatem Wniosek 3.3 implikuje, że

$$0 = \int_{\partial K(z_0,r)} g(\zeta)d\zeta = \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z).$$

Otrzymaliśmy zatem (5.1). Druga część tezy wynika z faktu, że możemy teraz różniczkować pod znakiem całki, zauważmy, że

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n \left(\frac{1}{\zeta - z}\right) &= 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left(\frac{1}{\zeta - z}\right) &= \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad \square\end{aligned}$$

Druga część Twierdzenia 5.1 jest specjalnym przypadkiem ogólnego rezulatu o holomorficzności funkcji danej wzorem całkowym dla dowolnej drogi (nazywanego *lematem o produkcji* funkcji holomorficznych).

Lemat 5.2. *Załóżmy, że γ jest dowolną drogą w $\mathbb{C}$, natomiast g funkcją ciągłą na γ^* . Połóżmy*

$$f(z) := \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$, f jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna dowolną ilość razy oraz dla $n = 1, 2, \dots$ mamy

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*. \quad \square$$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Obliczyć $\displaystyle\int_{\partial K(0,2)} \frac{e^{-z}}{(z+1)^2}\, dz.$

Jeżeli rozpatrzymy wzór Cauchy'ego dla $z = z_0$ oraz parametryzację $\zeta = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, otrzymamy *twierdzenie o wartości średniej.*

Wniosek 5.3. (Poisson, 1823) *Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \quad \square$$

Bezpośrednią konsekwencją wzoru Cauchy'ego jest także *nierówność Cauchy'ego* (1835).

Twierdzenie 5.4. *Niech $f \in \mathcal{O}(K(z_0, r))$ będzie taka, że $|f| \le M$ dla pewnej stałej M. Wtedy*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\, M}{r^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dowód. Wystarczy zastosować wzór Cauchy'ego w kole $K(z_0, \rho)$ dla $\rho < r$ oraz (3.3), a następnie skorzystać z dowolności ρ. $\square$

6. Podstawowe własności funkcji holomorficznych

Udowodnimy teraz szereg własności funkcji holomorficznych wynikających ze wzoru Cauchy'ego. Pokazaliśmy, że każda funkcja holomorficzna jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna dowolną ilość razy. W szczególności, każda funkcja, która lokalnie ma pierwotną jest holomorficzna. Z Twierdzenia 4.2 wynika zatem rezultat odwrotny do twierdzenia całkowego Cauchy'ego.

Twierdzenie 6.1. (Morera, 1886) *Załóżmy, że funkcja $f \in C(\Omega)$ (Ω otwarty w $\mathbb{C}$) spełnia*

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

dla każdego trójkąta $T \subset \Omega$. Wtedy $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

Ćwiczenie Pokazać, że jeżeli $f \in C(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, to $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Przypomnimy teraz regularyzację funkcji przez splot, która jest przydatna w rozwiązaniu następnego ćwiczenia. Niech $\rho \in C^\infty(\mathbb{C})$ będzie takie, że $\operatorname{supp} \rho = \overline{\Delta}$ (ozn. $\Delta := K(0,1)$), $\rho \geq 0$, $\rho(z)$ zależy tylko od $|z|$ oraz $\int_{\mathbb{C}} \rho\, d\lambda = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ położmy $\rho_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-2}\rho(z/\varepsilon)$, wtedy $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon = \overline{K}(0,\varepsilon)$ oraz $\int_{\mathbb{C}} \rho_\varepsilon\, d\lambda = 1$. Dla $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ i $w \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : K(z,\varepsilon) \subset \Omega\}$ kładziemy

$$f_\varepsilon(w) := (f * \rho_\varepsilon)(w) = \int_{K(w,\varepsilon)} f(z)\rho_\varepsilon(w-z)d\lambda(z) = \int_{\Delta} f(w-\varepsilon z)\rho(z)d\lambda(z).$$

Wtedy $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ (przy czym $D^\alpha f_\varepsilon = f * D^\alpha \rho_\varepsilon$), $f_\varepsilon \to f$ w $L^1_{loc}(\Omega)$, gdy $\varepsilon \to 0$, natomiast jeżeli f jest ciągłe, to zbieżność jest lokalnie jednostajna.

Ćwiczenie Udowodnić twierdzenie Morery dla kół: jeżeli dla $f \in C(\Omega)$ zachodzi $\int_{\partial K(z_0,r)} f(z)\, dz = 0$ dla każdego koła $\overline{K}(z_0,r) \subset \Omega$, to $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Funkcję holomorficzną określoną na $\mathbb{C}$ nazywamy <u>całkowitą</u>.

Twierdzenie 6.2. (Liouville, 1847, Cauchy, 1844) *Każda ograniczona funkcja całkowita jest stała.*

Dowód. Jeżeli $|f| \leq M$ na $\mathbb{C}$, to z nierówności Cauchy'ego wynika, że $|f'(z)| \leq M/r$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$. Jeżeli więc $r \to \infty$, to dostaniemy, że $f' = 0$ na $\mathbb{C}$. Ale to oznacza, że również pochodna rzeczywista f wszędzie znika. □

Wykład 4, 19.03.2007

Ćwiczenie Pokazać, że jeżeli funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ jest taka, że $\operatorname{Re} f \leq M$ dla pewnej stałej M, to f jest stała.

Ćwiczenie Pokazać, że jeżeli funkcja całkowita f spełnia

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \quad \text{gdy } |z| \geq R,$$

dla pewnych $C, R > 0$, to f musi być wielomianem stopnia $\leq n$.

Z twierdzenia Liouville'a w łatwy sposób wynika zasadnicze twierdzenie algebry. Bo jeżeli niestały wielomian P nie miałby pierwiastka, to $f := 1/P$ byłoby funkcją całkowitą. Co więcej

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0.$$

W szczególności, f byłaby funkcją ograniczoną, a więc na mocy twierdzenia Liouville'a otrzymalibyśmy, że P jest stały.

Następnym rezulatem jest *zasada maksimum* dla funkcji holomorficznych.

Twierdzenie 6.3. *Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w obszarze Ω taką, że $|f|$ osiąga maksimum w Ω, to f jest stała.*

Dowód. Dla $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$ z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

Jeśli zatem $|f| \leq |f(z_0)|$ na $\partial K(z_0, r)$, to z ciągłości $|f|$ wynika, że $|f| = |f(z_0)|$ na $\partial K(z_0, r)$, a wobec dowolności r, także w $K(z_0, r)$. Twierdzimy, że jeżeli $|f| = |f(z_0)|$ w $K(z_0, r)$, to wtedy $f = f(z_0)$ w $K(z_0, r)$. Jeżeli $f(z_0) = 0$, to jest to oczywiste, możemy więc założyć, że $f \neq 0$ w $K(z_0, r)$. Mamy

$$0 = (|f|^2)_z = f_z \overline{f} + \overline{(f_{\overline{z}})} f = f' \overline{f},$$

a zatem $f' = 0$, więc $f = f(z_0)$ w $K(z_0, r)$. Pokazaliśmy więc, że jeżeli $\max\limits_{\overline{K}(z_0,r)} |f| = |f(z_0)|$, to $f = f(z_0)$ w $K(z_0, r)$.

Jeżeli teraz $|f|$ osiąga maksimum w $z_0 \in \Omega$, to kładziemy

$$\Omega' := \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}.$$

Zbiór ten jest oczywiście domknięty, natomiast z pierwszej części dowodu wynika, że jest on również otwarty, co oznacza, że $\Omega' = \Omega$. $\square$

Twierdzenie 6.3 to słaba zasada maksimum (zakładamy, że maksimum jest globalne), niedługo pokażemy wzmocnienie Twierdzenia 6.3 (przy założeniu, że maksimum jest lokalne).

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Niech wielomian $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ będzie taki, że $|P(z)| \leq 1$, gdy $|z| = 1$. Pokazać, że $|a_j| \leq 1$, $j = 1, \ldots, n$.

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Niech f będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu pierścienia $\{1 \leq |z| \leq 3\}$ taką, że $|f| \leq 1$, gdy $|z| = 1$ oraz $|f| \leq 9$, gdy $|z| = 3$. Pokazać, że $|f(z)| \leq 4$, gdy $|z| = 2$.

Przy pomocy wzoru Cauchy'ego możemy też łatwo udowodnić dwa twierdzenia dotyczące ciągów funkcji holomorficznych.

Twierdzenie 6.4. (Weierstrass, 1841) *Jeżeli f_n jest ciągiem funkcji holomorficznych w Ω zbieżnym lokalnie jednostajnie do funkcji f, to f jest funkcją holomorficzną oraz dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ mamy lokalnie jednostajną zbieżność $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$.*

Dowód. Niech $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$. Funkcje f_n spełniają wzór Cauchy'ego (3.6), zatem spełnia go również f. Z Lematu 4.2 wynika, że f jest holomorficzna w $K(z_0, r)$. Co więcej, z nierówności Cauchy'ego dostaniemy

$$\max_{\overline{K}(z_0,r/2)} |f_n^{(k)} - f^{(k)}| \leq \frac{k!}{(r/2)^k} \max_{\overline{K}(z_0,r/2)} |f_n - f|. \quad \square$$

Twierdzenie 6.5. (Montel, 1911) *Jeżeli f_n jest lokalnie jednostajnie ograniczonym ciągiem funkcji holomorficznych na obszarze Ω w $\mathbb{C}$, to istnieje podciąg f_{n_k} zbieżny lokalnie jednostajnie w Ω.*

Dowód. Jeżeli $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$, to z wzoru Cauchy'ego mamy

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| = \left| \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \leq \frac{M\delta}{r(r - \delta)},$$

gdzie $|z - z_0| \leq \delta$ oraz $|f_n| \leq M$ w $\overline{K}(z_0, r)$. Wynika stąd, że rodzina $\{f_n\}$ jest jednakowo ciągła, tzn.

$$\forall\, z_0 \in \Omega\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, n :\ |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| \leq \varepsilon.$$

Teza twierdzenia wynika teraz z twierdzenia Arzeli-Ascoliego. $\square$

Ćwiczenie Korzystając z twierdzenia Baire'a pokazać, że jeżeli $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ jest ciągiem zbieżnym punktowo w Ω, to istnieje otwarty, gęsty podzbiów Ω' w Ω, gdzie ciąg f_n jest lokalnie jednostajnie ograniczony, skąd wynika, że $\lim f_n \in \mathcal{O}(\Omega')$.

7. Szeregi potęgowe

Wyrażenie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \tag{7.1}$$

nazywamy szeregiem potęgowym o środku w $z_0 \in \mathbb{C}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots$.

Przykład. Szereg geometryczny $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$. Wynika to ze wzoru

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

Możemy zatem zapisać

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1. \tag{7.2}$$

Twierdzenie 7.1. (Cauchy, 1821, Hadamard, 1892) *Połóżmy*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{7.3}$$

Wtedy szereg (7.1) jest bezwzględnie i lokalnie jednostajnie zbieżny w kole $K(z_0, R)$ oraz rozbieżny dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, R)$.

Dowód. Dla $z \in K(z_0, R)$ niech r i λ będą takie, że $|z - z_0| \leq r < R$ oraz $r/R < \lambda < 1$. Wtedy dla n odp. dużego mamy $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda/r$, zatem

$$\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n(z - z_0)^n\right| \leq \sum_{n=N_1}^{N_2} |a_n(z - z_0)^n| \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda^{N_1}}{1-\lambda} \to 0,$$

gdy $N_1 \to \infty$. Z warunku Cauchy'ego zbieżności otrzymaliśmy zatem bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregu na $\overline{K}(z_0, r)$.

Z drugiej strony, jeżeli $|z - z_0| > R$, to istnieje podciąg a_{n_k} taki, że $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq 1/|z - z_0|$, co oznacza, że $|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| \geq 1$, nie jest zatem spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. □

Koło $K(z_0, R)$ z Twierdzenia 7.1 nazywamy <u>kołem zbieżności</u>, zaś R <u>promieniem zbieżności</u> szeregu (7.1). Formuła (7.3) na promień zbieżności szeregu potęgowego nosi nazwę *wzoru Cauchy'ego-Hadamarda*. Zauważmy, że promień zbieżności szeregu (7.1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $M > 0$ takie, że dla n odp. dużego mamy $|a_n| \leq M^n$ - wtedy $R \geq 1/M$.

Twierdzenie 7.1 nie rozstrzyga zbieżności szeregu potęgowego na brzegu koła zbieżności.

Przykłady. Kołem zbieżności każdego z szeregów $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ jest $K(0, 1)$.

i) Szereg $\sum z^n$ jest rozbieżny we wszystkich punktach z brzegu koła zbieżności.

ii) Szereg $\sum z^n/n^2$ jest zbieżny bezwzględnie na brzegu.

iii) Szereg $\sum z^n/n$ jest rozbieżny w 1 i zbieżny warunkowo na $\partial K(0, 1) \setminus \{1\}$ (**Ćwiczenie**).

iv) **Ćwiczenie** Pokazać, że istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych p_n oraz gęste podzbiory $A_+, A_- \subset \partial K(0, 1)$ takie, że $z^{p_n} = \pm 1$ dla $z \in A_\pm$. Stąd szereg $\sum z^{np_n}/n$ jest rozbieżny w A_+ i zbieżny warunkowo w A_-.

Istotną własnością szeregów potęgowych jest jednoznaczność ich współczynników.

Propozycja 7.2. *Załóżmy, że szeregi potęgowe $\sum a_n(z - z_0)^n$ oraz $\sum b_n(z - z_0)^n$ są zbieżne do tych samych wartości na zbiorze A takim, że z_0 jest punktem skupienia A. Wtedy $a_n = b_n$ dla wszystkich n.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $b_n = 0$ dla wszystkich n. Przypuśćmy, że $a_m \neq 0$ dla pewnego m i wybierzmy najmniejsze takie m. Wtedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n, \quad z \neq z_0.$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n$, zbieżny do pewnej funkcji ciągłej w otoczeniu z_0 (dzięki Twierdzeniu 7.1), znika dla $z \in A$, zatem znika również w z_0, czyli $a_m = 0$ - sprzeczność. □

Przykład. Rozpatrzmy ciąg Fibonacciego (1202):

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Ćwiczenie Pokazać, że w pewnym (rzeczywistym) otoczeniu 0 mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

oraz, rozwijając prawą stronę w szereg potęgowy, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \text{(de Moivre, 1730).}$$

Następujący rezultat jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 6.4 (można go zresztą udowodnić w bardziej elementarny sposób).

Twierdzenie 7.3. *Suma szeregu potęgowego jest funkcją holomorficzną w kole zbieżności. Szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie.* □

Wniosek 7.4. *Jeżeli*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dla z w pewnym otoczeniu z_0, to

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dowód. Z Twierdzenia 7.3 mamy

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)\, a_n (z-z_0)^{n-m}$$

i dla $z = z_0$ otrzymujemy żądany wynik. □

Otrzymujemy teraz natychmiast nierówność Cauchy'ego dla szeregów potęgowych.

Wniosek 7.5. *Przypuśćmy, że*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

spełnia $|f(z)| \le M$ dla $z \in K(z_0, r)$. Wtedy

$$|a_n| \le \frac{M}{r^n}, \quad n = 0, 1, \ldots \quad \square$$

8. Podstawowe własności funkcji holomorficznych, cd.

Udowodnimy najpierw, że każda funkcja holomorficzna w kole jest granicą szeregu potęgowego, czyli wynik odwrotny do Twierdzenia 7.3.

Twierdzenie 8.1. *Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy dla każdego $z_0 \in \Omega$ funkcja f rozwija się w szereg Taylora w kole $K(z_0, \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega))$, tzn.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Dowód. Niech r będzie takie, że $|z - z_0| < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Skorzystamy ze wzoru Cauchy'ego (5.1). Dla $\zeta \in \partial K(z_0, r)$ dzięki (7.2) mamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

przy czym zbieżność jest jednostajna dla $\zeta \in \partial K(z_0, r)$. Zatem

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad \square \end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że funkcje holomorficzne to dokładnie te funkcje, które można lokalnie rozwinąć w szereg potęgowy (będący równocześnie szeregiem Taylora tej funkcji). Co więcej, szereg Taylora funkcji holomorficznej w danym punkcie jest zbieżny w każdym kole o środku w tym punkcie, w którym funkcja ta jest określona.

Zasadę identyczności dla funkcji holomorficznych łatwo teraz wynika z zasady identyczności dla szeregów potęgowych (Propozycja 7.2).

Twierdzenie 8.2. *Niech f, g będą funkcjami holomorficznymi w obszarze Ω. Załóżmy, że $f = g$ na zbiorze $A \subset \Omega$ posiadającym punkt skupienia w Ω. Wtedy $f = g$ w Ω.*

Dowód. Jeżeli z_0 jest punktem skupienia zbioru A, to z Twierdzenia 7.6 i Propozycji 7.2 wynika, że $f = g$ w dowolnym kole $K(z_0, r) \subset \Omega$. Zatem zbiór $\Omega' = \{z \in \Omega : f = g \text{ w pewnym otoczeniu } z\}$ jest domknięty w Ω. Ponieważ jest on również oczywiście otwarty, otrzymujemy $\Omega' = \Omega$. $\square$

Ćwiczenie i) Czy istnieje $f \in \mathcal{O}(K(0,1))$ takie, że $f(1/n) = n/(n+1)$, $n = 2, 3, \dots$?
ii) Czy istnieje $f \in \mathcal{O}(K(0,1))$ takie, że $f(1/n) = n/(n+2)$, $n = 2, 3, \dots$?
iii) Czy istnieje $f \in \mathcal{O}(K(0,1))$ takie, że $f(1/n) = e^{-n}$, $n = 2, 3, \dots$?

Z Twierdzeń 6.3 i 8.2 wynika natychmiast *mocna zasada maksimum* dla funkcji holomorficznych.

Twierdzenie 8.3. *Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w obszarze Ω taką, że $|f|$ osiąga maksimum lokalne w Ω, to f jest stała.* $\square$

Wykład 5, 26.03.2007

Korzystając z zasady identyczności oraz zasady maksimum można udowodnić *twierdzenie o odwzorowaniu otwartym*.

Twierdzenie 8.4. *Niestałe funkcje holomorficzne określone na obszarze w $\mathbb{C}$ są odwzorowaniami otwartymi.*

Dowód. Trzeba pokazać, że jeżeli f jest funkcją holomorficzną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$, to istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(K(z_0, r)) \supset K(w_0, \delta)$, gdzie $w_0 = f(z_0)$. Wybieramy $\varepsilon \in (0, r)$ tak, że $w_0 \notin f(\partial K(z_0, \varepsilon))$. Gdyby takie ε nie istniało, to dla każdego odp. małego $\varepsilon > 0$ znaleźlibyśmy punkty z_ε takie, że $|z_0 - z_\varepsilon| = \varepsilon$ oraz $f(z_\varepsilon) = w_0$. Dzięki zasadzie identyczności stałoby to w sprzeczności z tym, że funkcja f nie jest stała. Kładziemy teraz

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{\zeta \in \partial K(z_0, \varepsilon)} |f(\zeta) - w_0|.$$

Z definicji ε wynika, że $\delta > 0$. Dla $w \in K(w_0, \delta)$ musimy teraz znaleźć $z \in K(z_0, \varepsilon)$ takie, że $f(z) = w$. Przypuśćmy, że takie z nie istnieje. Z definicji δ mamy

$$|f(\zeta) - w| \geq |f(\zeta) - w_0| - |w_0 - w| > \delta, \quad \zeta \in \partial K(z_0, \varepsilon).$$

Funkcja $z \mapsto 1/(f(z) - w)$ jest więc holomorficzna w otoczeniu $\overline{K}(z_0, \varepsilon)$, zatem z zasady maksimum wynika, że

$$\frac{1}{|f(z) - w|} \leq \max_{\zeta \in \partial K(z_0, \varepsilon)} \frac{1}{|f(\zeta) - w|} < \frac{1}{\delta}, \quad z \in K(z_0, \varepsilon).$$

Dla $z = z_0$ otrzymamy $|w_0 - w| > \delta$ - sprzeczność. $\square$

Zauważmy, że w przypadku rzeczywistym nawet wielomiany nie muszą być odwzorowaniami otwartymi, np. $f(x) = x^2$.

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym łatwo wynika słaba zasada maksimum (Twierdzenie 6.3) oraz lemat d'Alemberta (Lemat 1.2).

9. Funkcje analityczne

Funkcję $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nazywamy analityczną, jeżeli dla każdego $x_0 \in (a, b)$ istnieje $r > 0$ takie, że f jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $(x_0 - r, x_0 + r)$. Korzystając z własności szeregów potęgowych można elementarnie pokazać następujący fakt.

Propozycja 9.1. *Jeżeli funkcje f, g są funkcjami analitycznymi, to również funkcje $f \pm g$, fg oraz f/g (ta ostatnia pod warunkiem, że $g \neq 0$) są analityczne.*

Przykład. Funkcja $1/(1 + x^2)$ jest analityczna na $\mathbb{R}$ dzięki Propozycji 9.1. Szereg Taylora w 0 ma postać (korzystamy z (7.2))

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Szereg ten jest zbieżny tylko w przedziale $(-1, 1)$, a więc, w przeciwieństwie do przypadku zespolonego, funkcji analitycznej nie można zawsze rozwinąć w szereg Taylora w maksymalnym przedziale, w którym funkcja jest określona.

Funkcje analityczne są ściśle związane z funkcjami holomorficznymi dzięki następującej charakteryzacji.

Propozycja 9.2. *Każda funkcja analityczna na (a, b) jest zacieśnieniem pewnej funkcji holomorficznej określonej w pewnym otoczeniu (a, b) w $\mathbb{C}$.*

Dowód. Jeżeli dla $\alpha \in (a,b)$ mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n, \quad x \in (\alpha - r_\alpha, \alpha + r_\alpha),$$

to jest oczywiste (dzięki Twierdzeniu 7.1), że zespolony szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ jest zbieżny do funkcji holomorficznej f_α w kole $K(\alpha, r_\alpha)$. Co więcej, z zasady identyczności wynika, że $f_\alpha = f_\beta$ w $K(\alpha, r_\alpha) \cap K(\beta, r_\beta)$. Na obszarze

$$\bigcup_{\alpha \in (a,b)} K(\alpha, r_\alpha) \subset \mathbb{C}$$

możemy więc dobrze zdefiniować funkcję holomorficzną $\widetilde{f} := f_\alpha$ na $K(\alpha, r_\alpha)$. $\square$

Zauważmy, że Propozycja 9.1 wynika z Propozycji 9.2 i własności funkcji holomorficznych. To, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji $1/(1+x^2)$ w 0 wynosi 1 wynika z tego, że jej jednoznacznie określone zespolone przedłużenie, czyli funkcja $1/(1+z^2)$, ma osobliwości w $\pm i$.

Przykład. Funkcja e^{-1/x^2} (0 dla $x = 0$) jest klasy C^∞ w $\mathbb{R}$ oraz $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdego n. Szereg Taylora funkcji f w 0 znika zatem tożsamościowo, czyli nie jest zbieżny do f w żadnym otoczeniu 0. Funkcja f nie jest więc analityczna na $\mathbb{R}$. Wynika to również z faktu, że funkcja e^{-1/z^2}, holomorficzna na $\mathbb{C}_*$, nie przedłuża się do funkcji całkowitej (ponieważ np. $e^{-1/(it)^2} = e^{1/t^2} \to \infty$, gdy $t \to 0$).

Ćwiczenie Znaleźć promień zbieżności szeregu Taylora w 0 funkcji

$$\frac{x}{e^x - 1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right)^{-1}.$$

Uwaga. Funkcje analityczne na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ definiuje się w identyczny sposób jak poprzednio: są to dokładnie funkcje lokalnie rozwijalne w szereg Taylora. *Nierówność Łojasiewicza* (1958) mówi, że jeżeli f jest funkcją analityczną w $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, to dla każdego zwartego $K \subset \Omega$ istnieją stałe $M, \alpha > 0$ takie, że

$$|f(x)| \geq \frac{1}{M} (\mathrm{dist}(x, \{f = 0\}))^\alpha, \quad x \in K.$$

Jeżeli f jest wielomianem, to można znaleźć stałe M, α niezależne od K.

10. Globalne twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Będziemy chcieli uogólnić twierdzenie całkowe Cauchy'ego (zob. Wniosek 4.3) na szerszą klasę obszarów i dróg zamkniętych. Pokażemy najpierw, że jeżeli $D \Subset \mathbb{C}$ jest obszarem o brzegu klasy C^1 (a nawet kawałkami klasy C^1), to dla funkcji holomorficznej f w otoczeniu $\overline{D}$ mamy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D. \tag{10.1}$$

Wynika to z następującej konsekwencji wzoru Greena (1828).

Twierdzenie 10.1. *Załóżmy, że D jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$ o brzegu klasy C^1. Wtedy dla $f \in C^1(\overline{\Omega})$ mamy*

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_D \frac{f_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \quad z \in D.$$

Dowód. Dla $\varepsilon > 0$ oznaczmy $D_\varepsilon = D \setminus \overline{K}(z, \varepsilon)$. Ze wzoru Greena mamy

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\int_{D_\varepsilon} \frac{f_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Z drugiej strony

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial D} - \int_{\partial K(z,\varepsilon)} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it}) dt.$$

Gdy $\varepsilon \to 0$ otrzymamy tezę (korzystając przy okazji z tego, że $1/\zeta \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$). $\square$

Zauważmy, że $dz \wedge d\overline{z} = -2i dx \wedge dy$, a stąd

$$\pi\varphi(0) = -\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_{\overline{z}}(\zeta)}{\zeta}\, d\lambda, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}).$$

Oznacza to, że w sensie dystrybucyjnym

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{1}{z} \right) = \pi \delta_0,$$

tzn. funkcja $1/(\pi z)$ jest rozwiązaniem fundamentalnym dla operatora $\partial/\partial\overline{z}$.

W celu uogólnienia wzoru (10.1) wprowadzimy pojęcie <u>indeksu</u> drogi zamkniętej w $\mathbb{C}$.

Propozycja 10.2. *Dla drogi zamkniętej $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ połóżmy*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Wtedy Ind_γ jest funkcją o wartościach całkowitych, stałą na każdej składowej spójnej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, znikającą na składowej nieograniczonej $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Liczba $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ jest równa liczbie obrotów (w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara) wektora o początku w z i końcu w $\gamma(t)$, $a \le t \le b$, dookoła z.

Dowód. Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ będzie funkcją kawałkami klasy C^1. Dla funkcji

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right), \quad t \in [a, b],$$

mamy $\varphi' = \varphi\gamma'/(\gamma - z)$, a stąd $(\varphi/(\gamma - z))' = 0$ (tam, gdzie γ jest klasy C^1). Stąd wynika, że funkcja $\varphi/(\gamma - z)$ jest stała. Korzystając z faktu, że $\varphi(a) = 1$, otrzymujemy

$$\exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}, \quad t \in [a, b].$$

Dla $t = b$ oznacza to, że $\exp(2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(z)) = 1$, co jest równoważne temu, że $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $\operatorname{Ind}_\gamma$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (a dzięki lematowi o produkcji funkcji holomorficznych mamy nawet $\operatorname{Ind}_\gamma \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$), $\operatorname{Ind}_\gamma$ jest więc stała na każdej składowej $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Z definicji $\operatorname{Ind}_\gamma$ łatwo otrzymujemy także, że

$$\lim_{|z|\to\infty} \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0,$$

skąd wnioskujemy, że $\operatorname{Ind}_\gamma = 0$ na składowej nieograniczonej $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Przez $A(t)$, $t \in [a, b]$, oznaczymy całkowity przyrost argumentu wektora $\gamma(s) - z$, gdy s rośnie od a do t. Znajdziemy podział $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ taki, że $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ jest zawarte w kole niezawierającym z, $j = 1, \dots, n$. Dla danego j możemy wtedy wybrać logarytm tak, by był ciągły na $\gamma([t_{j-1}, t_j])$. Otrzymamy

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(z) &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \\
&= \sum_{j=1}^n (\log(\gamma(t_j) - z) - \log(\gamma(t_{j-1}) - z)) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\log\left|\frac{\gamma(t_j) - z}{\gamma(t_{j-1}) - z}\right| + i(A(t_j) - A(t_{j-1}))\right) \\
&= i(A(b) - A(a)). \quad \square
\end{aligned}$$

W dalszym ciągu wygodnie będzie całkować funkcje zespolone po skończonej *sumie* dróg (np. po brzegu gładkiego obszaru wielospójnego). Niech $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ będą drogami w $\mathbb{C}$. Tworzą one <u>łańcuch</u>, który zapisujemy $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$. Obrazem łańcucha Γ jest $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_k*$. Mamy wtedy

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z)dz, \quad f \in C(\Gamma^*), \tag{10.2}$$

przy czym prawą stronę możemy traktować jako formalną definicję łańcucha Γ, tzn. jako funkcjonał liniowy określony na $C(\Gamma^*)$. Zauważmy, że tak naprawdę do tej pory dla danej drogi γ interesował nas właściwie tylko funkcjonał

$$C(\gamma^*) \ni f \mapsto \int_\gamma f(z)dz \in \mathbb{C}.$$

Dlatego też sumę $\gamma_1 + \dots + \gamma_k$ należy rozumieć jako sumę odpowiednich funkcjonałów (a oczywiście nie jako sumę algebraiczną funkcji $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, która zresztą nie miałaby w ogólnym przypadku sensu). W oczywisty sposób definiujemy sumę i różnicę dwóch łańcuchów. Długością łańcucha $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ jest $l(\Gamma) = l(\gamma_1) + \cdots + l(\gamma_k)$. Jest oczywiste (dzięki (3.3)), że norma funkcjonału (10.2) nie przekracza $l(\Gamma)$.

Jeżeli wszystkie drogi $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ są zamknięte, to łańcuch $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ nazywamy cyklem. Na cykle możemy rozszerzyć pojęcie indeksu:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*.$$

Lemat 10.3. *Załóżmy, że K jest zwartym podzbiorem zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$. Wtedy istnieje cykl Γ taki, że $\Gamma^* \subset U \setminus K$, $\mathrm{Ind}_\Gamma = 1$ na K oraz $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$ na $\mathbb{C} \setminus K$.*

Dowód. Pokryjmy $\mathbb{C}$ siatką przystających sześciokątów foremnych o średnicy nie większej niż połowa odległości K od $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Niech $Q_1, \dots, Q_m$ będą sześciokątami mającymi niepuste przecięcie z K. Z $6m$-elementowego zbioru odcinków zorientowanych będących bokami tych sześciokątów usuwamy te odcinki, dla których odcinki z przeciwną orientacją również należą do tego zbioru. Otrzymany zbiór odcinków zorientowanych oznaczmy przez Σ. Zauważmy, że dla każdego $\gamma \in \Sigma$ mamy $\gamma^* \subset \Omega \setminus K$ oraz istnieje dokładnie jedno $\widetilde{\gamma} \in \Sigma$ o początku równym końcowi γ. Wynika stąd łatwo, że wszystkie elementy Σ, odp. uporządkowane, tworzą cykl $\Gamma \subset \Omega \setminus K$. Ponieważ $\mathrm{Ind}_{\partial Q_j} = 1$ we wnętrzu Q_j oraz $\mathrm{Ind}_{\partial Q_j} = 0$ poza Q_j, $j = 1, \dots, m$, wnioskujemy stąd, że $\mathrm{Ind}_\Gamma = 1$ we wnętrzu $Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ oraz $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$ poza $Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$. $\square$

Lemat 10.3 wynika też natychmiast z następującego, intuicyjnie oczywistego faktu z analizy różniczkowej, z którego jednak nie będziemy korzystać:

Dla obszaru $D \Subset \mathbb{C}$ o brzegu kawałkami klasy C^1
istnieje cykl Γ taki, że $\Gamma^* = \partial D$ oraz $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1,\ z \in D$.

Wykład 6, 2.04.2007

Poniższe twierdzenie precyzyjnie charakteryzuje cykle, dla których zachodzi twierdzenie całkowe oraz wzór całkowy Cauchy'ego.

Twierdzenie 10.4. *Dla cyklu Γ w obszarze Ω NWSR*

i) $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega \setminus \Gamma, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *(wzór całkowy Cauchy'ego);*

ii) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *(twierdzenie całkowe Cauchy'ego);*

iii) $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$

Dowód. (Dixon, 1971) i)⇒ii) Dla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i $z \in \Omega \setminus \Gamma$ niech $h(\zeta) := (\zeta - z)f(\zeta)$. Wtedy korzystając z i) mamy

$$0 = \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta.$$

ii)⇒iii) Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ funkcja $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ jest holomorficzna w Ω.

iii)⇒i) Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dla $z, w \in \Omega$ połóżmy

$$g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Twierdzimy, że $g \in C(\Omega \times \Omega)$. Jest oczywiste, że funkcja g jest ciągła na $\Delta = \{(z,w) \in \Omega \times \Omega : z = w\}$ oraz na $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$. Dla $z, w \in K(a,r)$, $z \neq w$, gdzie $r > 0$ jest takie że $\overline{K}(a,r) \subset \Omega$, ze wzoru Cauchy'ego dla koła otrzymamy

$$\begin{aligned} g(z,w) - g(a,a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \left[\frac{1}{z-w} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \right) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - w)} - \frac{1}{(\zeta - a)^2} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie dąży do 0 jednostajnie na $\partial K(a,r)$, gdy $(z,w) \to (a,a)$, a więc $g \in C(\Omega \times \Omega)$. Zdefiniujmy

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta, & z \in \Omega, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, & z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, f(z), \quad z \in \Omega \setminus \Gamma. \tag{10.3}$$

Z ciągłości g wynika, że h jest ciągła w Ω. Dla trójkąta $T \subset \Omega$ z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\int_{\partial T} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_{\partial T} g(\zeta, z) dz\, d\zeta = 0$$

(dzięki Wnioskowi 4.3), z twierdzenia Morery otrzymamy zatem holomorficzność h w Ω. Dla $a \in \partial\Omega$ niech $r > 0$ będzie takie, że $\overline{K}(a,r) \cap \Gamma = \emptyset$. Z iii) mamy $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$, a więc także $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ dla $z \in \overline{K}(a,r)$. Wtedy z (10.3) wynika, że definicja h jest więc zgodna w otoczeniu $\partial\Omega$. Z lematu o produkcji funkcji holomorficznych wnioskujemy teraz, że h jest funkcją całkowitą. Co więcej

$$\lim_{|z| \to \infty} h(z) = 0,$$

z twierdzenia Liouville'a mamy zatem $h \equiv 0$. Z (10.3) otrzymujemy i). $\Box$

Drogę zamkniętą γ w obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$ nazywamy <u>homologiczną zeru</u> w Ω, jeżeli $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Przypomnijmy, że γ jest <u>homotopijna zeru</u> w Ω, jeżeli istnieje ciągłe odwzorowanie $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ takie, że dla każdego $s \in [0,1]$ krzywa $H(s, \cdot)$ jest zamknięta, $H(0, \cdot) = \gamma$ oraz $H(1, \cdot)$ jest stałe (czyli γ można *ściągnąć* w Ω do punktu).

Propozycja 10.5. *Każda droga zamknięta γ w obszarze Ω, która jest homotopijna zeru w Ω jest również homologiczna zeru w Ω.*

Rezultat odwrotny do Propozycji 10.5 nie jest prawdziwy (rys. ...).

W celu udowodnienia Propozycji 10.5 rozszerzymy definicję indeksu na krzywe zamknięte (przypomnijmy, że krzywe w $\mathbb{C}$, to ciągłe odwzorowania $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, gdzie $[a, b]$ jest przedziałem zwartym; są one zamknięte, jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$; podobnie jak w przypadku dróg obraz krzywej γ również oznaczamy γ^*).

Propozycja 10.6. *Dla dowolnej krzywej zamkniętej $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ można jednoznacznie zdefiniować liczbę całkowitą $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ tak, że definicja ta pokrywa się z definicją indeksu, gdy γ jest drogą, oraz jeżeli $\gamma_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest ciągiem krzywych zamkniętych jednostajnie zbieżnym do γ, to dla odp. dużego n mamy $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z)$.*

Dowód. Oznaczmy $d := \mathrm{dist}(z, \gamma)$. Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ będą drogami zamkniętymi takimi, że $||\gamma_1 - \gamma|| := \max_{[a,b]} |\gamma_1 - \gamma| \le d/4$, $||\gamma_2 - \gamma|| \le d/4$ (takie drogi istnieją dzięki temu, że funkcje ciągłe na zbiorach zwartych możemy jednostajnie aproksymować funkcjami klasy C^∞). Połóżmy

$$\widetilde{\gamma} := \frac{\gamma_1 - z}{\gamma_2 - z}, \quad t \in [a, b].$$

Wtedy

$$|\widetilde{\gamma} - 1| \le \frac{|\gamma_1 - \gamma| + |\gamma_2 - \gamma|}{|\gamma - z| - |\gamma_2 - \gamma|} \le \frac{2}{3},$$

a więc $\widetilde{\gamma}$ jest drogą zamkniętą zawartą w $\overline{K}(1, 2/3)$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} - \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t) - z} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\widetilde{\gamma}'(t)}{\widetilde{\gamma}(t)} dt \\ &= \mathrm{Ind}_{\widetilde{\gamma}}(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że indeks każdej drogi zamkniętej, która jest odpowiednio blisko krzywej γ jest taki sam. W ten sposób możemy zdefiniować indeks krzywej γ. Z powyższego rozumowania wynika także, że jeżeli $\beta : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest krzywą zamkniętą taką, że $||\beta - \gamma|| < d/4$, to $\mathrm{Ind}_\beta(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z)$, skąd wnioskujemy drugą część tezy. $\square$

Dowód Propozycji 10.5. Z Propozycji 10.6 wynika, że dla $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ funkcja

$$[0, 1] \ni s \mapsto \mathrm{Ind}_{H(s,\cdot)}(z) \in \mathbb{Z}$$

jest ciągła, a więc stała, a stąd $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_{H(1,\cdot)}(z) = 0$. $\square$

Z Twierdzenia 10.4 i Propozycji 10.5 otrzymujemy natychmiast następujący rezultat.

Wniosek 10.7. *Jeżeli γ jest drogą zamkniętą, homotopijną zeru w obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$, zaś f funkcją holomorficzną w Ω, to*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0. \quad \square$$

Możemy teraz także scharakteryzować obszary, w których wszystkie funkcje holomorficzne mają pierwotną.

Twierdzenie 10.8. *Dla obszaru* Ω *w* $\mathbb{C}$ *NWSR*
i) Dla każdego $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *istnieje* $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ *takie, że* $F' = f$*;*
ii) Dla każdego $f \in \mathcal{O}_*(\Omega)$ *istnieje* $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ *takie, że* $e^g = f$*;*
iii) Dla każdego $f \in \mathcal{O}_*(\Omega)$ *istnieje* $g \in \mathcal{O}_*(\Omega)$ *takie, że* $g^2 = f$*;*
iv) Każda droga zamknięta w Ω *jest homologiczna zeru w* Ω*;*
v) Zbiór $\mathbb{P} \setminus \Omega$ *jest spójny, gdzie* $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *jest uzwarceniem* $\mathbb{C}$*.*

Dowód. i)⇒ii) Różniczkując równanie $e^g = f$ otrzymamy $g' = f'/f$, które ma rozwiązanie w $\mathcal{O}(\Omega)$ dzięki i). Dla ustalonego $z_0 \in \Omega$ możemy wybrać g tak, że $e^{g(z_0)} = f(z_0)$. Wtedy $(e^g/f)' = 0$, a więc $e^g = f$.

ii)⇒iii) $e^g = (e^{g/2})^2$.

Wykład 7, 16.04.2007

iii)⇒ii) Jeżeli pokażemy, że funkcja f'/f (nazywamy ją pochodną logarytmiczną funkcji f) ma pierwotną w Ω, to z dowodu implikacji i)⇒ii) wynika, że $e^g = f$ dla pewnego $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dzięki Twierdzeniu 4.2 wystarczy zatem pokazać, że

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0$$

dla każdej drogi zamkniętej $\gamma \subset \Omega$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

Z iii) wynika, że dla każdego $k = 1, 2, \dots$ istnieje $g_k \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $g_k^{2^k} = f$. Wtedy otrzymamy

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = 2^k \operatorname{Ind}_{g_k\circ\gamma}(0).$$

Liczba całkowita $\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$ jest zatem podzielna przez każdą liczbę postaci 2^k, a więc jest równa 0.

ii)⇒iv) Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ niech $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ będzie takie, że $\zeta - z = e^{g(\zeta)}$, $\zeta \in \Omega$. Różniczkując otrzymamy $1 = g'(\zeta)(\zeta - z)$, a więc funkcja $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ ma pierwotną w Ω, zatem $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w Ω.

iv)⇒v) Niech $\mathbb{P} \setminus \Omega = A \cup B$, gdzie A, B są domknięte w $\mathbb{P}$, rozłączne i $\infty \in A$. Wtedy B jest zbiorem zwartym w $\mathbb{C}$, natomiast $\widetilde{\Omega} := \Omega \cup B = \mathbb{P} \setminus A$ jest zbiorem otwartym. Korzystając z Lematu 10.3 znajdziemy cykl $\Gamma \subset \widetilde{\Omega} \setminus B$ taki, że $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ dla $z \in B$, a stąd $B = \emptyset$.

v)⇒iv) Niech Γ będzie dowolnym cyklem w Ω i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Ponieważ $\mathbb{P} \setminus \Omega$ jest spójny, z należy do składowej nieograniczonej zbioru $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, a więc $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

iv)⇒i) Wynika natychmiast z Twierdzeń 10.4 i 4.2. □

Przypomnijmy, że obszar Ω nazywamy jednospójnym, jeżeli każda krzywa zamknięta w Ω jest homotopijna zeru w Ω. Z Propozycji 10.5 wynika, że obszary jednospójne spełniają warunek iv) w Twierdzeniu 10.8. Udowodnimy później (przy okazji twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym), że w rzeczywistości warunki w Twierdzeniu 10.8 są równoważne jednospójności obszaru Ω.

Ćwiczenie Pokazać, że nie istnieje funkcja holomorficzna (a nawet ciągła) na pierścieniu $\{1/2 < |z| < 2\}$ taka, że $g(z)^2 = z$.

11. Szeregi Laurenta

Pokazaliśmy, że każdą funkcję holomorficzną w kole można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego. Pokażemy teraz, że funkcje określone w pierścieniu

$$P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} = K(z_0, R) \setminus \overline{K}(z_0, r)$$

rozwijają się w uogólniony szereg potęgowy zawierający również potęgi ujemne.

Twierdzenie 11.1. (Laurent, 1843, Weierstrass, 1841) *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(P(z_0, r, R))$, gdzie $0 \le r < R \le \infty$, to dla $z \in P(z_0, r, R)$ mamy*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k},$$

(tzn. oba szeregi są zbieżne), gdzie dla dowolnego $\rho \in (r, R)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11.1}$$

Dowód. Niech r', R' będą takie, że $r < r' < R' < R$. Wtedy $\partial P(z_0, r', R')$ jest cyklem (orientacja dodatnia względem wnętrza, czyli zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara na $\partial K(z_0, r')$ i z kierunkiem odwrotnym na $\partial K(z_0, R')$) takim, że

$$\mathrm{Ind}_{\partial P(z_0, r', R')}(z) = \begin{cases} 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{P}(z_0, r', R'), \\ 1, & z \in P(z_0, r', R'). \end{cases}$$

Spełniony jest więc warunek iii) w Twierdzeniu 10.4 (z $\Omega = P(z_0, r, R)$). Dzięki równoważnemu warunkowi ii) dostaniemy teraz niezależność prawej strony (11.1) od ρ (bo funkcja podcałkowa jest holomorficzna w $P(z_0, r, R)$). Z i) otrzymamy natomiast dla $z \in P(z_0, r', R')$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P(z_0,r,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial K(z_0,R)} - \int_{\partial K(z_0,r)} \right).$$

Rozumujemy teraz jak w dowodzie Twierdzenia 8.1. Z (7.2) otrzymamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, & \zeta \in \partial K(z_0, R), \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k}, & \zeta \in \partial K(z_0, r), \end{cases}$$

przy czym zbieżność jest jednostajna względem ζ na, odpowiednio, $\partial K(z_0, R)$ i $\partial K(z_0, r)$. $\square$

Szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{11.2}$$

nazywamy szeregiem Laurenta. Jest on sumą dwóch szeregów: części regularnej

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$

oraz części osobliwej

$$\sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots$$

Mówimy, że szereg Laurenta (11.2) jest zbieżny w z, jeżeli w z zbieżna jest jego część regularna oraz część osobliwa.

Twierdzenie 11.2. *Część regularna szeregu Laurenta (11.2) jest zbieżna bezwzględnie i lokalnie jednostajnie w kole $K(z_0,R)$, rozbieżna dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0,R)$, gdzie*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Część osobliwa szeregu Laurenta (11.2) jest zbieżna bezwzględnie i lokalnie jednostajnie w $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0,r)$, rozbieżna dla każdego $z \in K(z_0,r)$, gdzie

$$r = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{1/k} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to -\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Jeżeli $r < R$, to szereg Laurenta (11.2) jest zbieżny bezwzględnie i lokalnie jednostajnie w pierścieniu $P(z_0,r,R)$, rozbieżny dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{P}(z_0,r,R)$.

Dowód. Pierwsza część to dokładnie Twierdzenie 7.1. Po podstawieniu

$$w = \frac{1}{z-z_0},$$

cźéść osobliwa będzie miała postać

$$\sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k,$$

a promień zbieżności tego szeregu jest równy $1/r$. Stąd wynika druga część twierdzenia, zaś trzecia jest natychmiastową konsekwencją pierwszych dwóch. $\square$

Mamy następująca zasadę identyczności dla szeregów Laurenta.

Twierdzenie 11.3. *Jeżeli szeregi Laurenta* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *są jednostajnie zbieżne do tej samej granicy na okręgu* $\partial K(z_0,\rho)$ *dla pewnego* $\rho > 0$*, to* $a_n = b_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $b_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Założenie oznacza, że mamy jednostajną zbieżność

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n e^{int} = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{11.3}$$

Zbieżność jednostajna implikuje zbieżność w $L^2([0,2\pi])$. Dla $n, m \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m. \end{cases}$$

Mnożąc skalarnie obie strony (11.3) przez e^{imt} otrzymamy $a_m = 0$, $m \in \mathbb{Z}$. □

Ćwiczenie Rozwinąć funkcję $1/(z^2 - z)$ w szeregi Laurenta w pierścieniach $\{0 < |z| < 1\}$ oraz $\{1 < |z| < \infty\}$.

12. Osobliwości funkcji holomorficznych

Mówimy, że funkcja holomorficzna f ma osobliwość izolowaną w punkcie z_0, jeżeli $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$, gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu z_0 w $\mathbb{C}$. Z Twierdzenia 11.1 (dla $r = 0$ oraz R takiego, że $K(z_0, R) \subset U$) wynika, że w otoczeniu z_0 funkcję f możemy rozwinąć w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{12.1}$$

gdzie współczynniki a_n są wyznaczone jednoznacznie (dzięki Twierdzeniu 11.3; są one dane przez (11.1)). Jeżeli $a_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$, to mówimy, że f ma osobliwość pozorną w z_0. Jeżeli istnieje $m \geq 1$ takie, że $a_{-m} \neq 0$ oraz $a_n = 0$ dla $n < -m$, to mówimy, że f ma biegun rzędu m w z_0 (jeżeli $m = 1$, to biegun nazywamy prostym). W pozostałych przypadkach (tzn., gdy istnieje nieskończenie wiele $n < 0$ takich, że $a_n \neq 0$) mówimy, że f ma istotną osobliwość w z_0.

Jest jasne, że funkcja holomorficzna ma pozorną osobliwość w z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy przedłuża się do funkcji holomorficznej w otoczeniu z_0 (z tego powodu osobliwości pozorne są również nazywane usuwalnymi). Jeżeli f ma biegun rzędu m w z_0, to

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{12.2}$$

gdzie h jest funkcją holomorficzną w otoczeniu z_0 taką, że $h(z_0) = a_{-m} \neq 0$.

Z drugiej strony, jeżeli g jest holomorficzna w otoczeniu z_0, $g \not\equiv 0$ i $g(z_0) = 0$, to

$$g(z) = b_m (z-z_0)^m + b_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots = (z-z_0)^m \widetilde{h}(z),$$

gdzie $m \geq 1$, zaś $\widetilde{h}$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu z_0 taką, że $\widetilde{h}(z_0) = a_m \neq 0$. Takie m nazywamy krotnością zera funkcji g w z_0. Jest to równoważne temu, że

$$g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(m)}(z_0) \neq 0$$

(dzięki wzorowi Taylora).

Z powyższych rozważań widać, że dla funkcji holomorficznej f w otoczeniu z_0 mamy

$$f \text{ ma w } z_0 \text{ zero krotności } m \;\Leftrightarrow 1/f \text{ ma w } z_0 \text{ biegun rzędu } m.$$

Ogólniej, jeżeli f, g są holomorficzne w otoczeniu z_0 i mają w z_0 zera krotności, odpowiednio, m i k, to f/g ma w z_0 zero krotności $m-k$, jeżeli $m > k$, oraz biegun rzędu $k-m$, jeżeli $m < k$. (Jeżeli $m = k$, to f/g jest funkcją holomorficzną w otoczeniu z_0 nieznikającą w z_0). W szczególności, funkcja f/g nie może mieć istotnej osobliwości.

Przykład. Funkcja

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}$$

ma istotną osobliwość w 0.

WYKŁAD 8, 23.04.2007

Jak wynika z poprzednich rezultatów (z Twierdzeń 4.1 i 6.1), każda funkcja holomorficzna posiadająca osobliwość izolowaną w z_0, którą można przedłużyć do funkcji ciągłej w z_0, ma w z_0 osobliwość pozorną. Ten fakt udowodnił Riemann w 1851 r. Poniższy, ogólniejszy rezultat jest nazywany *twierdzeniem Riemanna o usuwaniu osobliwości.*

Twierdzenie 12.1. *Przypuśćmy, że funkcja holomorficzna f ma w z_0 osobliwość izolowaną oraz jest ograniczona w otoczeniu z_0. Wtedy f ma osobliwość pozorną w z_0.*

Dowód. Niech $h(z) := (z - z_0)f(z)$. Wtedy dla pewnego otoczeniu U punktu z_0 mamy $h \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\}) \cap C(U)$, a stąd $h \in \mathcal{O}(U)$. Ponieważ h ma w z_0 zero krotności ≥ 1, a $z - z_0$ zero krotności 1, to $f(z) = h(z)/(z - z_0)$ ma w z_0 osobliwość pozorną. $\square$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Podać inny dowód Twierdzenia 12.1: pokazać, że przy takich założeniach współczynniki a_n w Twierdzeniu 11.1 znikają dla $n < 0$.

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że jeżeli

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \in \mathcal{O}(P(z_0, r, R)),$$

gdzie $0 < r < R < \infty$, to

$$\frac{1}{\pi} \int_{P(z_0,r,R)} |f(z)|^2 d\lambda(z) = \sum_{n \neq -1} \frac{R^{2n+2} - r^{2n+2}}{n+1} |a_n|^2 + 2 \log \frac{R}{r} \, |a_{-1}|^2.$$

Wywnioskować stąd następujące wzmocnienie twierdzenia Riemanna: jeżeli $f \in \mathcal{O} \cap L^2(U \setminus \{z_0\})$, gdzie U jest otwartym otoczeniem z_0, to f ma pozorną osobliwość w z_0. Pokazać, że wykładnika 2 nie można poprawić.

Twierdzenie 12.2. (Casorati, 1868, Weierstrass, 1876, Sochocki, 1873) *Jeżeli funkcja holomorficzna f ma w z_0 istotną osobliwość, to dla każdego odp. małego otwartego otoczenia V punktu z_0, zbiór $f(V \setminus \{z_0\})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe, tzn. istnieje $w_0 \in \mathbb{C}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $K(w_0, \varepsilon) \cap f(V \setminus \{z_0\}) = \emptyset$. Oznacza to, że $|f - w_0| \geq \varepsilon$ w $V \setminus \{z_0\}$. Funkcja $g := 1/(f - w_0)$ jest więc ograniczona w $V \setminus \{z_0\}$, z Twierdzenia 12.1 wynika zatem, że ma w z_0 pozorną osobliwość. Czyli funkcja $f = w_0 + 1/g$ nie może mieć w z_0 istotnej osobliwości - sprzeczność. $\square$

Uwaga. Znacznie mocniejsze (ale i trudniejsze do udowodnienia) niż Twierdzenie 12.2 jest tzw. *wielkie twierdzenie Picarda* (1879): przy założeniach Twierdzenia 12.2 zbiór $f(V \setminus \{z_0\})$ omija co najwyżej jedną wartość w $\mathbb{C}$.

Ćwiczenie Zweryfikować wielkie twierdzenie Picarda w następujących przypadkach: $e^{1/z}$ (omija jedną wartość), $\cos(1/z)$ (nie omija żadnej wartości).

Podobnie jak w Twierdzeniu 10.8.v przez $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ oznaczamy uzwarcenie Aleksandrowa płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$. Oznacza to, że otwarte otoczenia punktu ∞ to zbiory postaci $\mathbb{P} \setminus K$, gdzie K jest zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Ciąg $z_j \in \mathbb{C}$ jest zbieżny do ∞, jeżeli $\lim_{j\to\infty} |z_j| = \infty$. *Uwaga*: w przeciwieństwie do prostej rzeczywistej nie rozróżniamy tutaj pomiędzy $-\infty$ i $+\infty$.

Ćwiczenie Pokazać, że $\mathbb{P}$ jest homeomorficzna ze sferą w $\mathbb{R}^3$.

Możemy teraz skojarzyć rodzaje osobliwości izolowanych z istnieniem odpowiednich granic.

Twierdzenie 12.3. *Załóżmy, że funkcja holomorficzna f ma osobliwość izolowaną w z_0. Wtedy*

i) f ma pozorną osobliwość w z_0 $\Leftrightarrow$ istnieje $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;

ii) f ma biegun w z_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

iii) f ma istotną osobliwość w z_0 $\Leftrightarrow$ nie istnieje $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{P}$.

Dowód. i) Natychmiastowa konsekwencja Twierdzenia 12.1 (a nawet Twierdzeń 4.1 i 6.1).

ii) Z (12.2) wynika $\Rightarrow$, natomiast $\Leftarrow$ wnioskujemy z i) (f nie ma pozornej osobliwości) i Twierdzenia 12.2 (f nie ma istotnej osobliwości).

iii) Natychmiastowa konsekwencja i) oraz ii). $\square$

Przestrzeń $\mathbb{P}$ ma strukturę jednowymiarowej rozmaitości zespolonej: odwzorowania

$$\varphi_1 := id_{\mathbb{C}}, \quad \varphi_2 : \mathbb{P} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$

są homeomorfizmami takimi, że $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}, \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_*)$. Wraz z powyższą strukturą $\mathbb{P}$ nazywamy sferą Riemanna.

Niech Ω_1, Ω_2 będą otwartymi podzbiorami $\mathbb{P}$. Funkcję $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ nazywamy holomorficzną (piszemy $f \in \mathcal{O}(\Omega_1, \Omega_2)$), jeżeli funkcje $\varphi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ są holomorficzne dla $i, j = 1, 2$ (tam, gdzie są określone). Łatwo sprawdzić, że pojęcie holomorficzności na sferze Riemanna jest własnością czysto lokalną. Jeżeli więc $f(z_0) = w_0$, to holomorficzność f w otoczeniu z_0 możemy scharakteryzować następująco

i) Jeżeli $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, to f jest holomorficzna w zwykłym sensie;

ii) Jeżeli $z_0 = \infty$, $w_0 \in \mathbb{C}$, to $f(1/\zeta)$ jest holomorficzna w otoczeniu 0;

iii) Jeżeli $z_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 = \infty$, to $1/f$ jest holomorficzna;

iv) Jeżeli $z_0 = w_0 = \infty$, to $1/f(1/\zeta)$ jest holomorficzna w otoczeniu 0.

Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{P})$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem. Jeżeli $f \not\equiv \infty$, to zbiór biegunów $f^{-1}(\infty)$ jest dyskretny. Taką funkcję nazywamy meromorficzną. Innymi słowy są to więc funkcje holomorficzne poza zbiorem dyskretnym, przy czym żadna osobliwość nie jest istotna. Funkcje meromorficzne lokalnie można zapisać w postaci g/h, gdzie g, h są holomorficzne, przy czym $h \not\equiv 0$. Pokażemy później (Twierdzenie 15.7), że takie g i h można znaleźć również globalnie. Funkcje meromorficzne są zatem podobnym uogólnieniem funkcji holomorficznych jak funkcje wymierne wielomianów.

Ćwiczenie Pokazać, że funkcja całkowita przedłuża się do funkcji z $\mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona wielomianem.

Ćwiczenie Udowodnić, że $\mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P}) \setminus \{\infty\}$ to dokładnie zbiór funkcji wymiernych.

Propozycja 12.4. *i)* $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P}) = \{$*wielomiany*$\}$;
ii) $\mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P}) \setminus \{\infty\} = \{$*funkcje wymierne*$\}$.

Dowód. i) Jeśli funkcja całkowita ma nie jest wielomianem, to w ∞ ma istotną osobliwość.

ii) Niech $f = P/Q$ będzie funkcją wymierną, gdzie P, Q są wielomianami bez wspólnego dzielnika (czyli ich zbiory zer są rozłączne). Jest oczywiste, że $f|_{\mathbb{C}\setminus Q^{-1}(0)}$ jest funkcją holomorficzną, przedłużającą się do odwzorowania ciągłego $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$. Z twierdzenia Riemanna o usuwaniu osobliwości wynika więc, że $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P})$.

Załóżmy z kolei, że $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P})$, $f \neq const$. Wtedy zbiór $f^{-1}(\infty)$ jest skończony (bo gdyby nie był, to ze zwartości $\mathbb{P}$ miałby punkt skupienia, więc z zasady identyczności wynikałoby, że $f = const$). Stosując zmianę zmiennych w $\mathbb{P}$ postaci $z' = 1/(z - z_0)$, gdzie $z_0 \notin f^{-1}(\infty)$, bez straty ogólności możemy założyć, że zbiór $f^{-1}(\infty) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ nie zawiera ∞. Wtedy funkcja $f|_{\mathbb{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_n\}}$ jest holomorficzna oraz z ciągłości f na $\mathbb{P}$ oczywiście mamy $\lim\limits_{z\to z_j} f(z) = \infty$, czyli f ma bieguny w $z_1, \ldots, z_n$. Istnieją zatem liczby naturalne $m_1, \ldots, m_n$ takie, że

$$P(z) := (z - z_1)^{m_1} \ldots (z - z_n)^{m_n} f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Co więcej, $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$ (bo $f(\infty) \neq \infty$), czyli P jest wielomianem. □

13. Twierdzenie o residuach

Niech f będzie funkcją holomorficzną posiadającą osobliwość izolowaną w z_0. W pewnym otoczeniu z_0 mamy rozwinięcie f w szereg Laurenta (12.1), który jest jednostajnie zbieżny na $\partial K(z_0, r)$ dla $r > 0$ odp. małego. Mamy wtedy

$$\int_{\partial K(z_0,r)} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\partial K(z_0,r)} (z - z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{13.1}$$

Liczbę a_{-1} z rozwinięcia (12.1) nazywamy residuum funkcji f w punkcie z_0 i oznaczamy $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Ćwiczenie Skonstruować funkcję $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ mającą istotną osobliwość w 0, biegun rzędu 2 w 1 oraz taką, że $\operatorname{res}_1 f = 3$.

Przypuśćmy, że f ma w z_0 biegun rzędu m. Wtedy

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m},$$

gdzie funkcja

$$h(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots$$

jest holomorficzna w otoczeniu z_0. Ze wzoru Taylora otrzymamy

$$a_{-m+k} = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Dla $k = m-1$ dostaniemy następujący rezultat, który jest podstawowym narzędziem przy obliczaniu residuów w przypadku biegunów:

Propozycja 13.1. *Jeżeli funkcja holomorficzna f ma biegun rzędu m w z_0, to*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} \left((z-z_0)^m f(z)\right)\Big|_{z=z_0}. \quad \square$$

Sformułujemy teraz i udowodnimy *twierdzenie o residuach.*

Twierdzenie 13.2. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$, zaś Γ cyklem homologicznym zeru w Ω. Załóżmy, że $z_1, \dots, z_k \in \Omega \setminus \Gamma$ ($z_j \neq z_l$ dla $j \neq l$) i że $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$. Wtedy*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j) \operatorname{res}_{z_j} f.$$

Dowód. Znajdziemy $r > 0$ takie, że $\overline{K}(z_j, r) \cap \overline{K}(z_l, r) = \emptyset$ dla $j \neq l$ oraz $\overline{K}(z_j, r) \cap \Gamma = \emptyset$, $j, l = 1, \dots, k$. Zastosujemy Twierdzenie 10.4 dla cyklu

$$\widetilde{\Gamma} := \Gamma - \sum_{j=1}^k \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j)\, \partial K(z_j, r)$$

i obszaru $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$. Spełniony jest warunek iii), zatem z ii)

$$0 = \int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^k \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j) \int_{\partial K(z_j, r)} f(z)dz$$

i wystarczy skorzystać z (13.1). $\square$

13a. Obliczanie pewnych całek rzeczywistych (nie było na wykładzie)

Twierdzenie o residuach pozwala obliczyć wiele rzeczywistych całek określonych. Poniżej przedstawimy kilka rodzajów takich całek. Będzie to służyło przede wszystkim zaprezentowaniu możliwych metod zastosowania twierdzenia o residuach, z całą pewnościa poniższa lista nie wyczerpuje przypadków, gdzie można je użyć.

I) Całki postaci

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt,$$

gdzie R jest funkcją wymierną (czyli $R = P/Q$, gdzie P i Q są wielomianami dwóch zmiennych; wielomian Q w tym przypadku nie może mieć zer na rzeczywistym okręgu jednostkowym). Podstawiając $z = e^{it}$ otrzymamy

$$\cos t = \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z+1/z}{2},$$
$$\sin t = \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$$

oraz $dz = ie^{it}dt = izdt$. Mamy więc

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{\partial K(0,1)} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{dz}{iz} = \int_{\partial K(0,1)} \widetilde{R}(z)dz,$$

gdzie $\widetilde{R}$ jest funkcją wymierną, nie mającą osobliwości na $\partial K(0,1)$.

Ćwiczenie Pokazać, że $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

II) Całki postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

gdzie P, Q są wielomianami rzeczywistymi takimi, że $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$ oraz $\deg Q \geq \deg P + 2$ (mamy wtedy pewność, że funkcja P/Q jest sumowalna na $\mathbb{R}$). Dla $R > 0$ przez $C_R^+ := \{z \in \partial K(0,R) : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ oznaczmy górną połowę okręgu $\partial K(0,R)$ (o początku w R i końcu w $-R$). Dla R odp. dużego wielomian $Q(z)$ nie ma zer na $\partial K(0,R)$ oraz

$$\left|\int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \leq CR^{\deg P - \deg Q}\pi R \to 0,$$

gdy $R \to \infty$. Z twierdzenia o residuach mamy więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]+C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0\\ \operatorname{Im} w>0}} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Ćwiczenie Pokazać, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

III) Całki postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\cos x}{Q(x)}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\sin x}{Q(x)}\,dx, \tag{13.2}$$

gdzie P, Q są wielomianami rzeczywistymi. Jeżeli $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$ oraz $\deg Q \geq \deg P + 2$, to funkcje podcałkowe w (13.2) są sumowalne. Zauważmy, że całki (13.2) są, odpowiednio, częścią rzeczywistą i urojoną całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{ix}}{Q(x)}\,dx.$$

W dodatku, dzięki temu, że $|e^{iz}| \leq 1$, gdy $\operatorname{Im} z \geq 0$, mamy

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}\, dz \right| \leq C R^{\deg P - \deg Q} \pi R \to 0 \tag{13.3}$$

(zauważmy, że nie moglibyśmy powtórzyć tego rozumowania, gdybyśmy zamiast e^{iz} wzięli funkcje, odpowiednio, $\cos z$ i $\sin z$). Z twierdzenia o residuach dostaniemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{ix}}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \operatorname{Im} w > 0}} \operatorname{res}_w \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}. \tag{13.4}$$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{4e^6}$.

Jeżeli wielomiany P, Q są takie, że $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$ i $\deg Q = \deg P + 1$, to można pokazać $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$, że funkcje podcałkowe w (13.2) nie są sumowalne na $\mathbb{R}$. Pokażemy jednak, że w tym wypadku istnieją wartości główne całek (13.2) (jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\substack{a' \to a^- \\ b' \to b^+}} \int_{a'}^{b'} f(x) dx,$$

to nazywamy ją <u>wartością główną</u> całki $\int_a^b f(x)dx$ i oznaczamy także $\int_a^b f(x)dx$). Powtarzamy poprzednie rozumowanie korzystając z następującego *lematu Jordana*; dostaniemy ponownie formułę (13.4).

Lemat 13.3. *Jeżeli wielomiany P, Q są takie że $\deg Q \geq \deg P + 1$, to*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R^+} \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}\, dz = 0.$$

Dowód. Będziemy szacować trochę dokładniej niż w (13.3). Dla $z = x + iy \in C_R^+$ i R odp. dużego mamy $|P(z)/Q(z)| \leq C/R$ oraz $|e^{iz}| = e^{-y}$. Parametryzując C_R^+ przez Re^{it}, $t \in [0, \pi]$, otrzymamy

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{P(z)e^{iz}}{Q(z)}\, dz \right| \leq C \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt. \tag{13.5}$$

Teza lematu wynika teraz np. z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. $\square$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Udowodnić zbieżność prawej strony (13.5) do 0 bez stosowania twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej: korzystając z tego, że $-\sin t \leq -2t/\pi$ dla $t \in [0, \pi/2]$, pokazać, że

$$\int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt \leq \pi \frac{1 - e^{-R}}{R}.$$

Możemy obliczyć wartości główne całek (13.2) dla wielomianów rzeczywistych P, Q takich, że $\deg Q \geq \deg P + 1$ dopuszczając dodatkowo możliwość zerowania się wielomianu Q na $\mathbb{R}$ (przez wartość główną takiej całki rozumiemy granicę całek po skończonej sumie odpowiednich przedziałów zwartych). Możemy to zrobić w przypadku, gdy funkcja $Q(z)$ ma pojedyncze zera na $\mathbb{R}$. Wynika to z następującego lematu.

Lemat 13.4. *Załóżmy, że funkcja holomorficzna f ma prosty biegun w z_0 i że $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$. Dla $r > 0$ niech $\gamma_r(t) := z_0 + re^{it}$, $\alpha \le t \le \beta$. Wtedy*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta - \alpha)\mathrm{res}_{z_0} f.$$

Dowód. Znajdziemy funkcję holomorficzną g w otoczeniu z_0 taką, że

$$f(z) = \frac{a_1}{z - z_0} + g'(z).$$

Wtedy dla $r > 0$ odp. małego mamy

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta - \alpha)a_{-1} + g(z_0 + re^{i\beta}) - g(z_0 + re^{i\alpha})$$

i przy $r \to 0$ dostaniemy to co trzeba. $\square$

Ćwiczenie Na przykładzie funkcji $(z-z_0)^{-2}$ pokazać, że założenie w Lemacie 13.4, że biegun jest prosty, jest konieczne.

Ćwiczenie Pokazać, że (wartość główna) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2 - 1}\,dx = \pi\cos 2.$

IV) Całki postaci

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{x^a Q(x)}\,dx, \tag{13.6}$$

gdzie $0 < a < 1$, zaś P, Q są wielomianami rzeczywistymi takimi, że $\deg Q \ge \deg P + 1$ oraz $Q \ne 0$ na $[0,\infty)$. Przy takich założeniach funkcja podcałkowa jest sumowalna na $(0,\infty)$. Rozpatrzmy funkcję

$$g(z) := z^a = e^{a\log z} = e^{a(\log|z| + i\arg z)} = |z|^a e^{ia\arg z}.$$

Wybieramy argument z z przedziału $(0, 2\pi)$, tak, że $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [0,\infty))$. Dla $x \in (0,\infty)$ mamy

$$g^+(x) := \lim_{y\to 0^+} g(x+iy) = x^a,$$
$$g^-(x) := \lim_{y\to 0^-} g(x+iy) = e^{2\pi ai}x^a.$$

Można pokazać **Ćwiczenie**, że przy powyższych założeniach mamy

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial K(z_0,R)} \frac{P(z)}{z^a Q(z)}\,dz = \lim_{r\to 0^+} \int_{\partial K(z_0,r)} \frac{P(z)}{z^a Q(z)}\,dz = 0.$$

Mamy wtedy (rys. ..., pamiętając o ujemnej orientacji na przedziale $[r, R]$ dla funkcji g^-)

$$\left(1 - e^{-2\pi a i}\right) \int_0^\infty \frac{P(x)}{x^a Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{Q(w)=0} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{z^a Q(z)}.$$

Ćwiczenie Pokazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Podobnie jak poprzednio, korzystając z Lematu 13.4, możemy także policzyć wartość główną całki (13.6), jeżeli Q ma pojedyncze zera na $(0, \infty)$.

Ćwiczenie Pokazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Przy pomocy twierdzenia o residuach można policzyć wiele innych rodzajów całek określonych.

Ćwiczenie Całkując po odpowiednio zmodyfikowanym brzegu półkola $K(0, R) \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ pokazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1} dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Ćwiczenie Całkując funkcję $e^{az}/(1+e^z)$ po brzegu prostokąta o wierzchołkach w $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$ pokazać, że

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \quad 0 < a < 1.$$

Ćwiczenie Pokazać, że

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1-e^x}\, dx = \pi \cot(a\pi), \quad 0 < a < 1.$$

Ćwiczenie Całkując funkcję $1/(1+z^3)$ po brzegu zbioru $\{\rho e^{it} : 0 \le t \le 2\pi/3,\ 0 \le \rho \le R\}$ pokazać, że

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

14. Lokalizowanie zer funkcji holomorficznych

Przedstawimy teraz pewne ogólne własności funkcji holomorficznych, które można udowodnić przy pomocy twierdzenia o residuach. Pierwszą z nich będzie *zasada argumentu*, która pozwala lokalizować zera oraz bieguny funkcji holomorficznych. Przed jej sformułowaniem jedna uwaga techniczna: jeżeli $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ jest łańcuchem, a f funkcją holomorficzną w otoczeniu Γ^*, to przez $f \circ \Gamma$ rozumiemy łańcuch $f \circ \gamma_1 + \dots + f \circ \gamma_k$. Jest oczywiste, że jeżeli Γ jest cyklem, to jest nim także $f \circ \Gamma$.

Twierdzenie 14.1. *Załóżmy, że D jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$ takim, że $\partial D = \Gamma^*$ dla pewnego cyklu takiego, że $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ dla $z \in D$. Niech f będzie funkcją meromorficzną w otoczeniu $\overline{D}$ nie mającą zer ani biegunów na ∂D. Wtedy*

$$\operatorname{Ind}_{f \circ \Gamma}(0) = Z - B,$$

gdzie Z oznacza liczbę zer funkcji f w D liczonych razem z krotnościami, natomiast B sumę rzędów wszystkich biegunów funkcji f w D.

Dowód. Zauważmy, że (podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 10.8)

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

Do obliczenia tej całki wykorzystamy twierdzenie o residuach. Zauważmy, że funkcja podcałkowa f'/f ma osobliwości dokładnie tam, gdzie f ma zera lub bieguny. Jeżeli f ma w z_0 zero krotności m, to, zapisując $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$, gdzie $h(z_0) \neq 0$, mamy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

a zatem $\mathrm{res}_{z_0}(f'/f) = m$. Powyższe rozumowanie działa także, gdy m jest ujemną liczbą całkowitą. Oznacza to, że jeżeli f ma w z_0 biegun rzędu k, to $\mathrm{res}_{z_0}(f'/f) = -k$. Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o residuach. $\square$

Ćwiczenie Znaleźć liczbę pierwiastków wielomianu $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$ w półpłaszczyźnie $\{\mathrm{Re}\, z \geq 0\}$.

Wykład 9, 7.05.2007

Twierdzenie 14.2. (Rouché, 1862) *Niech D będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$. Załóżmy, że f, g są funkcjami holomorficznymi w D, ciągłymi na $\overline{D}$ i takimi, że $|g| < |f|$ na ∂D. Wtedy f i $f+g$ mają tyle samo zer w D liczonych z krotnościami.*

Dowód. Dzięki Lematowi 10.3 możemy założyć, że D jest jak w Twierdzeniu 14.1, natomiast f i g są holomorficzne w otoczeniu $\overline{D}$. Dla $t \in [0,1]$ na $\Gamma^* = \partial D$ mamy $|f+tg| \geq |f| - t|g| > 0$. Funkcja

$$[0,1] \ni t \longmapsto \mathrm{Ind}_{(f+tg)\circ\Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\zeta)+tg'(\zeta)}{f(\zeta)+tg(\zeta)}\,d\zeta \in \mathbb{Z},$$

jest więc ciągła, musi być zatem stała. Dla $t = 0$ i $t = 1$ z zasady argumentu dostaniemy tezę. $\square$

Ćwiczenie Pokazać, że warunek $|g| < |f|$ w twierdzeniu Rouchégo można osłabić do $|g| < |f| + |f+g|$.

Ćwiczenie Znaleźć liczbę pierwiastków wielomianu $z^6 + 4z^2 - 1$ w kole $K(0,1)$.

Korzystając z twierdzenia Rouchégo można podać kolejny dowód zasadniczego twierdzenia algebry: jeżeli $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, jest wielomianem zespolonym, to znajdziemy $R > 0$ takie, że $|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| < |a_n| R^n$ dla $z \in \partial K(0,R)$. Wnioskujemy, że P ma w $K(0,R)$ tyle samo zer liczonych z krotnościami co $a_n z^n$, czyli n.

Możemy teraz opisać topologiczne zachowanie się funkcji holomorficznych w pobliżu zera krotności m.

Twierdzenie 14.3. *Jeżeli funkcja holomorficzna f ma w z_0 zero krotności m, to istnieje otoczeniu U punktu z_0 takie, że odwzorowanie f jest m-krotne na $U \setminus \{z_0\}$ (tzn. dla każdego $w \in f(U) \setminus \{0\}$) zbiór $f^{-1}(w) \cap (U \setminus \{z_0\})$ jest m-elementowy).*

Dowód. Zapiszmy $f(z) = a_m(z - z_0)^m + g(z)$, gdzie $a_m \neq 0$, zaś g jest funkcją holomorficzną w otoczeniu z_0 taką, że $|g(z)| \leq C|z - z_0|^{m+1}$. Dla $r > 0$ odp. małego mamy $\rho := |a_m|r^m - Cr^{m+1} > 0$. Dla $w \in K(0, \rho)$ mamy

$$|g(z) - w| < Cr^{m+1} + \rho = |a_m(z - z_0)^m|, \quad z \in \partial K(z_0, r),$$

a więc z twierdzenia Rouchégo wynika, że funkcja $f - w$ ma w $K(z_0, r)$ m zer liczonych z krotnościami. Jeżeli któreś z tych zer nie jest pojedyncze, to mamy w nim $f' = 0$. Dla $r > 0$ odp. małego mamy jednak $f' \neq 0$ na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ (bo inaczej z zasady identyczności funkcja f byłaby stała, co jest niemożliwe w naszym przypadku), czyli tam wszystkie zera muszą być pojedyncze. Bierzemy wtedy $U := f^{-1}(K(0, \rho)) \cap K(z_0, r)$. $\square$

Z Twierdzenia Rouchégo możemy także wywnioskować, że przy jednostajnej zbieżności funkcji holomorficznych liczba zer liczonych z krotnościami stabilizuje się od pewnego momentu.

Twierdzenie 14.4. (Hurwitz, 1889) *Niech $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ będzie ciągiem zbieżnym lokalnie jednostajnie w Ω do $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Załóżmy, że $U \Subset \Omega$ jest zbiorem otwartym takim, że $f \neq 0$ na ∂U. Wtedy dla odp. dużego n liczba zer liczonych z krotnościami funkcji f_n i f w U jest taka sama.*

Dowód. Z zasady identyczności wynika, że liczba zer f w U jest skończona. Znajdziemy więc otwarte koła $D_1, \ldots, D_m \Subset U$ takie, że $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \emptyset$, $i \neq j$, oraz $f \neq 0$ w $\overline{U} \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_m)$. Wtedy również $f_n \neq 0$ w tym zbiorze dla n odp. dużego, czyli bez straty ogólności możemy założyć, że U jest kołem. Dla n odp. dużego mamy $|f_n - f| < |f|$ na ∂U i wystarczy zastosować twierdzenie Rouchégo. $\square$

Mówimy, że funkcja holomorficzna jest jednokrotna, jeżeli jest ona iniektywna.

Wniosek 14.5. *Załóżmy, że f_n jest ciągiem funkcji holomorficznych jednokrotnych w obszarze Ω zbieżnym lokalnie jednostajnie do niestałej funkcji f. Wtedy f jest funkcją iniektywną.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(z_1) = f(z_2) =: a$ dla pewnych $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$. Niech $D_i \Subset \Omega$ będą kołami otwartymi zawierającymi z_i, $i = 1, 2$, takimi, że $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = \emptyset$. Z twierdzenia Hurwitza wynika, że dla n odp. dużego $f_n - a$ ma zero zarówno w D_1 jak i w D_2 - sprzeczność z jednokrotnością f_n. $\square$

15. Iloczyny nieskończone

W 1734 r. Euler jako pierwszy podał wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{15.1}$$

Zastosował następujące rozumowanie: funkcja

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots$$

jest całkowita, zeruje się w punktach $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_*$, wszystkie zera są pojedyncze. Funkcja całkowita

$$f(w) = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots$$

($f(x) = \sin\sqrt{x}/\sqrt{x}$ dla $x > 0$) zeruje się dokładnie w punktach $k^2\pi^2$, $k = 1, 2, \dots$ i wszystkie zera są pojedyncze. Jeżeli $z_1, \dots, z_n$ są pojedynczymi zerami wielomianu $1 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, to

$$1 + a_1 z + \dots + a_n z^n = a_n(z - z_1)\dots(z - z_n) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\dots\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

oraz

$$\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} = -a_1.$$

Jeżeli teraz analogicznie byłoby w przypadku szeregów potęgowych, to otrzymalibyśmy

$$1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{w}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{w}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{w}{3^2\pi^2}\right)\dots \tag{15.2}$$

oraz

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \dots = \frac{1}{3!}, \tag{15.3}$$

czyli właśnie (15.1). Iloczyn nieskończony występujący po prawej stronie (15.2) rozumiemy jako granicę odpowiednich iloczynów skończonych. Jeżeli wiedzielibyśmy, że (15.2) rzeczywiście zachodzi i że zbieżność jest lokalnie jednostajna, to (15.3) łatwo wynika z Twierdzenia 6.4.

Powyższe rozumowanie ma jednak następującą lukę: nieprawdziwe jest ogólne stwierdzenie, że jeżeli wszystkie zera $z_1, z_2, \dots$ funkcji całkowitej f są pojedyncze i $f(0) = 1$, to

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right). \tag{15.4}$$

(Zauważmy, że funkcja $e^z f(z)$ ma te same i takie same zera oraz wartość w 0 co funkcja f.) Pokażemy jednak, że (15.4) zachodzi dla funkcji $\sin z/z$, a dzięki temu otrzymamy także (15.2).

Zajmiemy się najpierw ogólnymi własnościami iloczynów nieskończonych. Dla ciągu $a_n \in \mathbb{C}$ mówimy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ jest zbieżny, jeżeli istnieje granica $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1 + a_n) \in \mathbb{C}$. Granicę tę ozn. $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$. Zbieżność iloczynu $\prod(1+a_n)$ ma związek ze zbieżnością szeregu $\sum a_n$. Np. jeżeli $a_n \geq 0$ dla wszystkich n, to

$$1 + a_1 + \dots + a_N \leq (1 + a_1)\dots(1 + a_N) \leq e^{a_1 + \dots + a_N},$$

(korzystając z tego, że $1 + x \leq e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$), czyli w tym przypadku zbieżności te są równoważne.

W ogólnym przypadku mamy następujący rezultat dotyczący zbieżności iloczynów nieskończonych.

Twierdzenie 15.1. *Załóżmy, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wtedy*
i) iloczyn $\prod(1 + a_n)$ jest zbieżny;
ii) $\prod(1 + a_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + a_{n_0} = 0$ dla pewnego n_0.

Dowód. i) Oznaczmy $p_N := \prod_{n=1}^{N}(1 + a_n)$. Zbieżność ciągu p_N jest równoważna zbieżności szeregu $\sum(p_N - p_{N-1})$ (bo sumy częściowe tego szeregu to dokładnie ciąg p_N). Mamy

$$\begin{aligned} |p_N - p_{N-1}| = |a_N|\,|p_{N-1}| &\le |a_N|(1 + |a_1|)\dots(1 + |a_{N-1}|) \\ &\le |a_N|e^{|a_1|+\dots+|a_{N-1}|} \\ &\le |a_N| \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\Big). \end{aligned} \tag{15.5}$$

Dostaniemy bezwzględną zbieżność szeregu $\sum(p_N - p_{N-1})$.

ii) Implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista, natomiast w celu udowodnienia $\Rightarrow$ pokażemy, że jeżeli m jest takie, że $|a_n| < 1$ dla $n > m$, to

$$H := \prod_{n=1}^{m}(1 + a_n) = 0,$$

skąd wynika, że $a_{n_0} + 1 = 0$ dla pewnego $n_0 \le m$. Takie m istnieje, gdyż w szczególności $a_n \to 0$. Mamy wtedy nawet $|a_n| \le \lambda < 1$ dla $n > m$. Dla $N > m$

$$|p_N| = |H| \prod_{n=m+1}^{N} |1 + a_n|.$$

Z kolei dla $n > m$

$$|1 + a_n| \ge 1 - |a_n| \ge e^{-b|a_n|},$$

gdzie $b := -\lambda^{-1}\log(1 - \lambda) > 0$ (z wypukłości funkcji e^{-bx} dostajemy $1 - x \ge e^{-bx}$ dla $x \in [0, \lambda]$). Otrzymamy

$$|p_N| \ge |H| \exp\Big(-b\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|\Big).$$

Z założenia mamy $p_N \to 0$, skąd wnioskujemy, że $H = 0$. □

Ćwiczenie Pokazać, że jeżeli $0 \le a_n < 1$, to

$$\prod(1 + a_n) < \infty \iff \prod(1 - a_n) > 0 \iff \sum a_n < \infty.$$

Wykład 10, 14.05.2007

Twierdzenie 15.2. *Niech f_n będzie ciągiem funkcji holomorficznych w obszarze Ω takim, że szereg $\sum|f_n|$ jest lokalnie ograniczony w Ω (to znaczy, że szereg $\sum f_n$ jest lokalnie bezwzględnie jednostajnie zbieżny). Wtedy*
i) $I := \prod(1 + f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)$ (zbieżność lokalnie jednostajna);
ii) $I(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_{n_0}(z_0) + 1 = 0$ dla pewnego n_0;
iii) $\dfrac{I'}{I} = \sum \dfrac{f_n'}{1 + f_n}$ na $\Omega \setminus I^{-1}(0)$ (zbieżność lokalnie jednostajna).

Dowód. i) Oznaczmy $I_N := \prod_{n=1}^N (1+f_n)$. Z (15.5) wynika, że szereg $\sum |I_N - I_{N-1}|$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny w Ω, a zatem ciąg I_N jest zbieżny lokalnie jednostajnie w Ω. Z Twierdzenia 4.8 wnioskujemy, że jego granica jest funkcją holomorficzną.

ii) Wynika natychmiast z Twierdzenia 15.1.

iii) Mamy

$$\left|\frac{I_N'}{I_N} - \frac{I'}{I}\right| \leq \frac{|I_N' - I'|\,|I| + |I'|\,|I_N - I|}{|I_N I|}.$$

Lokalnie jednostajna zbieżność $I_N'/I_N \to I'/I$ na $\Omega \setminus I^{-1}(0)$ wynika teraz z lokalnie jednostajnych zbieżności $I_N \to I$ oraz $I_N' \to I'$. $\square$

Możemy teraz pokazać, że (15.2) rzeczywiście zachodzi.

Propozycja 15.3. $\displaystyle \frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$

Dowód. Oznaczmy lewą stronę przez f a prawą przez I. Z Twierdzenia 15.2 wynika, że I jest funkcją całkowitą oraz, że

$$\frac{I'(z)}{I(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi},$$

(przy czym teraz ostatni szereg rozumiemy jako granicę $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}$; szeregi $\sum_{n\geq 0}$ i $\sum_{n<0}$ są rozbieżne). Z drugiej strony,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \cot z - \frac{1}{z}.$$

Jeżeli więc wykażemy równość pochodnych logarytmicznych $f'/f = I'/I$, to dostaniemy $(f/I)' = 0$. Ponieważ funkcja f/I jest całkowita (ma pozorne osobliwości w zerach funkcji I) oraz ma wartość 1 w 0, to $f = I$. Wystarczy zatem pokazać, że $f'/f = I'/I$, to znaczy, że

$$\cot z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi}. \tag{15.6}$$

Niech $R_N := (N + 1/2)\pi$, $N = 1, 2, \dots$ Dla ustalonego $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ rozpatrzmy następującą całkę

$$\int_{\partial K(0,R_N)} \frac{\cot\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial K(0,R_N)} \frac{\cot\zeta}{\zeta}\, d\zeta + z\int_{\partial K(0,R_N)} \frac{\cot\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta.$$

Pierwsza z całek po prawej stronie znika (z parzystości funkcji podcałkowej), dla drugiej mamy (dla N odp. dużego)

$$\left|\int_{\partial K(0,R_N)} \frac{\cot\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta\right| \leq \frac{2\pi R_N}{R_N(R_N - |z|)} \max_{\partial K(0,R_N)} |\cot z|.$$

Skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 15.4. *Istnieje $c > 0$ takie, że dla $N = 1, 2, \dots$ mamy*

$$|e^z - 1| \geq c, \quad |z| = (2N+1)\pi.$$

Dowód. Oznaczając $z = x + iy$ mamy

$$|e^z - 1| \geq |e^x - 1| \geq 1 - e^{-|x|}$$

(bo $e^x - 1 \geq 1 - e^{-x}$ dla $x > 0$). Niech $c' > 0$ będzie takie, że

$$|e^z - 1| \geq c', \quad |x| \leq \pi/2, \ |y \pm (2N+1)\pi| \leq \pi/2,$$

(takie c' istnieje, bo $e^z \neq 1$, gdy $|x| \leq \pi/2$, $|y - \pi| \leq \pi/2$ oraz $e^{z+2\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$). Możemy więc wziąć $c = \min(c', 1 - e^{-\pi/2})$. □

Koniec dowodu Propozycji 15.3. Mamy

$$\cot z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i - \frac{2i}{e^{2iz} - 1},$$

z Lematu 15.4 otrzymamy zatem

$$|\cot z| \leq C, \quad z \in \partial K(0, R_N),$$

gdzie C jest stałą niezależną od N. Stąd

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial K(0,R_N)} \frac{\cot\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Z drugiej strony, z twierdzania o residuach dla N odp. dużego mamy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(0,R_N)} \frac{\cot\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \operatorname{res}_z \frac{\cot\zeta}{\zeta - z} + \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{res}_{n\pi} \frac{\cot\zeta}{\zeta - z} = \cot z - \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z - n\pi},$$

czyli otrzymujemy (15.6). □

Iloczyny nieskończone można wykorzystać do konstrukcji funkcji holomorficznych o z góry zadanych zerach. Z zasady identyczności wynika, że zera te nie mogą mieć punktu skupienia. Okazuje się, że jest to jedyne ograniczenie.

Twierdzenie 15.5. (Weierstrass, 1876) *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech z_n będzie ciągiem różnych punktów z Ω bez punktów skupienia w Ω. Niech m_n będzie dowolnym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $z_1, z_2, \dots$ są wszystkimi zerami funkcji f o krotnościach, odpowiednio, $m_1, m_2, \dots$*

Jeżeli np. $\Omega = \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$, $z_n \to \infty$ (tzn. ciąg z_n nie ma punktów skupienia), to dzięki Twierdzeniu 15.2 iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

definiuje funkcję całkowitą pod warunkiem, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty,$$

czyli jeżeli ciąg z_n dąży odp. szybko do ∞. W celu pozbycia się tego dodatkowego założenia trzeba zamienić wyrażenie $1 - z/z_n$ na wyrażenie, które także znika dla $z = z_n$, ale które jest bliżej 1 dla z w pobliżu z_n. Posłużą do tego czynniki Weierstrassa

$$E_n(z) := (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right).$$

Lemat 15.6. *Dla* $z \in \overline{K}(0,1)$ *oraz* $n = 1, 2, \dots$ *mamy*

$$|E_n(z) - 1| \le |z|^{n+1}.$$

Dowód. Mamy

$$E_n'(z) = -z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right) = -z^n \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j,$$

gdzie $c_j \ge 0$. Stąd wynika, że funkcja $1 - E_n$ ma w 0 zero rzędu $n+1$ oraz

$$f(z) := \frac{1 - E_n(z)}{z^{n+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

gdzie $a_j = c_j/(j+n+1) \ge 0$ dla wszystkich j. Wnioskujemy, że $|f(z)| \le f(1) = 1$, gdy $|z| \le 1$. $\square$

Wracając teraz do problemu konstrukcji funkcji całkowitej o zadanych zerach $z_n \to \infty$, $z_n \ne 0$, możemy zdefiniować

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Wtedy z Lematu 15.6 mamy $|E_n(z/z_n) - 1| \le |z/z_n|^{n+1}$, z Twierdzenia 15.2 wynika więc, że powyższy iloczyn nieskończony jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $\mathbb{C}$ oraz, że zeruje się dokładnie w punktach z_n, przy czym krotność zera jest taka ile razy dany punkt pojawia się w ciągu z_n.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić także w ogólnym przypadku.

Dowód Twierdzenia 15.5. Stosując zmianę zmiennych w $\mathbb{P}$ postaci $z' = 1/(z - z_0)$, gdzie $z_0 \in \Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ jest ustalone, bez straty ogólności możemy założyć, że Ω jest obszarem w $\mathbb{P}$ zawierającym ∞, przy czym $z_n \ne \infty$, $n = 1, 2, \dots$ Niech $\widetilde{z}_n$ będzie ciągiem postaci $z_1, \dots, z_1, z_2, \dots, z_2, \dots$, gdzie każdy z punktów z_n powtarza się m_n razy. Niech $a_n \in \partial\Omega$ będą takie, że $\operatorname{dist}(\widetilde{z}_n, \partial\Omega) = |\widetilde{z}_n - a_n|$. Ciąg $\widetilde{z}_n$ ma punkty skupienia tylko na $\partial\Omega$, który jest zbiorem zwartym w $\mathbb{C}$, a zatem $|\widetilde{z}_n - a_n| \to 0$. Kładziemy

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\widetilde{z}_n - a_n}{\widetilde{z}_n - z}\right).$$

Z Lematu 15.6 mamy

$$\left|E_n\left(\frac{\widetilde{z}_n - a_n}{\widetilde{z}_n - z}\right) - 1\right| \le \left|\frac{\widetilde{z}_n - a_n}{\widetilde{z}_n - z}\right|^{n+1}.$$

Z Twierdzenia 15.2 otrzymamy więc lokalnie jednostajną zbieżność powyższego iloczynu nieskończonego w $\Omega \setminus \{\infty\}$. Co więcej, f jest ograniczone w pobliżu ∞, a więc przedłuża się do funkcji holomorficznej w Ω. Z Twierdzenia 15.2 wynika ponadto, że f nie ma zer poza ciągiem z_n, jest także jasne, że ich krotność jest równa m_n. $\square$

Definiując zbiór funkcji meromorficznych na danym obszarze pokazaliśmy, że jest on *lokalnie* ciałem ułamków pierścienia funkcji holomorficznych. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa można łatwo pokazać, że jest on w istocie ciałem ułamków.

Twierdzenie 15.7. *Każdą funkcję meromorficzną w obszarze Ω można zapisać w postaci f/g, gdzie $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Dowód. Niech h będzie funkcją meromorficzną w Ω. Z Twierdzenia 15.5 wynika, że istnieje funkcja $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że zbiór zer funkcji g jest taki sam jak zbiór biegunów funkcji h, przy czym krotności zer są takie same jak rzędy biegunów. Jest jasne, że wtedy funkcja $f := gh$ ma tylko pozorne osobliwości. □

16. Funkcja Γ Eulera

Funkcja Γ została zdefiniowana przez Eulera w 1729 r. (oznaczenia Γ jako pierwszy użył Legendre w 1814 r.)

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0. \tag{16.1}$$

Twierdzenie 16.1. *i)* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s > 0$;
ii) $\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$
iii) $\log \Gamma$ *jest funkcją wypukłą na* $(0, \infty)$.
Co więcej, funkcja Γ *jest jednoznacznie wyznaczona przez powyższe własności.*

Dowód. i) Całkowanie przez części.
ii) $\Gamma(1) = 1$ i korzystamy z i).
iii) Z nierówności Höldera mamy

$$\Gamma((1-t)s_1 + ts_2) \le \Gamma(s_1)^{1-t}\Gamma(s_2)^t, \quad 0 < t < 1, \quad s_1, s_2 > 0.$$

Wykład 11, 21.05.2007

Niech f będzie funkcją wypukłą na $(0, \infty)$ taką, że $f(s+1) = f(s) + \log s$ dla $s > 0$ oraz $f(1) = 0$. Wystarczy pokazać, że f jest jednoznacznie wyznaczona na $(0, 1)$. Jeżeli $0 < s < 1$ i $n = 1, 2, \dots,$ to z wypukłości f mamy

$$f(n+1) - f(n) \le \frac{f(s+n+1) - f(n+1)}{s} \le f(n+2) - f(n+1)$$

oraz

$$\begin{aligned} f(s+n+1) &= f(s) + \log[s(s+1)\dots(s+n)], \\ f(n+1) &= \log n!. \end{aligned}$$

Stąd dostaniemy

$$0 \le f(s) - \log \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} \le s \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

czyli funkcja f jest jednoznacznie wyznaczona na przedziale (0,1). $\square$

Całka definiująca funkcję Γ w (16.1) jest zbieżna także dla $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, pod warunkiem, że $\sigma > 0$ (bo $|x^{s-1}| = x^{\sigma-1}$ dla $x > 0$). Funkcję Γ można dobrze zdefiniować także dla innych $s \in \mathbb{C}$. Zauważmy najpierw, że z dowodu Twierdzenia 16.1 wynika, że dla $s \in (0,1)$ mamy $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} h_n(s)$, gdzie

$$h_n(s) = \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

Dla wszystkich $s > 0$

$$\frac{h_n(s+1)}{h_n(s)} = \frac{ns}{s+n+1} \to s,$$

gdy $n \to \infty$, skąd i z Twierdzenia 16.1.i łatwo wnioskujemy, że $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} h_n(s)$ dla wszystkich $s > 0$. Mamy także

$$\frac{1}{h_n(s)} = sn^{-s} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{s}{k}\Big) = s \exp\big(s \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - s\log n\big) \prod_{k=1}^{n} \Big[\Big(1 + \frac{s}{k}\Big) e^{-s/k}\Big].$$

Zauważmy też, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n \right) = \gamma = 0.577215\dots,$$

jest stałą Eulera, oraz, że, z Lematu 15.6 dla $n = 1$,

$$|(1+w)e^{-w} - 1| \le |w|^2, \quad |w| \le 1.$$

Stąd, z Twierdzenia 15.2 oraz zasady identyczności można wywnioskować następujące własności funkcji Γ.

Twierdzenie 16.2. *Funkcję Γ Eulera można (jednoznacznie) przedłużyć do nigdzie nie znikającej funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$, której wszystkie bieguny są proste i znajdują się w punktach $0, -1, -2, \dots$ Na $\mathbb{C}$ mamy lokalnie jednostajną zbieżność*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(1 + \frac{s}{n}\Big) e^{-s/n}\Big] \quad \text{(Newman, 1848, Weierstrass, 1856)},$$

oraz

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Dowód. Pokazaliśmy wszystko poza ostatnią tożsamością. Korzystając z pierwszych dwóch mamy

$$\frac{1}{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)} = \frac{1}{-s\Gamma(s)\,\Gamma(-s)} = s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

i wystarczy skorzystać z Propozycji 15.3. $\square$

17. Funkcja ζ Riemanna

Kładziemy

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1. \tag{17.1}$$

Zauważmy, że

$$\zeta(s) = \sum_{n \neq 2k} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2^s}\zeta(s),$$

czyli

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \sum_{n \neq 2k} \frac{1}{n^s}.$$

Postępując podobnie z lewą stroną zamiast $\zeta(s)$ otrzymamy

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\zeta(s) = \sum_{\substack{n \neq 2k \\ n \neq 3k}} \frac{1}{n^s}.$$

Kontynuując ten proces dla wszystkich liczb pierwszych widzimy, że prawa strona dąży do 1, ze zbieżności szeregu $\sum_p p^{-s}$ (p będzie zawsze oznaczało liczby pierwsze) dla $s > 1$ otrzymamy więc następujący rezultat, między innymi dzięki któremu funkcja ζ jest jednym z głównych obiektów badanych w teorii liczb.

Propozycja 17.1. (Euler, 1748) *Dla $s > 1$ mamy*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \quad \square \tag{17.2}$$

Wnioskujemy stąd w szczególności, że szereg $\sum_p 1/p$ jest rozbieżny.

Podobnie jak w przypadku funkcji Γ, chcemy przedłużyć funkcję ζ do funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$. Dla $s = \sigma + it$ mamy $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$, skąd wynika, że szereg $\sum n^{-s}$ jest bezwzględnie i lokalnie jednostajnie zbieżny w półpłaszczyźnie $\{\operatorname{Re} s > 1\}$. Formuła (17.1) dobrze zatem definiuje funkcję ζ dla takich s.

Wykład 12, 28.05.2007

Twierdzenie 17.2. (Riemann, 1859) *Funkcję ζ można jednoznacznie przedłużyć do funkcji holomorficznej w $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, z prostym biegunem i residuum równym 1 w 1, zerującą się w punktach $-2, -4, \dots$, której wszystkie pozostałe zera leżą w pasie $\{0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1\}$. Dla funkcji $\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ spełnione jest równanie funkcyjne Riemanna*

$$\xi(1 - s) = \xi(s). \tag{17.3}$$

Dowód. Mamy

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})dx, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

oraz
$$\left|\int_n^{n+1}(n^{-s}-x^{-s})dx\right| = \left|s\int_n^{n+1}\int_n^x y^{-1-s}dy\,dx\right| \le |s|n^{-1-\sigma},$$
a więc funkcja $\zeta(s)-1/(s-1)$ przedłuża się do funkcji holomorficznej w półpłaszczyźnie $\{\operatorname{Re} s>0\}$. Z (17.2) wynika, że ζ nie ma zer w $\{\operatorname{Re} s>1\}$. Funkcja Γ nie ma zer w $\mathbb{C}$, ma natomiast bieguny proste w $0,-1,-2,\dots$ Stąd łatwo wnioskujemy, że do zakończenia dowodu wystarczy wykazać (17.3), gdy $0<\operatorname{Re} s<1$ (a z zasady identyczności np. dla $0<s<1$), gdyż wtedy (17.3) będzie definiować $\zeta(s)$ dla dowolnych s takich, że $\operatorname{Re} s<1$, z zerami w $-2,-4,\dots$

Po podstawieniu $x=\pi n^2x'$ w (16.1) dostaniemy

$$\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\pi n^2x}x^{s/2-1}dx,\quad s>1. \tag{17.4}$$

Będziemy potrzebować następującego lematu o szeregach Fouriera.

Lemat 17.3. *Dla $x>0$ niech*
$$\theta(x):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2x}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2x}.$$
Wtedy
$$\theta(1/x)=\sqrt{x}\,\theta(x). \tag{17.5}$$

Dowód. Połóżmy $f(t):=e^{-\pi t^2x}$ i
$$F(t):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t+n).$$
Wtedy F jest funkcją okresową (o okresie 1) i spełnia warunek Lipschitza. Jej szereg Fouriera jest więc zbieżny punktowo, a stąd
$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=F(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{2\pi int}F(t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n),$$
(jest to tzw. *reguła sumacyjna Poissona*) gdzie
$$\widehat{f}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi ist}f(t)\,dt$$
jest transformatą Fouriera funkcji f. Do znalezienia $\widehat{f}$ potrzebujemy obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty}e^{iax-bx^2}dx$ dla $a\in\mathbb{R}$ i $b>0$. Po podstawieniu $z=\sqrt{b}x-ai/(2\sqrt{b})$ i całkowaniu po odp. konturze otrzymamy
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iax-bx^2}dx=\frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}\int_{\{\operatorname{Im} z=-\frac{a}{2\sqrt{b}}\}}e^{-z^2}dz=\frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}.$$

Stąd

$$(e^{-\pi t^2 x})\hat{} = \frac{e^{-\pi s^2/x}}{\sqrt{x}},$$

co kończy dowód lematu. $\square$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Rozpatrując pochodną obu stron (17.5) w 1 pokazać, że

$$e^{\pi} > 8\pi - 2$$

(w rzeczywistości $e^{\pi} - (8\pi - 2) = 0,0079514\dots$).

Koniec dowodu Twierdzenia 17.2. Można łatwo pokazać, że funkcja $\theta - 1$ szybko zbiega do 0 w ∞, np.

$$0 \le \theta(x) - 1 \le Ce^{-\pi x}, \quad x \ge 1,$$

gdzie $C > 0$ ($\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$). Korzystając z tego i (17.5) wnioskujemy, że prawa strona (17.4) jest zbieżna, gdy $0 < s < 1$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} 2\xi(s) &= \int_0^{\infty} (\theta(x) - 1)x^{s/2-1}dx = \int_0^1 + \int_1^{\infty} \\ &= -\frac{2}{s} + \int_0^1 \theta(x)x^{s/2-1}dx + \int_1^{\infty} (\theta(x) - 1)x^{s/2-1}dx. \end{aligned}$$

Po zmianie zmiennych z Lematu 17.3 dostaniemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta(x)x^{s/2-1}dx = \int_1^{\infty} \theta(1/x)x^{-s/2-1}dx &= \int_1^{\infty} \theta(x)x^{-s/2-1/2}dx \\ \frac{2}{s-1} &+ \int_1^{\infty} (\theta(x) - 1)x^{-s/2-1/2}dx, \end{aligned}$$

a stąd

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} (\theta(x) - 1)x^{-1}(x^{s/2} + x^{(1-s)/2})dx,$$

skąd natychmiast wynika (17.3). $\square$

Punkty $-2, -4, \dots$ są nazywane trywialnymi zerami funkcji ζ. Z (17.2) i (17.3) wnioskujemy, że wszystkie nietrywialne zera leżą w pasie $\{0 \le \operatorname{Re} s \le 1\}$. Równanie Riemanna implikuje, że są one symetryczne względem punktu 1/2. *Hipoteza Riemanna* mówi, że wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ leżą na prostej $\{\operatorname{Re} s = 1/2\}$.

Twierdzenie 17.4. (Hadamard, de la Vallée-Poussin, 1896) *Funkcja ζ nie ma zer na prostej* $\{\operatorname{Re} s = 1\}$.

Dowód. (Mertens, 1897) Różniczkując równanie $\log(1 - z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, gdzie $a_0 = \log 1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, otrzymamy $a_m = -1/m$, $m \ge 1$. Biorąc części rzeczywiste dostaniemy

$$\log|1 - z| = -\operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}, \quad |z| < 1.$$

Z Propozycji 17.1 mamy więc

$$\log|\zeta(s)| = \operatorname{Re}\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{sm}} = \sum_{p,m}\frac{\cos(tm\log p)}{mp^{\sigma m}}, \quad \sigma > 1,$$

(dzięki temu że $|p^{-s}| = p^{-\sigma} < 1$). Zauważmy, że dla $\varphi \in \mathbb{R}$ mamy

$$3 + 4\cos\varphi + \cos(2\varphi) = 2(1+\cos\varphi)^2 \geq 0,$$

a stąd

$$|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Po przekształceniu

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}, \quad \sigma > 1.$$

Jeżeli teraz dla pewnego $t \neq 0$ mielibyśmy $\zeta(1+it) = 0$, to przechodząc z σ do 1 prawa strona powyższej równości dąży do $|\zeta'(1+it)|^4|\zeta(1+2it)|$ a prawa do ∞ - sprzeczność. $\square$

18. Twierdzenie o liczbach pierwszych

Niech $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych $\leq x$. Dowód następującego rezultatu został naszkicowany przez Riemanna w 1859 r. i precyzyjnie udowodniony niezależnie przez Hadamarda i de la Vallée-Poussina w 1896 r.

Twierdzenie 18.1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$

Przedstawimy dowód pochodzący od Newmana (1980). Połóżmy

$$\vartheta(x) := \sum_{p\leq x}\log p, \quad x \geq 0, \quad \Phi(s) := \sum_p\frac{\log p}{p^s}, \quad \operatorname{Re}s > 1,$$

gdzie p (także w dalszej części) oznacza liczby pierwsze. Zauważmy, że $\vartheta(x) = 0$ dla $x < 2$.

Dowód podzielimy na kilka lematów.

Lemat 18.2. *Funkcja $\Phi(s) - 1/(s-1)$ przedłuża się do funkcji holomorficznej otoczeniu $\{\operatorname{Re}s \geq 1\}$.*

Dowód. Korzystając z Propozycji 17.1 otrzymamy

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p\frac{\log p}{p^s-1} = \Phi(s) + \sum_p\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}.$$

Ostatnia suma przedłuża się do funkcji holomorficznej w $\{\operatorname{Re}s > 1/2\}$, natomiast $-\zeta'(s)/\zeta(s) - 1/(s-1)$ do funkcji holomorficznej w otoczeniu $\{\operatorname{Re}s \geq 1\}$ dzięki Twierdzeniom 17.2 i 17.4. $\square$

Lemat 18.3. *Istnieje $C > 0$ takie, że $\vartheta(x) \le Cx$, $x \ge 0$.*

Dowód. Dla $n = 1, 2, \dots$ mamy

$$e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)} = \prod_{n<p\le 2n} p \le \binom{2n}{n} \le (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

gdzie przedostatnia nierówność wynika z faktu, że $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ jest liczbą naturalną, a więc wszystkie liczby pierwsze p takie, że $n < p \le 2n$ znajdą się w jej rozkładzie. Dla $x \ge 2$, niech $n := [x/2]$. Wtedy $2n \le x < 2n+2$ oraz

$$\begin{aligned}\vartheta(x) - \vartheta(x/2) &\le \vartheta(2n+2) - \vartheta(n) \le \vartheta(2n) + \log(2n+2) - \vartheta(n)\\ &\le x\log 2 + \log(x+2) \le C_1 x\end{aligned}$$

dla pewnego $C_1 > 0$. Jeżeli $r = 1, 2, \dots$ jest takie, że $2^r \le x < 2^{r+1}$, to

$$\vartheta(x) = \vartheta(x/2^r) + \sum_{j=0}^{r-1} \left[\vartheta(x/2^j) - \vartheta(x/2^{j+1})\right] \le 2C_1 x. \qquad \square$$

Wykład 13, 4.06.2007

Lemat 18.4. *Istnieje granica* $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$.

Dowód. Wyrazimy najpierw Φ przy pomocy ϑ:

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\\ &= s\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx = s\int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Z Lematu 18.2 funkcja $g(z) := \Phi(z+1)/(z+1) - 1/z$ jest holomorficzna w otoczeniu $\{\operatorname{Re} z \ge 0\}$. Gdy $\operatorname{Re} z > 0$, to

$$g(z) = \int_0^\infty \vartheta(e^t) e^{-(z+1)t} dt - \frac{1}{z} = \int_0^\infty f(t) e^{-tz} dt,$$

gdzie

$$f(t) = e^{-t}\vartheta(e^t) - 1, \quad t \ge 0.$$

Z Lematu 18.3

$$|f(t)| \le C, \quad t \ge 0. \tag{18.1}$$

Dla $T > 0$ funkcja

$$g_T(z) := \int_0^T f(t) e^{-zt} dt$$

jest całkowita, musimy pokazać, że $\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$. Dla $R > 0$ niech $\delta > 0$ będzie takie, że g jest holomorficzna w otoczeniu $\overline{D}_R$, gdzie

$$D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ \operatorname{Re} z > -\delta\}.$$

Z wzoru Cauchy'ego zastosowanego do funkcji $(g - g_T)h_T$, gdzie

$$h_T(z) := e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right),$$

otrzymamy

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R} \frac{(g(z) - g_T(z))h_T(z)}{z}\,dz.$$

Gdy $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| = R$, to $|1 + z^2/R^2| = 2\operatorname{Re} z/R$, a stąd i z (18.1)

$$|(g(z) - g_T(z))h_T(z)| \le \frac{2\operatorname{Re} z\, e^{\operatorname{Re} z\, T}}{R}\left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}dt\right| \le \frac{2C}{R}.$$

Wystarczy więc zbadać całkę na $\partial D_R \cap \{\operatorname{Re} z \le 0\}$. Ponieważ $g_T \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, mamy

$$\int_{\partial D_R \cap \{\operatorname{Re} z \le 0\}} \frac{g_T(z)h_T(z)}{z}\,dz = \int_{\{|z|=R,\ \operatorname{Re} z \le 0\}} \frac{g_T(z)h_T(z)}{z}\,dz,$$

oraz, gdy $\operatorname{Re} z \le 0$, $|z| = R$,

$$|g_T(z)h_T(z)| \le \frac{2|\operatorname{Re} z|\, e^{\operatorname{Re} z\, T}}{R}\left|\int_0^T f(t)e^{-\operatorname{Re} z\, t}dt\right| \le \frac{2C}{R}.$$

Wreszcie funkcja gh_T jest zbieżna lokalnie jednostajnie do zera w $\overline{D}_R \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$, gdy $T \to \infty$ (a R jest stałe), skąd w efekcie otrzymamy

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \le \frac{4C}{R}.$$

Wobec dowolności R kończy to dowód. $\square$

Lemat 18.5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$

Dowód. Ustalmy $\lambda > 1$. Jeżeli istnieje dowolnie duże x takie, że $\vartheta(x) \ge \lambda x$, to $\vartheta(t) \ge \lambda x$ dla $t \ge x$, oraz

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,dt \ge \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,dt = \lambda - 1 - \log\lambda > 0$$

i dostaniemy sprzeczność z Lematem 18.4 (a dokładnie z warunkiem Cauchy'ego dla ciągu z tego lematu). Z drugiej strony, jeżeli istnieje dowolnie duże x takie, że $\vartheta(x) \le x/\lambda$, to

$$\int_{x/\lambda}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,dt \le \int_{x/\lambda}^{x} \frac{x/\lambda - t}{t^2}\,dt = -1/\lambda + 1 - \log\lambda < 0,$$

co ponownie jest sprzeczne z Lematem 18.4. □

Dowód Twierdzenia 18.1. Mamy

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p \le \sum_{p\le x} \log x = \pi(x)\log x.$$

Z drugiej strony, korzystając z tego, że $\pi(x) \le x$, dla $\lambda < 1$ dostaniemy

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &\ge \sum_{x^\lambda < p\le x} \log p \ge \sum_{x^\lambda < p \le x} \lambda \log x \\ &= \lambda \log x \left[\pi(x) - \pi(x^\lambda)\right] \ge \lambda \log x \left[\pi(x) - x^\lambda\right].\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \le \frac{\pi(x)}{x/\log x} \le \frac{\vartheta(x) + x^\lambda \log x}{\lambda x}$$

i wystarczy użyć Lematu 18.5. □

Kluczowym elementem dowodu Twierdzenia 18.1 było wykorzystanie Twierdzenia 17.4, czyli niezerowanie się funkcji ζ na prostej $\operatorname{Re} s = 1$. Hipoteza Riemanna mówi, że nie ma zer na zbiorze $\{\operatorname{Re} s > 1/2\}$. Można pokazać, że jest ona równoważna następującej własności funkcji π (która lepiej opisywałaby jej zachowanie się w nieskończoności niż Twierdzenie 18.1):

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\log y} + O(\sqrt{x}\log x),$$

gdy $x \to \infty$.

19. Aproksymacja funkcji holomorficznych

Celem tej części będzie omówienie sytuacji kiedy funkję holomorficzną można aproksymować funkcjami określonymi na większym zbiorze. Zauważmy najpierw, że nie jest to zawsze możliwe: np. funkcji $f(z) = 1/z$ nie da się jednostajnie aproksymować na $\partial\Delta$ funkcjami holomorficznymi w otoczeniu $\overline{\Delta}$, gdyż jeżeli g jest taką funkcją, to $\int_{\partial\Delta} g(z)dz = 0$, natomiast $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 2\pi i$. Udowodnimy najpierw następujący rezultat.

Twierdzenie 19.1. (Runge, 1885) *Dla zwartego podzioru K obszaru Ω w $\mathbb{C}$ NWSR*

i) Każda funkcja holomorficzna w otoczeniu K może być jednostajnie aproksymowana na K przez funkcje holomorficzne w Ω;

ii) Żadna składowa spójna zbioru $\Omega \setminus K$ nie jest relatywnie zwarta w Ω.

Dowód. i)⇒ii) Przypuśćmy, że ii) nie zachodzi, tzn. że istnieje składowa spójna G zbioru $\Omega \setminus K$ relatywnie zwarta w Ω. Wtedy $\partial G \subset K$ oraz z zasady maksimum

$$\max_{\overline{G}} |f| \le \max_K |f|, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega). \tag{19.1}$$

Z i), dla ustalonego $w \in G$, funkcja $f(z) = 1/(z-w)$ jest holomorficzna w otoczeniu K, a więc znajdziemy ciąg $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ taki, że $f_n \to f$ jednostajnie na K. Z (19.1) zastosowanego do funkcji $f_n - f_m$ wynika, że ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny na $\overline{G}$ do pewnego $F \in \mathcal{O}(G) \cap C(\overline{G})$. Mamy $(z-w)F(z) = 1$ dla $z \in \partial G$, a z zasady maksimum dla $z \in \overline{G}$. Dla $z = w$ dostaniemy sprzeczność.

Wykład 14, 11.06.2007

ii)⇒i) Ustalmy $f \in \mathcal{O}(U)$, gdzie $U \subset \Omega$ jest otwartym otoczeniem K. Chcemy pokazać, że $f \in \overline{\mathcal{O}(\Omega)}$, przy czym $\mathcal{O}(\Omega)$ traktujemy jako podprzestrzeń wektorową przestrzeni Banacha $C(K)$ (z normą maksimum). Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że wystarczy pokazać, że nie istnieje funkcjonał ograniczony $A \in (C(K))'$ taki, że $A = 0$ na $\mathcal{O}(\Omega)$ i $A(f) \neq 0$. Twierdzenie reprezentacyjne Riesza mówi, że każdy taki funkcjonał jest postaci

$$A(g) = \int_K g\, d\mu, \quad g \in C(K),$$

dla pewnej zespolonej, regularnej miary borelowskiej μ na K. Musimy więc pokazać, że jeżeli μ jest taką miarą i

$$\int_K g\, d\mu = 0, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega), \tag{19.2}$$

to $\int_K f\, d\mu = 0$.

Połóżmy

$$h(z) := \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Ponieważ możemy różniczkować pod znakiem całki, mamy $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ oraz

$$h^{(n)}(z) = n! \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Z (19.2) wynika, że $h^{(n)} = 0$ na $\mathbb{C} \setminus \Omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a stąd $h = 0$ w otoczeniu każdego punktu z $\mathbb{C} \setminus \Omega$, a z zasady identyczności i dzięki temu, że K spełnia ii), $h = 0$ na każdej składowej ograniczonej $\mathbb{C} \setminus K$. Mamy także

$$\lim_{z \to \infty} h^{(n)}(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

i rozumując podobnie (dla funkcji $h(1/\zeta)$ w otoczeniu 0) otrzymamy $h = 0$ także na składowej nieograniczonej. Otrzymaliśmy więc

$$\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K. \tag{19.3}$$

Niech $\Gamma \subset U \setminus K$ będzie cyklem danym przez Lemat 10.3. Dzięki Twierdzeniu 10.4, (19.3) oraz twierdzeniu Fubiniego mamy wtedy

$$2\pi i \int_K f(z)\, d\mu(z) = \int_K \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\, d\mu(z) = \int_\Gamma \int_K \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \qquad \square$$

Dla zwartego podzbioru K obszaru Ω definiujemy otoczkę holomorficzną K względem Ω

$$\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega : |f(z)| \le \max_K |f| \text{ dla każdego } f \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

W przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{C}$ zbiór $\widehat{K} := \widehat{K}_\mathbb{C}$ nazywamy otoczką wielomianową zbioru K, gdyż w definicji zamiast wszystkich funkcji całkowitych wystarczy brać tylko wielomiany. Jeżeli $K = \widehat{K}$, to mówimy, że K jest wielomianowo wypukły.

Propozycja 19.2. *Dla zwartego podzbioru K obszaru Ω zbiór $\widehat{K}_\Omega$ jest zwarty oraz*

$$\operatorname{dist}(\widehat{K}_\Omega, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \tag{19.4}$$

(jeżeli $\Omega = \mathbb{C}$, to $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) = \infty$).

Dowód. Mamy

$$\widehat{K}_\Omega = \bigcap_{f \in \mathcal{O}(\Omega)} \{|f| \le \max_K |f|\},$$

a więc $\widehat{K}_\Omega$ jest domknięty w Ω. Wystarczy więc pokazać $\le$ w (19.4) (nierówność przeciwna jest oczywista) - otrzymamy wtedy także zwartość. Jeżeli $\Omega = \mathbb{C}$, to wystarczy rozpatrzyć funkcję $f(z) = z$. Możemy więc założyć, że istnieje $w \in \partial\Omega \ne \emptyset$. Biorąc funkcję $f(z) := 1/(z - w)$ otrzymamy $\widehat{K}_\Omega \subset \{z \in \Omega : |z - w| \ge \operatorname{dist}(w, K)\}$, skąd dostaniemy (19.4). $\square$

Zanacznie więcej daje twierdzenie Rungego - otrzymamy następującą topologiczną charakteryzację otoczki $\widehat{K}_\Omega$.

Twierdzenie 19.3. *$\widehat{K}_\Omega$ jest sumą K oraz składowych spójnych zbioru $\mathbb{C} \setminus K$, które są relatywnie zwarte w Ω.*

Dowód. Przez $\widetilde{K}$ oznaczmy wspomnianą sumę. Oczywiście $K \subset \widehat{K}_\Omega$, natomiast jeżeli G jest składową $\Omega \setminus K$ relatywnie zwartą w Ω, to $\partial G \subset K$ i z zasady maksimum mamy $G \subset \widehat{K}_\Omega$, a więc $\widetilde{K} \subset \widehat{K}_\Omega$.

Zbiór $\widetilde{K}$ jest domknięty w Ω (bo $\partial(\widetilde{K} \setminus K) \subset K$). Możemy łatwo pokazać, że $\operatorname{dist}(\widetilde{K}, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$, a więc $\widetilde{K}$ jest zwarty. Dla ustalonego $z_0 \in \Omega \setminus \widetilde{K}$ zbiór $\widetilde{K} \cup \{z_0\}$ spełnia warunek ii) w Twierdzeniu 19.1. Niech f będzie funkcją równą 1 w pewnym otoczeniu z_0 i równą 0 w pewnym otoczeniu $\widetilde{K}$. Znajdziemy zatem $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $|f - g| < 1/2$ na $\widetilde{K} \cup \{z_0\}$. W szczególności, $|g(z_0)| > 1/2$, natomiast $|g| < 1/2$ na $\widetilde{K}$, a stąd $z_0 \notin \widehat{K}_\Omega$. $\square$

Z Twierdzenia 19.3 wynika, że warunki i), ii) w Twierdzeniu 19.1 są równoważne temu, że $\widehat{K}_\Omega = K$.

Wniosek 19.4. *Zbiór zwarty $K \subset \mathbb{C}$ jest wielomianowo wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{C} \setminus K$ jest zbiorem spójnym.* $\square$

Jeżeli $\Omega = \mathbb{C}$, to w Twierdzeniu 19.1 otrzymamy aproksymację funkcjami całkowitymi, a te można aproksymować wielomianami.

Twierdzenie 19.5. *Jeżeli zbiór zwarty $K \subset \mathbb{C}$ jest wielomianowo wypukły, to każda funkcja holomorficzna w otoczeniu K może być na K jednostajnie aproksymowana wielomianami.* $\square$

Mergelyan (1952) udowodnił następujący, znacznie mocniejszy rezultat niż powyższe twierdzenie: jeżeli K jest wielomianowo wypukły, to każda funkcja $f \in C(K) \cap \mathcal{O}(\operatorname{int} K)$ może być jednostajnie aproksymowana na K wielomianami.

Przykład. Dla $n = 1, 2, \dots$ zbiory $K_n = \{\rho e^{it} : 1/n \le \rho \le n,\ 1/n \le t \le 2\pi\}$ są wielomianowo wypukłe. Dzięki Twierdzeniu 19.5, zastosowanemu do $K_n \cup \{0\}$, znajdziemy więc wielomiany P_n takie, że $|P_n(0)| \le 1/n$ oraz $|P_n - 1| \le 1/n$ na K_n. Ciąg P_n jest więc punktowo zbieżny do w 0 w 0 i do 1 w $\mathbb{C}_*$. Pokazuje to, że w ćwiczeniu po Twierdzeniu 6.5 nie da się zawsze otrzymać holomorficzności granicy w całym Ω.

Podamy teraz jeszcze inne zastosowania twierdzenia Rungego. Pierwszym jest dowód istnienia funkcji meromorficznej o dowolnie zadanej części osobliwej.

Twierdzenie 19.6. (Mittag-Leffler, 1884) *Załóżmy, że Ω jest obszarem w $\mathbb{C}$ oraz że ciąg $z_n \in \Omega$ nie ma punktów skupienia w Ω. Wtedy istnieje funkcja meromorficzna f w Ω o biegunach dokładnie w punktach z_n, przy czym dla każdego z_n możemy z góry dowolnie zadać część osobliwą szeregu Laurenta funkcji f w z_n.*

Dowód. Niech f_n będzie zadaną częścią osobliwą szeregu Laurenta w z_n

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^{m_n} a_{nj}(z - z_n)^{-j} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_n\}).$$

Znajdziemy rosnący ciąg zbiorów zwartych $K_n \subset \Omega$ wyczerpujących Ω (tzn. każdy zbiór zwarty $K \subset \Omega$ zawiera sie w K_n dla pewnego n) takich, że $\widehat{(K_n)}_\Omega = K_n$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $z_k \notin K_n$ dla $k \ge n$ (ciąg $K_1, K_2, \dots$ możemy zamienić ciągiem $\emptyset, \dots, \emptyset, K_1, \dots, K_1, K_2, \dots, K_2, \dots$ - korzystamy z tego, że z_n nie ma punktów skupienia w Ω). Dzięki twierdzeniu Rungego dla każdego n znajdziemy $h_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $|f_n - h_n| \le 1/2^n$ na K_n. Zatem dla każdego n szereg

$$\sum_{k=n}^{\infty} (f_k - h_k)$$

jest jednostajnie zbieżny na K_n, a stąd funkcja $f := \sum_n (f_n - h_n)$ posiada żądane własności. $\square$

Twierdzenie Rungego wykorzystamy także w dowodzie następującego rezultatu.

Twierdzenie 19.7. *Niech Ω będzie dowolnym obszarem w $\mathbb{C}$. Wtedy dla każdego $g \in C^\infty(\Omega)$ istnieje $f \in C^\infty(\Omega)$ takie, że $\partial f/\partial \bar{z} = g$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że g ma nośnik zwarty. Wtedy bez straty ogólności możemy założyć, że $\Omega = \mathbb{C}$. Połóżmy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(\zeta + z)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in \mathbb{C},$$

gdzie ostatnia równość została otrzymana dzięki zmianie zmiennych $\zeta' = \zeta - z$. Różniczkując pod znakiem całki i zmieniając zmienne otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g_{\bar{z}}(\zeta + z)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Stosując Twierdzenie 10.1 do kuli zawierającej nośnik g dostaniemy $\partial f/\partial\overline{z}(z) = g(z)$.

Niech teraz g i Ω będą dowolne. Wybierzmy zbiory K_n tak jak w dowodzie Twierdzenia 19.6. Niech $\psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ będzie takie, że $\psi_n = 1$ w otoczeniu K_n. Połóżmy $\varphi_1 := \psi_1$, $\varphi_n := \psi_n - \psi_{n-1}$, $n \geq 2$. Wtedy $\sum_n \varphi_n = 1$ w Ω oraz $\varphi_n = 0$ w otoczeniu K_{n-1}, $n \geq 2$. Dzięki pierwszej części dla każdego n znajdziemy $f_n \in C^\infty(\Omega)$ takie, że $\partial f_n/\partial\overline{z} = \varphi_n g$. W szczególności, funkcja f_n jest holomorficzna w otoczeniu K_{n-1}, $n \geq 2$. Dzięki twierdzeniu Rungego znajdziemy $h_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $|f_n - h_n| \leq 1/2^n$ na K_{n-1}. Definiujemy

$$f := f_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(f_n - h_n).$$

Szereg jest lokalnie jednostajnie zbieżny w Ω. Co więcej, lokalnie wszystkie poza skończoną liczbą wyrazy tego szeregu są funkcjami holomorficznymi, a więc $f \in C^\infty(\Omega)$ oraz $\partial f/\partial\overline{z} = \sum_n \varphi_n g = g$. $\square$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że dla dowolnego obszaru Ω w $\mathbb{C}$ i $h \in C^\infty(\Omega)$ istnieje $u \in C^\infty(\Omega)$ takie, że $u_{z\overline{z}} = h$, przy czym jeżeli h ma wartości rzeczywiste, to znajdziemy odp. u także o wartościach rzeczywistych.

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Udowodnić, że dla dowolnego obszaru Ω mamy

$$\mathcal{O}(\Omega) = \{h_z : h \in C^\infty(\Omega),\ h_{z\overline{z}} = 0\}.$$

Wykład 15, 8.10.2007

20. Odwzorowania konforemne

Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $f : D \to \mathbb{C}$ nazywamy lokalnie konforemnym, jeżeli f jest lokalnym dyfeomorfizmem klasy C^1 oraz f zachowuje kąty oraz orientację, tzn. jeżeli $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ są krzywymi klasy C^1 takimi, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1' \neq 0$, $\gamma_2' \neq 0$, to kąt zorientowany pomiędzy wektorami $\gamma_1'(0)$ a $\gamma_2'(0)$ jest równy kątowi zorientowanemu pomiędzy wektorami $(f \circ \gamma_1)'(0)$ a $(f \circ \gamma_2)'(0)$.

Propozycja 20.1. *Dla odwzorowania $f : D \to \mathbb{C}$ NWSR*
i) f jest lokalnie konforemne;
ii) $f \in \mathcal{O}(D)$, $f' \neq 0$;
iii) $f \in \mathcal{O}(D)$, f jest lokalnie jednokrotne.

Dowód. ii)⇔iii) wynika natychmiast z Propozycji 2.4 i Twierdzenia 14.3.

i)⇔ii) Przypomnijmy (zob. (2.7)), że dla dowolnej krzywej γ mamy

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(0))\,\gamma'(0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\gamma(0))\,\overline{\gamma'(0)}.$$

Zachowywanie kątów zorientowanych jest więc równoważne temu, że

$$\arg\frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)} = \arg\frac{f_z(z_0)\gamma_1'(0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{\gamma_1'(0)}}{f_z(z_0)\gamma_2'(0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{\gamma_2'(0)}},$$

gdzie $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. Jeżeli więc f jest funkcją holomorficzną taką, że $f' = \partial f/\partial z \neq 0$, to f jest lokalnym dyfeomorfizmem (bo $Jac\, f = |f'|^2$) oraz zachowuje kąty i orientację.

Z drugiej strony, jeżeli rozpatrzymy krzywe postaci $\gamma_\vartheta(t) = z_0 + e^{i\vartheta}t$ dla ustalonego $z_0 \in D$ i dowolnego $\vartheta \in \mathbb{R}$, to

$$\arg \frac{\gamma'_\vartheta(0)}{\gamma'_0(0)} = \arg e^{i\vartheta},$$

natomiast

$$\arg \frac{(f \circ \gamma_\vartheta)'(0)}{(f \circ \gamma_0)'(0)} = \arg \frac{f_z(z_0)e^{i\vartheta} + f_{\overline{z}}(z_0)e^{-i\vartheta}}{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)}.$$

Jeżeli więc f jest odwzorowaniem lokalnie konforemnym, to w szczególności dla każdego $\vartheta \in \mathbb{R}$ argument liczby $f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)e^{-2i\vartheta}$ byłby niezależny od ϑ, a jest to możliwe tylko wtedy, gdy $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$. □

Lokalną konforemność można więc zdefiniować także dla odwzorowań określonych na obszarach w $\mathbb{P}$ i o wartościach w $\mathbb{P}$. Odwzorowanie $f : D \to G$, gdzie D, G są obszarami w $\mathbb{P}$, nazywamy konforemnym (lub też biholomorficznym), jeżeli f jest holomorficzną bijekcją. Z Propozycji 20.1 wynika, że wtedy f jest w szczególności lokalnie konforemne, zaś dzięki Propozycji 2.4 odwzorowanie f^{-1} jest także konforemne. Dwa obszary w $\mathbb{P}$ nazywamy konforemnymi, jeżeli istnieje odwzorowanie konforemne pomiędzy nimi. Zauważmy, że każde odwzorowanie holomorficzne jednokrotne f jest odwzorowaniem konforemnym na obraz.

Przykład. Płaszczyzna zespolona $\mathbb{C}$ nie jest obszarem konforemnym z Δ - jest to natychmiastowy wniosek z twierdzenia Liouville'a.

Odwzorowanie konforemne $f : D \to D$ nazywamy automorfizmem obszaru D, przez $\mathrm{Aut}\,(D)$ oznaczamy zbiór wszystkich automorfizmów obszaru D. Ma on strukturę grupy (względem składania odwzorowań). Zauważmy, że jeżeli obszary D i G są konforemne, to grupy $\mathrm{Aut}\,(D)$ i $\mathrm{Aut}\,(G)$ są izomorficzne: jeżeli $f : D \to G$ jest odwzorowaniem konforemnym, to odwzorowanie

$$\mathrm{Aut}\,(D) \ni g \longmapsto f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}\,(G)$$

jest izomorfizmem.

Opiszemy teraz dokładnie automorfizmy Δ, $\mathbb{C}$ oraz $\mathbb{P}$.

Twierdzenie 20.2. $\mathrm{Aut}\,(\Delta) = \left\{\lambda \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} : \lambda, a \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, |a| < 1\right\}.$

Dowód. W celu wykazania $\supset$ możemy założyć, że $\lambda = 1$. Dla $a \in \Delta$ oznaczmy

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Zauważmy, że

$$|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2),$$

skąd wynika, że $T_a(\Delta) \subset \Delta$. Łatwo sprawdzić, że T_{-a} jest odwzorowaniem odwrotnym do T_a, skąd wynika, że $T_a \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$.

W celu wykazania $\subset$ skorzystamy z *lematu Schwarza* (1884).

Lemat 20.3. *Jeżeli* $f \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta)$ *jest takie, że* $f(0) = 0$*, to*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \Delta, \quad \textit{oraz} \ \ |f'(0)| \leq 1.$$

Co więcej, jeżeli $|f(z_0)| = |z_0|$ *dla pewnego* $z_0 \in \Delta_*$ *lub* $|f'(0)| = 1$*, to* f *jest postaci* $f(z) = \lambda z$*, gdzie* $|\lambda| = 1$*, tzn.* f *jest obrotem.*

Dowód. Funkcja

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & z \in \Delta_*, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

jest holomorficzna w Δ. Dla $r \in (0, 1)$ mamy $|g(z)| \leq 1/r$, jeżeli $|z| = r$. Z zasady maksimum wynika zatem, że $|g(z)| \leq 1/r$, gdy $|z| \leq r$, otrzymamy więc, że $|g| \leq 1$ w Δ. To pokazuje pierwszą część lematu. Druga część wynika z tego, że jeżeli $|g(z_0)| = 1$ dla pewnego $z_0 \in \Delta$, to funkcja g jest stała. $\square$

Koniec dowodu Twierdzenia 20.2. Niech $f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$. Odwzorowanie $\widetilde{f} := f \circ T_a \in \operatorname{Aut}(\Delta)$ spełnia $\widetilde{f}(0) = 0$, jeżeli $a = -f^{-1}(0)$. Z lematu Schwarza (lub z nierówności Cauchy'ego) wynika, że $|\widetilde{f}'(0)| \leq 1$. Z drugiej strony, $1 \geq |(\widetilde{f}^{-1})'(0)| = 1/|\widetilde{f}'(0)|$, a więc $|\widetilde{f}'(0)| = 1$. Korzystając z ostatniej części lematu Schwarza znajdziemy λ, $|\lambda| = 1$, takie, że $\widetilde{f}(\zeta) = \lambda\zeta$, $\zeta \in \Delta$. Stąd $f = \lambda T_{-a}$. $\square$

Propozycja 20.4. $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.

Dowód. $\supset$ jest oczywiste. Jeżeli $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$, to f ma osobliwość izolowaną w ∞, z Twierdzenia 12.2 wynika, że nie jest to osobliwość istotna (bo f jest bijekcją). Funkcja f musi więc być wielomianem, jeżeli stopień tego wielomianu byłby różny od 1, to f nie byłoby bijekcją. $\square$

Propozycja 20.5. $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}) = \left\{ \dfrac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$.

Dowód. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ będą takie, że $ad - bc \neq 0$. Jeżeli $c \neq 0$, to

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)},$$

skąd łatwo wynika $\supset$ (jeżeli $c = 0$, to mamy odwzorowanie liniowe). Dla $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ korzystamy z Propozycji 20.4: jeżeli $f(\infty) = \infty$, to $f|_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$, jeżeli zaś $f(\infty) \in \mathbb{C}$ to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \frac{1}{f(z) - f(\infty)} \in \mathbb{C}$$

jest liniowe dzięki i), skąd otrzymujemy $\subset$. $\square$

Elementy $\operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ nazywamy homografiami. Można pokazać $\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$, że
a) każda homografia jest złożeniem odwzorowań liniowych i odwzorowania $z \mapsto 1/z$;
b) każda homografia przekształca okrąg w $\mathbb{P}$ (tj. okrąg lub prostą w $\mathbb{C}$) w okrąg w $\mathbb{P}$;

c) każda homografia zachowuje *dwustosunek* każdej czwórki punktów:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}, \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P};$$

d) dla każdej pary trójek różnych punktów z_1, z_2, z_3 oraz w_1, w_2, w_3 z $\mathbb{P}$ istnieje dokładnie jedna homografia f taka, że $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.

Ćwiczenie Znaleźć odwzorowanie konforemne $\Delta \to \mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Pokazać, że $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{\dfrac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0\right\}$. Wywnioskować, że grupa $\operatorname{Aut}(\Delta)$ jest izomorficzna z grupą $SL(\mathbb{R}, 2)/\mathbb{Z}_2$.

Ćwiczenie Dla grupy G przez $\mathcal{I}_G := \{f \in G_* : f^2 = 1\}$ oznaczmy zbiór inwolucji G oraz zdefiniujmy

$$\mathcal{G}_G := \{f \in G : fg \neq gf \ \forall\, g \in \mathcal{I}_G\} \cup \{1\}.$$

Dowodząc poniższych stwierdzeń wykazać, że żadna para z z grup $\operatorname{Aut}(\Delta)$, $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ i $\operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ nie jest ze sobą izomorficzna (w sensie teorii grup).

i) W $\operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ istnieją przemienne inwolucje.

ii) $\mathcal{I}_{\operatorname{Aut}(\mathbb{C})} = \{-z + b : b \in \mathbb{C}\}$, $\mathcal{I}_{\operatorname{Aut}(\Delta)} = \left\{\dfrac{a - z}{1 - \bar{a}z} : a \in \Delta\right\}$, ani w $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ and w $\operatorname{Aut}(\Delta)$ nie istnieją przemienne inwolucje.

iii) $\mathcal{G}_{\operatorname{Aut}(\mathbb{C})} = \{z + b : b \in \mathbb{C}\}$ jest przemienną podgrupą $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$.

iv) $\mathcal{G}_{\operatorname{Aut}(\Delta)} = \{\mu\dfrac{z - b}{1 - \bar{b}z} : |\mu| = 1,\ b \in \Delta,\ |\mu - 1| \leq 2|b|\}$ zawiera elementy nieprzemienne (nie jest także podgrupą $\operatorname{Aut}(\Delta)$).

Wykład 16, 15.10.2007

Podstawowym rezultatem w teorii odwzorowań konforemnych jest następujące *twierdzenie Riemanna* (1851 - pierwsze precyzyjne dowody podali Koebe i Poincaré na początku XX w.).

Twierdzenie 20.6. *Każdy obszar jednospójny w $\mathbb{C}$, z wyjątkiem całej płaszczyzny, jest konforemny z dyskiem jednostkowym Δ.*

Dowód. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym takim, że $D \neq \mathbb{C}$. Jak wynika z Propozycji 10.5 oraz Twierdzenia 10.8, obszar D posiada następującą własność

$$\forall\, f \in \mathcal{O}_*(D)\ \exists\, g \in \mathcal{O}_*(D) : g^2 = f. \tag{20.1}$$

Zauważmy najpierw, że własność (20.1) jest niezmiennicza względem odwzorowań konforemnych. Założenie $D \neq \mathbb{C}$ oznacza, że znajdziemy $a \in \mathbb{C} \setminus D$, zaś dzięki (20.1) istnieje $g \in \mathcal{O}(D)$ takie, że $g(z)^2 = z - a$, $z \in D$. Wtedy $0 \notin g(D)$, funkcja g jest jednokrotna na D oraz, jeżeli $w \in g(D)$, to $-w \notin g(D)$. W szczególności, rozpatrując obszar $g(D)$ zamiast D, możemy założyć, że istnieje koło $K(z_0, r)$ takie, że $D \cap K(z_0, r) = \emptyset$. W takiej sytuacji, zamieniając D z obszarem $h(D)$, gdzie $h(z) = r/(z - z_0)$, możemy założyć, że $D \subset \Delta$. Wybierając dowolne $b \in D$ oraz obszar $T_b(D)$, bez straty ogólności dochodzimy do sytuacji, gdzie $0 \in D \subset \Delta$ (oraz oczywiście D spełnia (20.1)).

Rozpatrzmy następującą rodzinę

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(D, \Delta) : f(0) = 0,\ f \text{ jednokrotne}\}$$

oraz zdefiniujmy $\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$. Zauważmy, że $1 \le \alpha \le 1/\rho$, gdzie $\rho > 0$ jest takie, że $K(0, \rho) \subset D$ (pierwsza z nierówności wynika z tego, że $z \in \mathcal{F}$, druga jest konsekwencją nierówności Cauchy'ego).

Twierdzimy, że supremum jest osiągane, tzn. istnieje $f \in \mathcal{F}$ takie, że $|f'(0)| = \alpha$. Niech $f_n \in \mathcal{F}$ będą takie, że $|f_n'(0)| \to \alpha$. Z lematu Montela (Twierdzenie 6.5) wynika, że możemy założyć, że ciąg f_n jest lokalnie jednostajnie zbieżny w D do pewnej funkcji $f \in \mathcal{O}(D)$ (w przeciwnym razie rozpatrując podciąg). Z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym wnioskujemy, że $f(D) \subset \Delta$ (f nie może być stałą z $\partial\Delta$ np. bo $f(0) = 0$), zaś z Wniosku 14.5, że f jest jednokrotne, czyli $f \in \mathcal{F}$. Dzięki Twierdzeniu 6.4 mamy $|f'(0)| = \alpha$.

W celu zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $f(D) = \Delta$. Przypuśćmy, że tak nie jest - niech $c \in \Delta \setminus f(D)$. Wtedy funkcja $T_c \circ f \in \mathcal{F}$ nie ma zer w D, korzystając więc ponownie z (20.1) znajdziemy $\psi \in \mathcal{O}(D)$ takie, że $\psi^2 = T_c \circ f$. Odwzorowanie ψ jest jednokrotne, a stąd $\widetilde{f} := T_d \circ \psi \in \mathcal{F}$, gdzie $d := \psi(0)$. Oznaczając $s(w) := w^2$, mamy $f = F \circ \widetilde{f}$, gdzie $F = T_{-c} \circ s \circ T_{-d}$ jest odwzorowaniem holomorficznym $\Delta \to \Delta$ takim, że $F(0) = 0$. Ponieważ F nie jest jednokrotne, z lematu Schwarza wynika, że $|F'(0)| < 1$. A zatem $|\widetilde{f}'(0)| = |f'(0)/F'(0)| > \alpha$ - sprzeczność. $\square$

Zauważmy, że w dowodzie twierdzenia Riemanna korzystaliśmy tylko z własności (20.1), w szczególności otrzymaliśmy więc następujący rezultat.

Wniosek 20.7. *Warunki i)-v) w Twierdzeniu 10.8 są równoważne jednospójności obszaru* Ω. $\square$

21. Geometria hiperboliczna koła

Jak pokazał dowód twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym, bardzo przydatna jest wiedza o własnościach odwzorowań holomorficznych $\Delta \to \Delta$. Znając dokładny opis automorfizmów Δ, główną część lematu Schwarza możemy wypowiedzieć następująco: jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta)$ oraz $f(0) = 0$, to $|f'(0)| \le 1$ oraz $|f'(0)| = 1 \Leftrightarrow f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$. Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy nie zakładamy, że $f(0) = 0$. Wybierzmy dowolne $a \in \Delta$ i niech $b := f(a)$. Wtedy $\widetilde{f} := T_b \circ f \circ T_{-a}$ spełnia $\widetilde{f}(0) = 0$ oraz

$$\widetilde{f}'(0) = T_b'(b)\, f'(a)\, T_{-a}'(0) = \frac{f'(a)}{1 - |f(a)|^2}(1 - |a|^2).$$

Z lematu Schwarza wynika teraz, że $|\widetilde{f}'(0)| \le 1$ czyli, że

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \le \frac{1}{1 - |a|^2},$$

oraz że mamy równość (dla ustalonego $a \in \Delta$) wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$. Otrzymaliśmy więc następujące uogólnienie lematu Schwarza, tzw. *lemat Schwarza-Picka*.

Lemat 21.1. *Dla $f \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta)$ mamy*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \Delta, \tag{21.1}$$

oraz NWSR
i) w (21.1) równość zachodzi dla pewnego $z \in \Delta$;
ii) w (21.1) równość zachodzi dla wszystkich $z \in \Delta$;
iii) $f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$. □

Lemat Schwarza-Picka sugeruje wprowadzenie następującej metryki w Δ (tzw. metryki Poincarégo): jeżeli $\gamma : [a, b] \to \Delta$ jest drogą, to definiujemy

$$l^H(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} l^H(f \circ \gamma) &\le l^H(\gamma), \quad f \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta), \\ l^H(f \circ \gamma) &= l^H(\gamma), \quad f \in \operatorname{Aut}(\Delta). \end{aligned} \tag{21.2}$$

Kładziemy

$$\delta(z_1, z_2) := \inf\{l^H(\gamma) : \gamma[0,1] \to \Delta \text{ - droga}, \gamma(0) = z_1,\ \gamma(1) = z_2\}.$$

Propozycja 21.2. *δ jest metryką na Δ. Mamy także*

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \le \delta(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \Delta, \quad f \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta).$$

Automorfizmy Δ są izometriami δ.

Dowód. Symetryczność δ jest oczywista. Zauważmy, że $l^H(\gamma) \ge l(\gamma)$, skąd wynika, że $\delta(z_1, z_2) \ge |z_1 - z_2|$. Mamy więc także $\delta(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$. Nierówność trójkąta wynika łatwo z faktu, że jeżeli γ jest drogą łączącą z_1 i z_2, zaś $\widetilde{\gamma}$ drogą łączącą z_2 i z_3, to droga będąca sklejeniem dróg γ i $\widetilde{\gamma}$ łączy z_1 i z_3. Pozostałe tezy propozycji wynikają natychmiast z (21.2). □

Wyprowadzimy teraz dokładny wzór na δ. Zauważmy najpierw, że $\delta(z_1, z_2) = \delta(0, |T_{z_1}(z_2)|)$. Jeżeli $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [0, 1] \to \Delta$ jest drogą taką, że $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = b > 0$, to

$$\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt \ge \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{1-(\gamma_1(t))^2} dt = \int_0^b \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+b}{1-b} = \tanh^{-1} b.$$

Otrzymaliśmy zatem następujący wzór.

Propozycja 21.3. *Mamy*

$$\delta(z_1, z_2) = \tanh^{-1}\left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|, \quad z_1, z_2 \in \Delta. \tag{21.3}$$

W szczególności, metryka δ jest zupełna. $\square$

Dowód formuły (21.3) pokazuje także, że $\delta(0,z) = l^H([0,z])$, $z \in \Delta$, a stąd wynika, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \Delta$ infimum w definicji $\delta(z_1,z_2)$ jest osiągane. Takie drogi nazywamy geodezyjnymi metryki δ. Są więc nimi proste przechodzące przez 0 oraz ich obrazy przez automorfizmy Δ. Można pokazać **Ćwiczenie**, że jeżeli taka prosta nie przechodzi przez $1/\overline{a}$, to takim obrazem jest okrąg, w przeciwnym wypadku obrazem tym jest ta sama prosta. Ponieważ T_a jest odwzorowaniem konforemnym w $\mathbb{C}\setminus\{1/\overline{a}\}$, geodezyjnymi w metryce Poincarégo są dokładnie proste przechodzące przez zero oraz okręgi przecinające się z okręgiem jednostkowym pod kątem prostym.

Propozycja 21.4. *Odwzorowanie $f : \Delta \to \Delta$ jest izometrią δ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$ lub $\overline{f} \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$.*

Dowód. Jeżeli $f \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$ lub $\overline{f} \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$, to z (21.2) (i z tego, że $l^H(\gamma) = l^H(\overline{\gamma})$) wynika, że f jest izometrią. Załóżmy, że $f : \Delta \to \Delta$ jest izometrią δ. Rozpatrując odwzorowanie $f \circ g$ zamiast f, gdzie g jest pewnym automorfizmem Δ, bez straty ogólności możemy założyć, że $f(0) = 0$ oraz $f(x_0) > 0$ dla pewnego $x_0 > 0$. Dla $z \in \Delta$ z (21.3) dostaniemy więc $|f(z)| = |z|$ oraz, ponieważ

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{1 - 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_1|^2|z_2|^2},$$

mamy także

$$\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) = \mathrm{Re}\,(f(z_1)\overline{f(z_2)}).$$

Wnioskujemy, że $f(x_0) = x_0$ oraz, podstawiając $z_2 = x_0$, że $\mathrm{Re}\,f(z) = \mathrm{Re}\,z$, $z \in \Delta$, a więc $f(z) = z$ lub $f(z) = \overline{z}$ (dla ustalonego z). Podstawiając z kolei $z_2 = i/2$ otrzymamy $f(i/2) = \pm i/2$ oraz

$$\mathrm{Im}\,f(z) = \frac{f(i/2)}{i/2}\,\mathrm{Im}\,z, \quad z \in \Delta. \quad \square$$

22. Funkcje harmoniczne

Funkcję $h : \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$, nazywamy harmoniczną, jeżeli h jest klasy C^2 oraz

$$\Delta h := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Zbiór funkcji harmonicznych w Ω oznaczamy $\mathcal{H}(\Omega)$. Ponieważ $\Delta = 4\,\partial^2/\partial z\partial\overline{z}$ (**Ćwiczenie**), natychmiast z definicji wynikają podstawowe związki funkcji harmonicznych z holomorficznymi.

Propozycja 22.1. *i) $f \in \mathcal{O}(\Omega, \widetilde{\Omega})$, $h \in \mathcal{H}(\widetilde{\Omega}) \;\Rightarrow\; h \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$;*
ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega) \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\,f, \mathrm{Im}\,f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
iii) $f \in \mathcal{O}(\Omega), f \neq 0 \;\Rightarrow\; \log|f| \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\square$

Wykład 17, 22.10.2007

Rezultat odwrotny do ii) zachodzi w obszarach jednospójnych. Pokażemy nawet, że obszary jednospójne są w ten sposób charakteryzowane - otrzymamy siódmy warunek równoważny warunkom w Twierdzeniu 10.8 (szóstym była jednospójność - patrz Wniosek 20.7).

Twierdzenie 22.2. *Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ warunki i)-v) w Twierdzeniu 10.8 są równoważne następującemu*

vii) Dla każdego $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ istnieje $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $\operatorname{Re} f = u$.

Dowód. i)$\Rightarrow$vii) Zauważmy, że jeżeli $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$, to z równań Cauchy'ego-Riemanna mielibyśmy $f' = u_x + iv_x = u_x - iu_y$. Jeżeli teraz $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, to funkcja $g := u_x - iu_y$ jest holomorficzna (bo spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna), więc ma pierwotną $f = \widetilde{u} + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$. Mamy $g = f' = \widetilde{u}_x + iv_x = \widetilde{u}_x - i\widetilde{u}_y$, czyli $u_x = \widetilde{u}_x$, $u_y = \widetilde{u}_y$. Stąd $\widetilde{u} = u + const$ i możemy założyć, że $\widetilde{u} = u$.

vii)$\Rightarrow$ii) Jeżeli $f \in \mathcal{O}_*(\Omega)$, to $u := \log|f| \in \mathcal{H}(\Omega)$ i dzięki vii) znajdziemy $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ takie, że $\operatorname{Re} g = u$. Mamy wtedy $|e^g| = e^u = |f|$, skąd wynika, że $f = e^{it}e^g$ dla pewnej stałej $t \in \mathbb{R}$. $\Box$

Wniosek 22.3. *Funkcje harmoniczne są klasy C^∞.* $\Box$

Funkcje harmoniczne u, v nazywamy sprzężonymi, jeżeli $u + iv$ jest funkcją holomorficzną.

Ćwiczenie Niech u, v będą sprzężonymi funkcjami harmonicznymi w otoczeniu z_0 takimi, że $u(z_0) = v(z_0)$. Pokazać, że jeżeli zbiór $\{u = u(z_0)\}$ jest gładką krzywą w otoczeniu z_0, to jest nią również zbiór $\{u = u(z_0)\}$ oraz, że przecinają się one pod kątem prostym.

Przypuśćmy teraz, że h jest funkcją harmoniczną w otoczeniu koła $\overline{K}(z_0, r)$. Dzięki Twierdzeniu 22.2 znajdziemy funkcję holomorficzną f w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$ taką, że $h = \operatorname{Re} f$. Z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji holomorficznych mamy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

Biorąc części rzeczywiste dostaniemy twierdzenie o wartości średniej dla funkcji harmonicznych.

Twierdzenie 22.4. *Jeżeli h jest funkcją harmoniczną w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{it})dt. \quad \Box$$

Udowodnimy teraz zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych.

Twierdzenie 22.5. *Jeżeli $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ osiąga maksimum lokalne w obszarze Ω, to h jest stała.*

Dowód. Załóżmy, że h ma maksimum lokalne w z_0. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.3, korzystając z Twierdzenia 22.4, łatwo pokazujemy, że funkcja h jest stała na $\overline{K}(z_0, r)$ dla pewnego $r > 0$. Połóżmy $\Omega' := \operatorname{int}\{h = h(z_0)\}$. Zbiór Ω' jest więc niepusty, otwarty, trzeba jeszcze pokazać, że jest domknięty. Jeżeli

$\widetilde{z} \in \overline{\Omega'}$, to w kole $K(\widetilde{z}, \widetilde{r}) \subset \Omega$ mamy $h = \operatorname{Re} f$ dla pewnego $f \in \mathcal{O}(K(\widetilde{z}, \widetilde{r}))$. Ponieważ $\operatorname{Re} f$ jest stała w niepustym zbiorze otwartym $\Omega' \cap K(\widetilde{z}, r)$, to f jest również stała w pewnej (niepustej) składowej tego zbioru, a z zasady identyczności dla funkcji holomorficznych, także na całym $K(\widetilde{z}, \widetilde{r})$. Wnioskujemy, że $\widetilde{z} \in \Omega'$. $\square$

Korzystając z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych pokażemy teraz, że pierścienie w $\mathbb{C}$ są konforemne wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo izomorficzne. Pokazuje to, że odpowiednik twierdzenia Riemanna nie zachodzi dla obszarów wielospójnych, tzn. konforemność nie jest w tym wypadku równoważna homeomorficzności.

Twierdzenie 22.6. *Niech $z_j \in \mathbb{C}$, $0 \le r_j < R_j < \infty$, $j = 1, 2$. Pierścienie $P(z_1, r_1, R_1)$, $P(z_2, r_2, R_2)$ są konforemne wtedy i tylko, gdy $R_1/r_1 = R_2/r_2$.*

Dowód. Jest jasne, że jeżeli $R_1/r_1 = R_2/r_2$, to znajdziemy odwzorowanie liniowe pomiędzy tymi dwoma pierścieniami. Załóżmy więc, że f jest odwzorowaniem konforemnym między nimi. Korzystając z twierdzenia Riemanna o usuwaniu osobliwości bez straty ogólności możemy założyć, że $r_1 = r_2 = 1$ oraz $z_1 = z_2 = 0$ (**Ćwiczenie**). Niech r, ρ będą takie, że $1 < r < \sqrt{R_2} < \rho < R_2$. Zbiór $K := \{r \le |z| \le \rho\}$ jest zwarty w $P_2 := \{1 < |z| < R_2\}$, a więc $f^{-1}(K)$ jest zwarty w $P_1 := \{1 < |z| < R_1\}$. Znajdziemy $\varepsilon > 0$ takie, że $V \cap f^{-1}(K) = \emptyset$, gdzie $V := \{1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$. Zbiór $f(V)$ jest spójny, $f(V) \cap K = \emptyset$, a stąd wynika, że albo $f(V) \subset \{1 < |z| < r\}$ albo $f(V) \subset \{\rho < |z| < R_2\}$. Rozumując podobnie w pobliżu okręgu $\{|z| = R_1\}$ otrzymamy, że albo

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1, \qquad \lim_{|z| \to R_1} |f(z)| = R_2, \tag{22.1}$$

albo

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = R_2, \qquad \lim_{|z| \to R_1} |f(z)| = 1.$$

W drugim przypadku zamieniamy funkcję f z funkcją R_2/f, możemy więc założyć, że zachodzi pierwszy przypadek.

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja

$$h(z) := \log |f(z)| - \alpha \log |z|$$

jest harmoniczna w P_1, ciągła na $\overline{P}_1$ oraz $h = 0$ na $\{|z| = 1\}$. Jeżeli wybierzemy $\alpha := \log R_2 / \log R_1$, to wtedy także $h = 0$ na $\{|z| = R_1\}$. Z zasady maksimum (zastosowanej do funkcji h oraz $-h$) wynika więc, że $h = 0$ w P_1. Funkcja

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z},$$

gdzie $\arg z$ wybieramy z przedziału $(0, 2\pi)$, jest holomorficzna w obszarze $P_1 \setminus (0, \infty)$. W tym obszarze mamy $|f(z)/z^\alpha| = 1$, a więc $f(z) = \lambda z^\alpha$, gdzie $|\lambda| = 1$. Wynika stąd, że funkcję z^α możemy ciągle przedłużyć na P_1, a zatem $\alpha \in \mathbb{Z}$. Z (22.1) wnioskujemy, że $\alpha > 0$, natomiast z iniektywności f, że $\alpha = \pm 1$, a zatem $\alpha = 1$. $\square$

Chcemy teraz znaleźć odpowiednik wzoru Cauchy'ego dla funkcji harmonicznych, tj. wyrazić jej wartości wewnątrz koła przy pomocy wartości na brzegu. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $K(z_0, r) = \Delta$ i że funkcja h jest harmoniczna w otoczeniu $\overline{\Delta}$.

Dla $a \in \Delta$ funkcja $h \circ T_{-a}$ jest harmoniczna w otoczeniu $\overline{\Delta}$. Dzięki Twierdzeniu 22.4 mamy więc

$$h(a) = h(T_{-a}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(T_{-a}(e^{it}))\, dt.$$

Stosując podstawienie $e^{is} = T_{-a}(e^{it})$, tzn. $e^{it} = T_a(e^{is})$, otrzymamy

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T_a'(e^{is})}{T_a(e^{is})}\, e^{is} h(e^{is})\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{is} - a|^2} h(e^{is})\, ds.$$

Po podstawieniu $z = z_0 + ra$ otrzymamy następujący *wzór Poissona*.

Twierdzenie 22.7. *Jeżeli h jest funkcją harmoniczną w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$, to*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, h(z_0 + re^{it})\, dt, \qquad z \in K(z_0, r). \qquad \Box$$

Przy pomocy wzoru Poissona możemy teraz rozwiązać *problem Dirichleta* dla koła.

Twierdzenie 22.8 (na wykładzie w trochę słabszej wersji)**.** *Dla ustalonego koła $K(z_0, r)$ oraz $\varphi \in L^\infty(\partial K(z_0, r))$ połóżmy*

$$h(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, \varphi(z_0 + re^{it})\, dt, \qquad z \in K(z_0, r).$$

Wtedy $h \in \mathcal{H}(K(z_0, r))$ i dla każdego punktu $w \in \partial K(z_0, r)$, w którym φ jest ciągła mamy

$$\lim_{\substack{z \to w \\ z \in K(z_0, r)}} h(z) = \varphi(w). \tag{22.2}$$

W szczególności, dla każdego $\varphi \in C(\partial K(z_0, r))$ istnieje dokładnie jedna funkcja $h \in \mathcal{H}(K(z_0, r)) \cap C(\overline{K}(z_0, r))$ taka, że $h = \varphi$ na $\partial K(z_0, r)$.

Dowód. Jednoznaczność wynika łatwo z zasady maksimum zastosowanej dla różnicy dwóch rozwiązań. Zauważmy, że

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \qquad \zeta, z \in \mathbb{C},\ \zeta \neq z,$$

skąd wynika, że jądro Poissona

$$\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}$$

jest funkcją harmoniczną względem z. Stąd łatwo wnioskujemy, że h jest funkcją harmoniczną w $K(z_0, r)$.

Dla $z \in K(z_0, r)$ i ustalonego $w \in \partial K(z_0, r)$ mamy (korzystamy z Twierdzenia 22.7 dla $h \equiv 1$)

$$h(z) - \varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2} \big(\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)\big)\, dt.$$

Ustalmy teraz $\varepsilon > 0$. Znajdziemy $\delta > 0$ takie, że $|\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)| \le \varepsilon$, gdy $|z_0 + re^{it} - w| \le \delta$. Możemy teraz podzielić przedział $[0, 2\pi]$ na dwa rozłączne podzbiory A i B takie, że $|\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)| \le \varepsilon$, gdy $t \in A$, oraz $|z_0 + re^{it} - w| \ge \delta$, gdy $t \in B$. Dla $z \in \partial K(z_0, r)$ odp. bliskiego w mamy wtedy

$$\begin{aligned} |h(z) - \varphi(w)| &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2} \big|\big(\varphi(z_0 + re^{it}) - \varphi(w)\big)\big|\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_A + \int_B \right) \\ &\le \varepsilon + 2M \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{(\delta - |z - w|)^2}, \end{aligned}$$

gdzie $M := \max_{\partial K(z_0, r)} |\varphi|$. Stąd otrzymamy (22.2). $\square$

Uwaga. Zauważmy, że dowód istnienia rozwiązania w Twierdzeniu 22.8 daje inny dowód Twierdzenia 22.7 (poza przypadkiem $h \equiv 1$, który możemy sprawdzić bezpośrednio), bez korzystania z funkcji holomorficznych (to, że jądro Poissona jest funkcją harmoniczną względem z można oczywiście także sprawdzić bezpośrednio). Metodę dowodu Twierdzenia 22.8, w przeciwieństwie do poprzedniego dowodu Twierdzenia 22.7, można zastosować także w wyższym wymiarze.

Wykład 18, 29.10.2007

Wykażemy teraz pewne własności ciągów funkcji harmonicznych. Pierwszą jest odpowiednik twierdzenia Weierstrassa dla funkcji holomorficznych.

Propozycja 22.9. *Jeżeli ciąg $h_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie do h, to $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Co więcej, $D^\alpha h_n \to D^\alpha h$ lokalnie jednostajnie dla dowolnego wielowskaźnika α.*

Dowód. Problem jest czysto lokalny. Zamieniając h_n z $h_n + a_n$ (na pewnym relatywnie zwartym podzbiorze Ω), gdzie a_n jest odp. ciągiem stałych zbieżnym do 0, bez straty ogólności możemy założyć, że h_n jest ciągiem rosnącym. Niech $\overline{K}(z_0, r)$ będzie kołem w Ω i niech $\widetilde{h} \in \mathcal{H}(K(z_0, r)) \cap C(\overline{K}(z_0, r))$ będzie taka, że $\widetilde{h} = h$ na $\partial K(z_0, r)$. Z zasady maksimum na $\overline{K}(z_0, r)$ dla każdego n mamy

$$0 \le \widetilde{h} - h_n \le \max_{\partial K(z_0, r)} (h - h_n),$$

a zatem h_n dąży jednostajnie do $\widetilde{h}$ w $K(z_0, r)$. Druga część wynika teraz z Twierdzenia 22.7 (bo możemy różniczkować pod znakiem całki). $\square$

Dla funkcji harmonicznych mamy odpowiednik twierdzenia Montela.

Twierdzenie 22.10. *Z każdego lokalnie jednostajnie ograniczonego ciągu funkcji harmonicznych na obszarze w $\mathbb{C}$ możemy wybrać podciąg zbieżny lokalnie jednostajnie.*

Dowód. Dla jądra Poissona w $\overline{K}(z_0,r)\subset\Omega$ mamy

$$\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z-z_0-re^{it}|^2}-1=\mathrm{Re}\,\frac{re^{it}+z-z_0}{re^{it}-(z-z_0)}-1=2\mathrm{Re}\,\frac{z-z_0}{re^{it}-(z-z_0)}.$$

Stąd, jeżeli $h\in\mathcal{H}(\Omega)$, $|h|\le M$ w $\overline{K}(z_0,r)$ i $|z-z_0|\le r/2$, to

$$|h(z)-h(z_0)|\le\frac{4M}{r}|z-z_0|,$$

a zatem taka rodzina jest równociągła i wystarczy skorzystać z twierdzenia Arzeli-Ascoliego. □

Następny rezultat jest nazywany *twierdzeniem Harnacka* (1887).

Twierdzenie 22.11. *Załóżmy, że h_n jest rosnącym ciągiem funkcji harmonicznych określonych na obszarze Ω w $\mathbb{C}$. Wtedy albo $\lim h_n=\infty$ albo ciąg h_n jest zbieżny lokalnie jednostajnie w Ω.*

Podstawowym narzędziem w dowodzie tego twierdzenia jest *nierówność Harnacka*, którą sformułujemy osobno.

Twierdzenie 22.12. *Załóżmy, że $h\in\mathcal{H}(K(0,R))$, $h\ge 0$. Wtedy*

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}h(0)\le h(z)\le\frac{R+|z|}{R-|z|}h(0),\quad z\in K(0,R).$$

Dowód. Niech $|z|<\rho<R$. Ze wzoru Poissona mamy

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-|z|^2}{|\rho e^{it}-z|^2}h(\rho e^{it})dt.$$

Mamy także

$$\frac{\rho-|z|}{\rho+|z|}\le\frac{\rho^2-|z|^2}{|\rho e^{it}-z|^2}\le\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}.$$

Teraz wystarczy, korzystając z tego, że $h\ge 0$, przejść z ρ do R. □

Dowód Twierdzenia 22.11. Zamieniając funkcje h_n z h_n-h_1, bez straty ogólności możemy założyć, że $h_n\ge 0$. Załóżmy, że $K(z_0,R)$ jest kołem w Ω i $0<r<R$. Z nierówności Harnacka mamy

$$\frac{R-r}{R+r}h_n(z_0)\le h_n(z)\le\frac{R+r}{R-r}h_n(z_0),\quad z\in\overline{K}(z_0,r),$$

a stąd

$$\frac{R-r}{R+r}h(z_0)\le h(z)\le\frac{R+r}{R-r}h(z_0),\quad z\in\overline{K}(z_0,r),\tag{22.3}$$

gdzie $h:=\lim h_n$. Z (22.3) wynika, że zbiory $A:=\{h<\infty\}$ oraz $B:=\{h=\infty\}$ są otwarte, a więc albo $A=\Omega$ albo $B=\Omega$. W pierwszym przypadku z (22.3) wnioskujemy, że h jest funkcją ciągłą, a więc z twierdzenia Diniego mamy lokalnie jednostajną zbieżność. □

23. Funkcje subharmoniczne

Funkcję $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$, nazywamy subharmoniczną, jeżeli jest ona półciągła z góry, na każdej składowej Ω mamy $u \not\equiv -\infty$, oraz dla dowolnego obszaru $D \Subset \Omega$ i $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ takiej, że $u \le h$ na ∂D, mamy $u \le h$ w D. Zbiór funkcji subharmonicznych na Ω oznaczamy $\mathcal{SH}(\Omega)$.

Twierdzenie 23.1. *Niech u będzie funkcją subharmoniczną w otoczeniu $\overline{K}(z_0, r)$. Wtedy*

$$u(z) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, u(z_0 + re^{it})\, dt, \quad z \in K(z_0, r).$$

Dowód. Niech φ_n będzie ciągiem funkcji ciągłych malejącym do u na $\partial K(z_0, r)$. Dzięki Twierdzeniu 22.8 znajdziemy $h_n \in \mathcal{H}(K(z_0, r)) \cap C(\overline{K}(z_0, r))$ takie, że $h_n = \varphi_n$ na $\partial K(z_0, r)$. Z definicji mamy wtedy

$$u(z) \le h_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, \varphi_n(z_0 + re^{it})\, dt, \quad z \in K(z_0, r),$$

i wystarczy przejść z n do ∞. □

Twierdzenie 23.2. *Załóżmy, że u jest funkcją półciągłą z góry na obszarze Ω taką, że $u \not\equiv -\infty$. Wtedy u jest subharmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $z_0 \in \Omega$ istnieje $r_0 > 0$ takie, że $\overline{K}(z_0, r_0) \subset \Omega$ oraz*

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt, \quad 0 < r \le r_0. \tag{23.1}$$

W szczególności, subharmoniczność jest własnością lokalną.

Dowód. Konieczność wynika z Twierdzenia 23.1. Dla wykazania dostateczności weźmy $D \Subset \Omega$ i $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ takie, że $u \le h$ na ∂D. Jeżeli $\{u > h\} \ne \emptyset$, to $u - h$ osiąga maksimum w pewnym $z_0 \in D$ (korzystamy z półciągłości u). Z (23.1), rozumując podobnie jak w dowodzie zasady maksimum dla funkcji holomorficznych i harmonicznych, wnioskujemy, że zbiór $\{u - h = u(z_0) - h(z_0)\}$ jest otwarty i niepusty. Z własności funkcji półciągłych z góry wynika, że jest on również domknięty (bo jest postaci $\{u - h \ge const\}$), a więc $u - h = const > 0$ w D - sprzeczność z warunkiem brzegowym. □

Twierdzenie 23.1 oraz dowód Twierdzenia 23.2 implikują w szczególności zasadę maksimum dla funkcji subharmonicznych.

Twierdzenie 23.3. *Jeżeli $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ osiąga maksimum w obszarze Ω, to u jest stała.* □

Przykład. Z Twierdzenia 23.2 i z tego, że $\log|z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_*)$ łatwo wnioskujemy, że $\max\{\log|z|, 0\} \in \mathcal{SH}(\mathbb{C})$. Widzimy więc, że istnienie maksimum lokalnego nie implikuje tego, że funkcja subharmoniczna jest stała.

Jeżeli u jest funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}$, to kładziemy

$$u^*(z) := \limsup_{\zeta \to z} u(\zeta), \quad u_*(z) := \liminf_{\zeta \to z} u(\zeta), \quad z \in \overline{\Omega}.$$

Wtedy u^* i u_*, określone w $\overline{\Omega}$, są odpowiednio najmniejszą funkcją półciągłą z góry $\geq u$ w Ω oraz największą funkcją półciągłą z dołu $\leq u$ w Ω.

Udowodnimy teraz inne podstawowe własności funkcji subharmonicznych.

Twierdzenie 23.4. *i)* $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{SH}(\Omega)$*;*

ii) $u, v \in \mathcal{SH}(\Omega),\ \alpha \geq 0 \ \Rightarrow\ \max\{u, v\},\ u + v,\ \alpha u \in \mathcal{SH}(\Omega)$*;*

iii) Jeżeli $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$*, zaś* χ *jest funkcją rosnącą i wypukłą określoną na przedziale zawierającym obraz* u*, to* $\chi \circ u \in \mathcal{SH}(\Omega)$*;*

iv) $f \in \mathcal{O}(\Omega), f \not\equiv 0, \alpha \geq 0 \ \Rightarrow\ \log|f|, |f|^\alpha \in \mathcal{SH}(\Omega)$*;*

v) Jeżeli $u_n \in \mathcal{SH}(\Omega)$ *jest ciągiem malejącym do pewnego* $u \not\equiv -\infty$*, to* $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$*;*

vi) Dla niepustej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{SH}(\Omega)$*, lokalnie jednostajnie ograniczonej z góry, mamy* $(\sup \mathcal{F})^* \in \mathcal{SH}(\Omega)$*;*

vii) Jeżeli $u, -u \in \mathcal{SH}(\Omega)$*, to* $u \in \mathcal{H}(\Omega)$*;*

viii) Jeżeli $u \in C^2(\Omega)$*, to* $u \in \mathcal{SH}(\Omega) \Leftrightarrow \Delta u \geq 0$*.*

Dowód. i) Wynika wprost z definicji oraz zasady maksimum dla funkcji harmonicznych.

ii) Korzystamy z Twierdzenia 23.2.

iii) Funkcja $\chi \circ u$ jest półciągła z góry. Dla koła $\overline{K}(z_0, r)$ w Ω mamy

$$\chi(u(z_0)) \leq \chi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(u(z_0 + re^{it}))dt,$$

przy czym pierwsza nierówność wynika z tego, że χ jest rosnąca (i z subharmoniczności u), natomiast druga z wypukłości χ (i nierówności Jensena).

iv) Funkcja $\log|f|$ jest harmoniczna na zbiorze $\{f \neq 0\}$ i równa $-\infty$, gdy $f = 0$, wystarczy więc skorzystać z Twierdzenia 23.2. Mamy także $|f|^\alpha = \chi(\log|f|)$, gdzie $\chi(t) = e^{\alpha t}$ jest rosnąca i wypukła.

v) Wynika natychmiast z Twierdzenia 23.2.

vi) Dla koła $\overline{K}(z_0, r)$ w Ω korzystając z Twierdzenia 23.1 dostaniemy

$$v(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, v(z_0 + re^{it})\, dt, \quad v \in \mathcal{F}.$$

Połóżmy $u := \sup \mathcal{F}$. Otrzymamy stąd

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z - z_0 - re^{it}|^2}\, u(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Z lematu Fatou mamy teraz

$$u^*(z_0) = \limsup_{z \to z_0} u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(z_0 + re^{it})\, dt.$$

vii) Funkcja u jest w szczególności ciągła. Dla koła $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$ niech $h \in \mathcal{H}(K(z_0, r)) \cap C(\overline{K}(z_0, r))$ będzie taka, że $h = u$ na $\partial K(z_0, r)$. Dostaniemy $u \leq h$ oraz $-u \leq -h$.

viii) $\Rightarrow$ Przypuśćmy, że $\Delta u < 0$ w $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$. Niech h będzie jak wyżej. Jeżeli $u = h$ w $\overline{K}(z_0, r)$, to otrzymamy sprzeczność, w przeciwnym wypadku znajdziemy

$\widetilde{z} \in K(z_0, r)$, gdzie $u - h$ osiąga minimum. Wtedy $0 \le \Delta(u-h)(\widetilde{z}) = \Delta u(\widetilde{z})$ - sprzeczność.

$\Leftarrow$ Załóżmy najpierw, że $\Delta u > 0$ i niech $D \Subset \Omega$, $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ będzie takie, że $u \le h$ na ∂D. Jeżeli $\{u > h\} \ne \emptyset$, to znajdziemy $\widetilde{z} \in D$ gdzie $u - h$ ma maksimum. Wtedy $0 \ge \Delta(u-h)(\widetilde{z}) = \Delta u(\widetilde{z})$ - sprzeczność. Pokazaliśmy, że $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$, jeżeli $\Delta u > 0$. W ogólnym przypadku wystarczy rozważyć funkcje $u_\varepsilon(z) := u(z) + \varepsilon|z|^2$, $\varepsilon > 0$, (wtedy $\Delta u_\varepsilon > 0$) i skorzystać z v). $\square$

Ćwiczenie Niech f będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu pierścienia $\{r \le |z| \le R\}$ taką, że $|f| \le m$, gdy $|z| = r$ oraz $|f| \le M$, gdy $|z| = R$. Pokazać, że $|f(z)| \le m(|z|/r)^{\frac{\log(M/m)}{\log(R/r)}}$ (porównać z ćwiczeniem przed Twierdzeniem 6.4).

Ćwiczenie Pokazać, że jeżeli $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ i $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$, to

$$u(z_0) \le \frac{1}{\lambda(K(z_0,r))} \int_{K(z_0,r)} u \, d\lambda.$$

Wywnioskować stąd, że funkcje subharmoniczne są lokalnie całkowalne.

Ćwiczenie Udowodnić, że dla $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ regularyzacje u_ε są funkcjami subharmonicznymi w Ω_ε oraz że $u_\varepsilon \downarrow u$, gdy $\varepsilon \downarrow 0$.

Zauważmy, że jeżeli u jest funkcją subharmoniczną w otoczeniu w, to

$$\limsup_{\substack{z \to w \\ z \ne w}} u(z) = u(w) \tag{23.2}$$

($\le$ wynika z półciągłości z góry, natomiast $\ge$ z (23.1)). Dla funkcji subharmonicznych mamy odpowiednik twierdzenia Riemanna o usuwaniu osobliwości.

Wykład 19, 5.11.2007

Twierdzenie 23.5. *Załóżmy, że $u \in \mathcal{SH}(\Omega \setminus \{w\})$ jest funkcją ograniczoną z góry w pobliżu w. Wtedy u można jednoznacznie przedłużyć do funkcji subharmonicznej na Ω.*

Dowód. Problem jest czysto lokalny. Jednoznaczność wynika z (23.2). Dla z w pobliżu w położmy

$$u_n(z) := \begin{cases} u(z) + \frac{1}{n}\log|z-w|, & z \ne w, \\ -\infty, & z = w. \end{cases}$$

Dzięki temu, że u jest ograniczona z góry, funkcje u_n są subharmoniczne w otoczeniu w (niezależnym od n), a stąd $\widetilde{u} := (\sup_n u_n)^*$ jest subharmoniczna w otoczeniu w. Mamy oczywiście także $u = \widetilde{u}$ poza w. $\square$

Przy pomocy tego twierdzenia możemy np. udowodnić następujący rezultat.

Twierdzenie 23.6. *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega, \widetilde{\Omega})$, $f \ne const$ i $u \in \mathcal{SH}(\widetilde{\Omega})$, to $u \circ f \in \mathcal{SH}(\Omega)$.*

Dowód. Funkcja $u \circ f$ jest półciągła z góry. Co więcej, z otwartości f i (23.2) mamy

$$\limsup_{z \to w} u(f(z)) = u(f(w)). \tag{23.3}$$

Istnieje dyskretny podzbiór $A \subset \Omega$ taki, że f jest odwzorowaniem lokalnie konforemnym w $\Omega \setminus A$, a stąd i z definicji łatwo pokazujemy, że $u \circ f$ jest (lokalnie) subharmoniczna w $\Omega \setminus A$. Z Twierdzenia 23.5 otrzymamy, że przedłuża się ona do funkcji subharmonicznej v na Ω, z (23.3) wnioskujemy, że $v = u \circ f$. $\square$

24. Nakrycia

Obecna część ma charakter czysto topologiczny. O wszystkich występujących niżej przestrzeniach topologicznych X, Y, Z zakładamy, że są spójne, lokalnie łukowo spójne (a więc są także łukowo spójne) oraz, że spełniają warunek Hausdorffa. Odwzorowanie $p : Y \to X$ nazywamy nakryciem, jeżeli przestrzeń X możemy pokryć zbiorami otwartymi $U \subset X$ takimi, że dla każdego takiego U istnieje rodzina otwartych zbiorów rozłącznych $V_\iota \subset Y$ taka, że $p^{-1}(U) = \bigcup_\iota V_\iota$ oraz dla każdego ι odwzorowanie $p|_{V_\iota} \to U$ jest homeomorfizmem. Przestrzeń Y nazywamy przestrzenią nakrywającą. Zbiory U o tej własności nazywamy prawidłowymi, natomiast V_ι płatami nad U. Każde nakrycie jest zatem w szczególności surjekcją oraz lokalnym homeomorfizmem.

Przykłady. i) Dla $n \in \mathbb{N}$ odwzorowanie $z \mapsto z^n$ jest nakryciem $\mathbb{C}_*$ na siebie oraz $\partial\Delta$ na siebie.

ii) exp jest nakryciem $\mathbb{R}$ na okrąg $\partial\Delta$, $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C}_*$ oraz pasa $\{\log r < \operatorname{Re} z < \log R\}$ na pierścień $\{r < |w| < R\}$. Ponieważ pas jest konforemny z dyskiem, możemy łatwo skonstruować nakrycie dysku na pierścień.

Twierdzenie 24.1. *Załóżmy, że $p : Y \to X$ jest nakryciem, natomiast odwzorowanie $f : Z \to X$ jest ciągłe, przy czym Z jest przestrzenią jednospójną. Wtedy dla ustalonych $y_0 \in Y$ i $z_0 \in Z$ takich, że $p(y_0) = f(z_0)$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe $\widetilde{f} : Z \to Y$ takie, że $p \circ \widetilde{f} = f$ oraz $\widetilde{f}(z_0) = y_0$. Takie $\widetilde{f}$ nazywamy podniesieniem f.*

Dowód. Jednoznaczność: Załóżmy, że $\widetilde{f}$ spełnia tezę i wybierzmy dowolne $z \in Z$. Pokażemy, że $\widetilde{f}$ jest jednoznacznie wyznaczone w pewnym otoczeniu z. Niech U będzie prawidłowym otoczeniem $f(z)$, zaś V płatem nad U takim, że $\widetilde{f}(z) \in V$. Z ciągłości $\widetilde{f}$ znajdziemy $W \subset Z$, otoczenie z takie, że $\widetilde{f}(W) \subset V$. Wtedy $\widetilde{f} = (p|_V)^{-1} \circ f$ na W. Stąd, jeżeli $\widetilde{f}$, $\widehat{f}$ są funkcjami spełniającymi tezę, to zbiór $\{\widetilde{f} = \widehat{f}\}$ jest otwarty. Ponieważ jest on również niepusty (zawiera z_0), domknięty (dzięki temu, że Y spełnia warunek Hausdorffa), zaś Z jest przestrzenią spójną, dostaniemy, że $\widetilde{f} = \widehat{f}$ na Z.

Istnienie: I) $Z = [0,1] =: I$, $z_0 = 0$. Znajdziemy podział przedziału I: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ taki, że dla każdego $j = 1, \dots, n$ zbiór $f([t_{j-1}, t_j])$ jest zawarty w pewnym prawidłowym zbiorze otwartym $U_j \subset X$. Niech V_1 będzie płatem nad U_1 zawierającym y_0. Na $[t_0, t_1]$ definiujemy $\widetilde{f} := (p|_{V_1})^{-1} \circ f$. Niech z kolei V_2 będzie płatem nad U_2 zawierającym $\widetilde{f}(t_1)$, wtedy na $[t_1, t_2]$ kładziemy $\widetilde{f} := (p|_{V_2})^{-1} \circ f$. Postępując tak n razy otrzymamy szukane $\widetilde{f}$.

II) $Z = I^2$, $z_0 = (0,0)$. Postępujemy podobnie jak w I). Znajdziemy podziały $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ oraz otwarte zbiory prawidłowe $U_{jk} \subset X$ takie, że $f([s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k]) \subset U_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$. Niech V_{11} będzie płatem nad U_{11} zawierającym y_0. Na $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$ definiujemy $\widetilde{f} := (p|_{V_{11}})^{-1} \circ$

f. Płat V_{12} nad U_{12} wybieramy tak, że $\widetilde{f}(s_0, t_1) \in V_{12}$, wtedy z jednoznaczności podniesienia mamy $\widetilde{f} = (p|_{V_{12}})^{-1} \circ f$ na $[s_0, s_1] \times \{t_1\}$, w szczególności $\widetilde{f}(s, t_1) \in V_{12}$ dla $s \in [s_0, s_1]$. Jeżeli więc na $[s_0, s_1] \times [t_1, t_2]$ położymy $\widetilde{f} := (p|_{V_{12}})^{-1} \circ f$, to definicja ta jest zgodna z poprzednią na $[s_0, s_1] \times \{t_1\}$. Postępując w ten sposób n^2 razy wyczerpiemy I^2.

III) Z dowolne. Dla $z \in Z$ niech $\gamma, \gamma_1 : I \to Z$ będą krzywymi takimi, że $\gamma(0) = \gamma_1(0) = z_0, \gamma(1) = \gamma_1(1) = z$. Dzięki I) istnieje jednoznacznie wyznaczona krzywa $\widetilde{\gamma} : I \to Y$ taka, że $p \circ \widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ i $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$. Podobnie definiujemy $\widetilde{\gamma}_1$. Twierdzimy, że $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$. Dzięki temu, że Z jest jednospójna istnieje ciągłe odwzorowanie $F : I^2 \to Z$ takie, że $F(0, \cdot) = \gamma$, $F(1, \cdot) = \gamma_1$, $F(s, 0) = z_0$, $F(s, 1) = z$ dla $s \in I$. Dzięki II) znajdziemy ciągłe $\widetilde{F} : I^2 \to Y$ takie, że $p \circ \widetilde{F} = f \circ F$ oraz $\widetilde{F}(0, 0) = y_0$. Z jednoznaczności podniesienia krzywych mamy $\widetilde{F}(0, \cdot) = \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{F}(1, \cdot) = \widetilde{\gamma}_1$ oraz $\widetilde{F}(s, 0) = y_0$, $s \in I$. Dla $s \in I$ mamy $p(\widetilde{F}(s, 1)) = f(F(s, 1)) = f(z)$. Ponieważ zbiór $p^{-1}(f(z))$ jest dyskretny (z własności nakrycia), zaś $\widetilde{F}(I \times \{1\})$ spójny, wnioskujemy, że zbiór $\widetilde{F}(I \times \{1\})$ jest jednopunktowy. W szczególności $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$, a więc odwzorowanie $\widetilde{f}(z) := \widetilde{\gamma}(1)$ jest dobrze zdefiniowane.

Musimy jeszcze pokazać, że $\widetilde{f}$ jest ciągłe. Niech V będzie łukowo spójnym otoczeniem $\widetilde{f}(z)$ takim, że $U := p(V)$ jest prawidłowym otoczeniem $f(z)$. Z ciągłości f znajdziemy łukowo spójne otoczenie W punktu z w Z takie, że $f(W) \subset U$. Wystarczy pokazać, że $\widetilde{f}(W) \subset V$. Dla $z' \in W$ niech $\beta : I \to W$ będzie krzywą taką, że $\beta(0) = z$, $\beta(1) = z'$. Wtedy $\widetilde{\beta} := (p|V)^{-1} \circ f \circ \beta$ jest podniesieniem β, a zatem $\widetilde{f}(z') = \widetilde{\beta}(1) = (p|_V)^{-1}(f(z')) \in V$. $\square$

Z Twierdzenia 24.1 (oraz części III) dowodu) dostaniemy w szczególności *twierdzenie o podnoszeniu krzywej*.

Twierdzenie 24.2. *Niech $p : Y \to X$ będzie nakryciem. Przypuśćmy, że γ jest krzywą w X o początku w x_0. Wtedy, dla ustalonego $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, istnieje jednoznacznie wyznaczona krzywa $\widetilde{\gamma}$ w Y o początku w y_0 taka, że $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Co więcej, jeżeli γ_1 jest krzywą w X homotopijnie równoważną z γ, końce podniesień $\widetilde{\gamma}$ oraz $\widetilde{\gamma}_1$ są takie same.* $\square$

Druga część Twierdzenia 24.2 nosi nazwę *twierdzenia o monodromii*. Z Twierdzenia 24.1 wynika także, że jednospójna przestrzeń nakrywająca jest wyznaczona jednoznacznie (z dokładnością do homeomorfizmu).

Twierdzenie 24.3. *Załóżmy, że odwzorowania $p : Y \to X$, $q : Z \to X$ są nakryciami. Jeżeli przestrzenie Y, Z są jednospójne, to są one homeomorficzne.*

Dowód. Ustalmy $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ takie, że $p(y_0) = q(z_0)$. Dzięki Twierdzeniu 2.1 znajdziemy odwzorowania ciągłe $\widetilde{q} : Z \to Y$ i $\widetilde{p} : Y \to Z$ takie, że $p \circ \widetilde{q} = q$, $\widetilde{q}(z_0) = y_0$, $q \circ \widetilde{p} = p$, $\widetilde{p}(y_0) = z_0$. Wtedy $p \circ \widetilde{q} \circ \widetilde{p} = p$, $\widetilde{q}(\widetilde{p}(y_0)) = y_0$, $q \circ \widetilde{p} \circ \widetilde{q} = q$, $\widetilde{p}(\widetilde{q}(z_0)) = z_0$. Z jednoznaczności podniesień otrzymamy $\widetilde{q} \circ \widetilde{p} = id_Y$, $\widetilde{p} \circ \widetilde{q} = id_Z$. $\square$

Twierdzenie 24.4. *Niech X będzie lokalnie jednospójna. Wtedy istnieje jednospójna przestrzeń nakrywająca Y.*

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$. Dla $x \in X$ przez Γ_x oznaczmy zbiór wszystkich krzywych $\gamma : I \to X$ łączących x_0 z x. Dla $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_x$ piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$, jeżeli krzywe γ_0, γ_1 są homotopijne. Wtedy $\sim$ jest relacją równoważności na Γ_x, oznaczmy $p_x := \Gamma_x / \sim$. Definiujemy

$$Y := \{(x, [\gamma]) : x \in X, \gamma \in \Gamma_x\}$$

oraz
$$p : Y \ni (x, [\gamma]) \longmapsto x \in X.$$

Na Y wprowadzamy topologię w następujący sposób: dla $(x, [\gamma]) \in Y$ oraz jednospójnego otoczenia U punktu x w X rozważamy zbiory postaci

$$V_{U,[\gamma]} := \{(x', [\gamma * \beta]) : x' \in U\},$$

gdzie $\beta : I \to U$ jest dowolną krzywą łączącą x z x' oraz

$$(\gamma * \beta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t-1), & t \in [1/2, 1] \end{cases} \in \Gamma_{x'}.$$

Zauważmy, że $[\gamma * \beta]$ nie zależy od wyboru β, a tylko od x' (bo U jest jednospójny). Zauważmy także, że
$$p^{-1}(U) = \bigcup_{[\gamma]\in p_x} V_{U,[\gamma]}$$

i że zbiory $V_{U,[\gamma]}$ są rozłączne dla $[\gamma] \in p_x$. Z powyższych własności natychmiast wynika, że zbiory $V_{U,[\gamma]}$ tworzą bazę otoczeń $(x, [\gamma])$ i że p jest nakryciem.

Musimy jeszcze pokazać, że przestrzeń Y jest jednospójna. Niech $\widetilde{\alpha} : I \to Y$ będzie krzywą zamkniętą taką, że $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\alpha}(1) = (x, [\gamma])$. Wtedy $\alpha := p \circ \widetilde{\alpha}$ jest krzywą zamkniętą w X taką, że $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Dla $s, t \in I$ zdefiniujmy $\alpha_t(s) := \alpha(st)$ oraz
$$\widehat{\alpha}(t) := (\alpha(t), [\gamma * \alpha_t]).$$

Wtedy $\widehat{\alpha}$ jest krzywą w Y taką, że $p \circ \widehat{\alpha} = \alpha$, $\widehat{\alpha}(0) = (x, [\gamma])$, więc dzięki temu, że p jest nakryciem i z jednoznaczności podniesienia dostaniemy $\widehat{\alpha} = \widetilde{\alpha}$. Dla $t = 1$ mamy w szczególności $[\gamma] = [\gamma * \alpha]$, a więc krzywa α jest ściągalna do punktu x w X, tzn. znajdziemy ciągłe odwzorowanie $F : I^2 \to X$ takie, że $F(0, \cdot) = \alpha$, $F(1, t) = F(s, 0) = F(s, 1) = x$ dla $s, t \in I$. Z Twierdzenia 2.1 mamy podniesienie $\widetilde{F} : I^2 \to Y$ takie, że $p \circ \widetilde{F} = F$ oraz $\widetilde{F}(0, 0) = (x, [\gamma])$. Z jednoznaczności podniesienia krzywych otrzymamy $\widetilde{F}(0, \cdot) = \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{F}(1, t) = \widetilde{F}(s, 0) = \widetilde{F}(s, 1) = (x, [\gamma])$, a więc krzywa $\widetilde{\alpha}$ jest ściągalna do $(x, [\gamma])$. □

Wykład 20, 12.11.2007

Od teraz o przestrzeni X zakładamy dodatkowo, że jest lokalnie jednospójna. Dzięki Twierdzeniom 24.3 i 24.4 istnieje jedyne (z dokładnością do homeomorfizmu) nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$, gdzie $\widetilde{X}$ jest jednospójna. Takie nakrycie nazywamy uniwersalnym. Homeomorfizm $g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ nazywamy homeomorfizmem nakrycia p, jeżeli $p \circ g = p$. Ich zbiór oznaczamy Γ_X, jest oczywiste, że jest to grupa. Nazywamy ją grupą nakrycia p.

Przy powyższych oznaczeniach mamy następujące dwa rezultaty opisujące Γ_X.

Propozycja 24.5. *i)* $X \simeq \widetilde{X}/\Gamma_X$;

ii) Γ_X *nie ma punktów stałych, tzn. jeżeli* $g \in \Gamma_X$ *ma punkt stały, to* $g = id$;

iii) Γ_X *działa dyskretnie na* $\widetilde{X}$, *tzn. dla* $K \Subset \widetilde{X}$ *zbiór* $\{g \in \Gamma_X : K \cap g(K) \neq \emptyset\}$ *jest skończony.*

Dowód. i) Połóżmy
$$F : \widetilde{X}/\Gamma_X \ni [y] \longmapsto p(y) \in X.$$
Z definicji Γ_X wynika, że F jest dobrze określone. Jeżeli $F([y_1]) = F([y_2])$ tzn. $p(y_1) = p(y_2)$, to dzięki Twierdzeniu 24.1 znajdziemy ciągłe $g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ takie, że $g(y_1) = y_2$ i $p \circ g = p$, a także ciągłe $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ takie, że $f(y_2) = y_1$ i $p \circ f = p$. Z jednoznaczności podniesienia $g \circ f = f \circ g = id$, a więc $g \in \Gamma_X$. Pokazaliśmy więc, że F jest iniektywne, natomiast surjekcja jest oczywista. To, że F jest homeomorfizmem wynika wprost z definicji.

ii) Jeżeli $g(y) = y$, to z jednoznaczności podniesienia wnioskujemy, że $g = id$. (Zauważmy, że w ten sam sposób możemy pokazać, że jeżeli $g_1(y) = g_2(y)$ dla pewnego $y \in \widetilde{X}$ i $g_1, g_2 \in \Gamma_X$, to $g_1 = g_2$.)

iii) Znajdziemy płaty $V_1, \dots, V_m$ pokrywające K. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $g_n \in \Gamma_X$, przy czym $g_n \neq g_m$, $n \neq m$, oraz $y_n \in K$ takie, że $g_n(y_n) \in K$. Wtedy znajdziemy i, j oraz podciąg g_{n_k} taki, że $y_{n_k} \in V_i$ oraz $g_{n_k}(y_{n_k}) \in V_j$. Mamy jednak $g_{n_k} = (p|_{V_j})^{-1} \circ p$ na zbiorze $(p|_{V_i})^{-1}(p(V_i) \cap p(V_j))$ (który jest niepusty, bo zawiera y_{n_k}) i z jednoznaczności podniesienia otrzymamy $g_{n_k} = g_{n_l}$ dla wszystkich k, l - sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 24.6. $\Gamma_X \simeq \pi_1(X)$.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$ i wybierzmy $y_0 \in \widetilde{X}$ takie, że $p(y_0) = x_0$. Połóżmy
$$F : \Gamma_X \ni g \longmapsto [p \circ \gamma] \in \pi_1(X),$$
gdzie $\gamma \in C(I, \widetilde{X})$ jest takie, że $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = g(y_0)$ (wtedy $p \circ \gamma \in C(I, X)$, $p(\gamma(0)) = p(\gamma(1)) = x_0$). Odwzorowanie F jest dobrze określone, gdyż przestrzeń $\widetilde{X}$ jest jednospójna.

Chcemy pokazać, że F jest homomorfizmem grup. Weźmy $g_1, g_2 \in \Gamma_X$ i niech $\gamma_i \in C(I, \widetilde{X})$ będą takie, że $\gamma_i(0) = y_0$ i $\gamma_i(1) = g_i(y_0)$, $i = 1, 2$. Niech $\alpha := \gamma_2 * (g_2 \circ \gamma_1)$, wtedy $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = g_2(g_1(y_0))$ oraz
$$F(g_2 \circ g_1) = [p \circ \alpha] = [p \circ \gamma_2]\,[p \circ g_2 \circ \gamma_1] = [p \circ \gamma_2]\,[p \circ \gamma_1] = F(g_2)\,F(g_1).$$

Dla wykazania iniektywności F niech $g \in \Gamma_X$ będzie takie, że $F(g) = 0$, tzn. dla $\gamma \in C(I, \widetilde{X})$ takiego, że $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = g(y_0)$, krzywa $p \circ \gamma$ jest ściągalna. Ponieważ γ jest podniesieniem $p \circ \gamma$, z twierdzenia o monodromii wynika, że $\gamma(1) = y_0$, a więc $g(y_0) = y_0$, zatem $g = id$.

Dla krzywej $\beta \in C(I, X)$ takiej, że $\beta(0) = \beta(1) = x_0$, niech $\widetilde{\beta}$ będzie jej podniesieniem. Dzięki Propozycji 24.5.i znajdziemy $g \in \Gamma_X$ takie, że $g(y_0) = \widetilde{\beta}(1)$. Wtedy $F(g) = [\beta]$, czyli F jest surjekcją. $\square$

Mamy także rezultat odwrotny do Propozycji 24.5.

Propozycja 24.7. *Niech Y będzie lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną, natomiast Γ podgrupą grupy homeomorfizmów Y działającą dyskretnie na Y. Wtedy Y/Γ spełnia warunek Hausdorffa. Jeżeli dodatkowo Γ nie ma punktów stałych, to rzutowanie $p : Y \to Y/\Gamma$ jest nakryciem.*

Dowód. Niech $y_1, y_2 \in Y$ będą takie, że $p(y_1) \neq p(y_2)$. Znajdziemy $U_i \Subset Y$, otoczenia y_i, $i = 1, 2$, takie, że $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dla $K := \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ zbiór $\{g \in \Gamma :$

$g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony, powiedzmy $\{g_1, \dots, g_n\}$. Ponieważ $p(y_1) \neq p(y_2)$, znajdziemy $V_1 \subset U_1$, otoczenie y_1, takie, że $y_2 \notin g_j(\overline{V}_1)$, $j = 1, \dots, n$. Wynika stąd, że istnieje $V_2 \subset U_2$, otoczenie y_2, takie, że $g_j(V_1) \cap V_2 = \emptyset$, $j = 1, \dots, n$, a stąd $g(V_1) \cap V_2 = \emptyset$ dla $g \in \Gamma$. Zbiory $p(V_i)$ są więc otoczeniami $p(y_i)$, $i = 1, 2$, takimi, że $p(V_1) \cap p(V_2) = \emptyset$.

Dla ustalonego $y \in Y$ niech obszar $V \Subset Y$ będzie otoczeniem y. Istnieje tylko skończona liczba niepustych zbiorów $\overline{V} \cap g(\overline{V})$, $g \in \Gamma$. Ponieważ $g \in \Gamma_*$ nie mają punktów stałych, odpowiednio zmniejszając V możemy założyć, że dla wszystkich $g \in \Gamma_*$ mamy $\overline{V} \cap g(\overline{V}) = \emptyset$. Wynika stąd, że p zacieśnione do V jest bijekcją na obraz. Dla $U := p(V)$ zbiory $g(V)$, $g \in \Gamma$, są wtedy płatami nad U. $\square$

25. Powierzchnie Riemanna

Powierzchnie Riemanna to jednowymiarowe rozmaitości zespolone. Dokładniej, niech M będzie spójną przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Rodzinę homeomorfizmów $\varphi_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha$, gdzie $\{U_\alpha\}$ jest otwartym pokryciem M zaś D_α obszarami w $\mathbb{C}$, nazywamy atlasem na M, jeżeli odwzorowania przejścia

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

są holomorficzne. Elementy atlasu nazywamy mapami. Mówimy, że dwa atlasy są równoważne, jeżeli ich suma mnogościowa jest także atlasem. Łatwo sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Klasę równoważneści względem tej relacji nazywamy strukturą zespoloną. Taką przestrzeń topologiczną wraz ze strukturą zespoloną nazywamy powierzchnią Riemanna. (Uwaga: zawsze zakładamy z definicji, że powierzchnie Riemanna są spójne.)

Przykłady. i) Obszary w $\mathbb{C}$;

ii) Sfera Riemanna $\mathbb{P}$ (z mapami $id_{\mathbb{C}}$ oraz $\mathbb{P} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto 1/z \in \mathbb{C}$);

iii) Wykres funkcji holomorficznej f na obszarze w $\mathbb{C}$ o nieznikającej pochodnej;

iv) Torus $\mathbb{C}/\Gamma$, gdzie $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$. Wtedy rzutowanie $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ wprowadza topologię na $\mathbb{C}/\Gamma$ (zbiorami otwartymi są dokładnie obrazy zbiorów otwartych), w której p jest lokalnym homeomorfizmem - jest ono homeomorfizmem na obraz na każdym zbiorze postaci $z + U_0$, $z \in \mathbb{C}$, gdzie $U_0 := \{s\omega_1 + t\omega_2 : s, t \in (0, 1)\}$. Odwzorowania $(p|_{z+U_0})^{-1}$ są mapami na $\mathbb{C}/\Gamma$. Przestrzeń $\mathbb{C}/\Gamma$ jest homeomorficzna z torusem $S^1 \times S^1$, zaś p jest nakryciem (**Ćwiczenie**).

Odwzorowanie $f : M \to N$, gdzie M, N są powierzchniami Riemanna, nazywamy holomorficznym, jeżeli dla każdej mapy $\varphi : U \to D$ na M oraz $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \widetilde{D}$ na N funkcja $\widetilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ jest holomorficzna na zbiorze $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ (mówimy, że f jest antyholomorficzne, jeżeli te funkcje są antyholomorficzne). Zbiór odwzorowań holomorficznych $M \to N$ oznaczamy $\mathcal{O}(M, N)$, zaś $\mathcal{O}(M) := \mathcal{O}(M, \mathbb{C})$. Odwzorowanie $f : M \to N$ nazywamy konforemnym lub biholomorfizmem, jeżeli f jest holomorficzną bijekcją (wtedy f^{-1} jest także konforemne). Jeżeli takie odwzorowanie istnieje, to mówimy, że M i N są konforemne (lub biholomorficzne) i piszemy $M \simeq N$. Odwzorowania konforemne $M \to M$ nazywamy automorfizmami, ich zbiór oznaczamy $\mathrm{Aut}\,(M)$. Ma on oczywiście strukturę grupy (ze składaniem odwzorowań jako mnożeniem). Jest oczywiste, że jeżeli $M \simeq N$, to grupy $\mathrm{Aut}\,(M)$ i $\mathrm{Aut}\,(N)$ są izomorficzne.

Funkcje z $\mathcal{O}(M, \mathbb{P})$ (poza stałą ∞) nazywamy funkcjami meromorficznymi, lokalnie są one albo holomorficzne albo mają bieguny (na dyskretnym podzbiorze M, dzięki zasadzie identyczności). Krotnością funkcji $f \in \mathcal{O}(M)$ w punkcie $z_0 \in M$ nazywamy krotność zera funkcji $f - f(z_0)$ w z_0. Ogólniej, jeżeli $f \in \mathcal{O}(M, \widetilde{M})$, to możemy mówić o krotności f w z_0 (jest oczywiste, że nie zależy ona od wyboru map). Mówimy, że f jest jednokrotne w z_0, jeżeli ta krotność wynosi 1, oznacza to dokładnie, że f jest iniektywne w pewnym otoczeniu z_0. Jeżeli f jest meromorficzna na M, to rząd bieguna nie zależy od wyboru mapy. Rząd bieguna to innymi słowy krotność f jako odwzorowania z $\mathcal{O}(M, \mathbb{P})$.

Powierzchnie Riemanna spełniają wszystkie założenia topologiczne, które rozważaliśmy w przypadku nakryć: są spójne, lokalnie łukowo spójne, lokalnie jednospójne, lokalnie zwarte. Jeżeli M jest powierzchnią Riemanna, zaś N przestrzenią topologiczną nakrywającą M, to nakrycie $p : N \to M$ w naturalny sposób definiuje strukturę zespoloną na N. Z poprzednich rezultatów możemy teraz wywnioskować istnienie nakrycia uniwersalnego w kategorii powierzchni Riemanna.

Twierdzenie 25.1. *Niech M będzie dowolną powierzchnią Riemanna. Wtedy istnieje, jedyna z dokładnością do biholomorfizmu, jednospójna nakrywająca powierzchnia Riemanna $\widetilde{M}$, przy czym rozpatrywane nakrycie jest odwzorowaniem holomorficznym. Co więcej, każde odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(N, M)$, gdzie N jest powierzchnią jednospójną, możemy podnieść do odwzorowania $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(N, \widetilde{M})$. Każdy homeomorfizm uniwersalnego nakrycia holomorficznego jest biholomorfizmem $\widetilde{M}$.* □

Podobnie jak w Propozycji 24.7 powierzchnię Riemanna M możemy dzielić przez podgrupę grupy automorfizmów M działającą dyskretnie na M, bez punktów stałych, otrzymamy w ten sposób dalsze przykłady powierzchni Riemanna.

Propozycja 25.2. *Załóżmy, że M jest powierzchnią Riemanna, zaś Γ podgrupą* $\mathrm{Aut}\,(M)$ *działającą dyskretnie na M, bez punktów stałych. Wtedy M/Γ jest powierzchnią Riemanna (tzn. M/Γ spełnia warunek Hausdorffa, natomiast rzutowanie $M \to M/\Gamma$ wprowadza naturalną strukturę zespoloną na M).*

Dowód. Z Propozycji 24.7 wnioskujemy, że M/Γ spełnia warunek Hausdorffa oraz że rzutowanie $p : M \to M/\Gamma$ jest nakryciem. Z dowodu tej propozycji wynika także, że dla każdego $z \in M$ istnieje otoczenie U_z takie, że $p(U_z)$ jest otoczeniem prawidłowym $p(z)$, natomiast płaty nad $p(U_z)$ są postaci $g(U_z)$, $g \in \Gamma$. Możemy także dodatkowo założyć (ewentualnie zmniejszając U_z), że na U_z określona jest mapa φ_z. Można wtedy łatwo pokazać, że odwzorowania $\varphi_z \circ (p|U_z)^{-1}$ tworzą atlas na M/Γ. □

Zauważmy, że torus jest przykładem ilorazowej powierzchni Riemanna z Propozycji 25.2, przy czym Γ to grupa translacji postaci $z \mapsto z + n\omega_1 + m\omega_2$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Wykład 21, 19.11.2007

Z powyższych rezultatów widzimy, że każda powierzchnia Riemanna (z dokładnością do biholomorfizmu) jest postaci $\widetilde{M}/\Gamma$, gdzie $\widetilde{M}$ jest powierzchnią jednospójną, natomiast Γ podgrupą $\mathrm{Aut}\,(\widetilde{M})$ bez punktów stałych, działającą dyskretnie na

$\widetilde{M}$. Jednym z głównych rezultatów będzie wykazanie, że jedynymi jednospójnymi powierzchniami Riemanna są Δ, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{P}$.

Scharakteryzujemy najpierw powierzchnie, których nakryciem uniwersalnym jest $\mathbb{P}$ lub $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 25.3. *i) Jeżeli $\widetilde{M} \simeq \mathbb{P}$, to $M \simeq \mathbb{P}$;*

ii) Jeżeli $\widetilde{M} \simeq \mathbb{C}$, to $M \simeq \mathbb{C}, \mathbb{C}_*$ lub M jest torusem.

Dowód. i) Każdy element $\operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ ma punkt stały.

ii) Niech Γ będzie podrupą $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ bez punktów stałych, działającą dyskretnie na $\mathbb{C}$. Dla $a \neq 1$ odwzorowanie $z \mapsto az + b$ ma punkt stały w $\mathbb{C}$, a więc Γ składa się tylko z translacji. Połóżmy $G := \{g(0) : g \in \Gamma\}$. Wtedy G jest addytywną podgrupą $\mathbb{C}$ izomorficzną z Γ. Co więcej, G jest podzbiorem dyskretnym $\mathbb{C}$ (bo jeżeli nie, to znajdziemy $b_j \in G_*$, $b_j \to 0$, i wtedy dla j odp. dużego $0 \in \overline{\Delta} \cap (\overline{\Delta} - b_j)$ - sprzeczność).

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ generowaną przez G. Jeżeli $\dim V = 0$, to $G = \{0\}$ i $M \simeq \mathbb{C}$. Jeżeli $\dim V = 1$, to istnieje $\omega_0 \in G$ takie, że $|\omega_0| = \min_{\omega \in G_*} |\omega|$. Można wtedy łatwo pokazać, że $G = \mathbb{Z}\omega_0$ oraz, że Γ jest grupą nakrycia

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto e^{2\pi i z/\omega_0} \in \mathbb{C}_*.$$

Jeżeli natomiast $\dim V = 2$, to dla $\widetilde{\omega} \in G_*$ podobnie znajdziemy $\omega_1 \in (\mathbb{R}\widetilde{\omega}) \cap G_*$ takie, że $(\mathbb{R}\widetilde{\omega}) \cap G = \mathbb{Z}\omega_1$. Wybierzmy teraz dowolne $\widehat{\omega} \in G \setminus (\mathbb{R}\omega_1)$. Równoległobok

$$K := \{\lambda\omega_1 + \mu\widehat{\omega} : \lambda, \mu \in [0, 1]\}$$

jest zbiorem zwartym, a więc zbiór $K \cap G$ jest skończony. Znajdziemy zatem $\omega_2 = \lambda_0\omega_1 + \mu_0\widehat{\omega} \in K \cap G \setminus (\mathbb{R}\omega_1)$ o minimalnym $\mu_0 \in (0, 1]$. Twierdzimy, że $G = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Inkluzja $\supset$ jest oczywista. Dla wykazania odwrotnej weźmy dowolne $\omega \in G$. Znajdziemy wtedy $\omega' \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ oraz $\lambda, \mu \in [0, 1)$ takie, że $\omega - \omega' = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ Mamy

$$\omega - \omega' = (\lambda + \mu\lambda_0)\omega_1 + \mu_0\mu\widehat{\omega} \in K \cap G.$$

Ponieważ $\mu_0\mu < \mu_0$, z definicji μ_0 wnioskujemy, że $\mu = 0$, a stąd $\lambda\omega_1 \in G$, czyli $\lambda = 0$. $\square$

Propozycja 25.4. *Torusy $\mathbb{C}/\Gamma_1$ i $\mathbb{C}/\Gamma_2$ są konforemne wtedy i tylko wtedy gdy grupy Γ_1, Γ_2 są sprzężone, tzn. $\Gamma_2 = F\Gamma_1F^{-1}$ dla pewnego $F \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$.*

Dowód. Niech $p_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma_i$, $i = 1, 2$, oznaczają naturalne rzutowania. Jeżeli istnieje $F \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ takie, że $\Gamma_2 = F\Gamma_1F^{-1}$, to kładziemy $f(p_1(z)) := p_2(F(z))$, $z \in \mathbb{C}$. Odwzorowanie f jest dobrze określone, gdyż jeżeli $p_1(z) = p_1(w)$, to $w = g_1(z)$ dla pewnego $g_1 \in \Gamma_1$. Ponieważ $g_2 := Fg_1F^{-1} \in \Gamma_2$ i $g_2(F(z)) = F(w)$, to wtedy $p_2(F(z)) = p_2(F(w))$. Z symetryczności oraz odwracalności F dostaniemy, że tak zdefiniowane f jest bijekcją. To, że jest ono konforemne wynika z tego, że rzutowania p_i są lokalnie konforemne.

Załóżmy teraz, że odwzorowanie $f : \mathbb{C}/\Gamma_1 \to \mathbb{C}/\Gamma_2$ jest konforemne. Wybierzmy $w_0 \in \mathbb{C}$ takie, że $p_2(w_0) = f(p_1(0))$. Dla ustalonego $z \in \mathbb{C}$ niech γ będzie krzywą o początku 0 i końcu z. Kładziemy $F(z) := w$, gdzie w jest końcem podniesienia krzywej $f \circ p_1 \circ \gamma$ o początku w_0 (dzięki twierdzeniu o monodromii definicja ta nie zależy od wyboru γ). Z odwracalności f łatwo dostaniemy odwracalność F.

Ponieważ $p_2 \circ F = f \circ p_1$ i p_1, p_2 są lokalnie konforemne, odwzorowanie F jest konforemne.

Musimy jeszcze pokazać, że $\Gamma_2 = F\Gamma_1 F^{-1}$. Wybierzmy $g_1 \in \Gamma_1$. Wtedy $p_2(F(g_1(0))) = f(p_1(g_1(0))) = f(p_1(0)) = p_2(F(0))$, a więc znajdziemy $g_2 \in \Gamma_2$ takie, że $F(g_1(0)) = g_2(F(0))$. Chcemy pokazać, że $F \circ g_1 = g_2 \circ F$ na $\mathbb{C}$. Mamy

$$p_2 \circ g_2 \circ F = p_2 \circ F = f \circ p_1 = f \circ p_1 \circ g_1 = p_2 \circ F \circ g_1,$$

a więc zarówno $F \circ g_1$ jak i $g_2 \circ F$ są podniesieniami tego samego odwzorowania, z jednoznaczności podniesienia są zatem równe. Dostaliśmy więc $F\Gamma_1 F^{-1} \subset \Gamma_2$ i z symetryczności dostaniemy równość. $\square$

Ćwiczenie Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele niekonforemnych ze sobą torusów.

Zauważmy, że w dowodzie Propozycji 25.4 moglibyśmy zamienić $\mathbb{C}$ z dowolną jednospójną powierzchnią Riemanna (przy czym Γ_1 i Γ_2 musiałyby być jak w Propozycji 25.2).

Funkcję $h : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, gdzie M jest powierzchnią Riemanna, nazywamy harmoniczną (subharmoniczną), jeżeli dla każdej mapy φ na M funkcja $h \circ \varphi$ jest harmoniczna (subharmoniczna). Obie te własności są czysto lokalne i nie zależą od wyboru mapy. Podobnie jak poprzednio, zbiór funkcji harmonicznych na powierzchni M oznaczamy $\mathcal{H}(M)$, natomiast subharmonicznych $\mathcal{SH}(M)$. Zbiór ujemnych funkcji subharmonicznych na M oznaczamy $\mathcal{SH}^-(M)$.

Jest oczywiste, że wszystkie lokalne rezultaty z Rozdziałów 22 i 23 zachodzą także na powierzchniach Riemanna. W Twierdzeniach 22.5 (zasada maksimum) oraz 22.11 (twierdzenie Harnacka) można zamienić obszar Ω na powierzchnię Riemanna M, dowody pozostaną bez zmian. (Właściwie jedynym rezultatem Rozdziału 22, którego nie można bezpośrednio przenieść na powierzchnię Riemanna, jest Twierdzenie 22.2.) Z zasady maksimum wynika, że na powierzchniach zwartych jedyne funkcje subharmoniczne to stałe.

26. Problem Dirichleta, metoda Perrona

Niech D będzie obszarem na powierzchni Riemanna M. Mówimy, że D jest regularny, jeżeli dla każdego $\varphi \in C \cap L^\infty(\partial D)$ znajdziemy $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ takie, że $h \leq \sup_{\partial D} \varphi$ w D oraz $h = \varphi$ na ∂D (tzn. problem Dirichleta dla funkcji φ ma rozwiązanie). Zauważmy, że pojęcie regularności obszaru D nie jest własnością wewnętrzną obszaru D, zależy ono także od powierzchni M (gdyż brzeg D od niej zależy). Zauważmy także, że w ogólnym przypadku takie h nie musi być jedyne: jeżeli np. $D := \{\operatorname{Re} z < 0\} \subset \mathbb{C}$ i $\varphi \equiv 0$, to zarówno $h \equiv 0$ jak i $h(z) = \operatorname{Re} z$ są dobre. Z drugiej strony, jeżeli $D \Subset M$, to z zasady maksimum wynika, że takie h może być co najwyżej jedno.

Przykłady. i) Koło w $\mathbb{C}$ jest obszarem regularnym (Twierdzenie 22.8).

ii) (Zaremba, 1911) Obszar Δ_* (w $\mathbb{C}$) nie jest regularny (**Ćwiczenie**).

Naszym celem będzie scharakteryzowanie obszarów regularnych, udowodnimy między innymi, że obszary o gładkim brzegu są regularne. Pokażemy najpierw, że funkcję subharmoniczną na powierzchni Riemanna, na kole możemy zmodyfikować do funkcji harmonicznej.

Twierdzenie 26.1. *Załóżmy, że* $u \in \mathcal{SH}(M)$ *i że* $\overline{K}(z_0, r)$ *jest kołem w* M *(w pewnej mapie). Połóżmy*

$$\widetilde{u} := \sup\{v \in \mathcal{SH}(M) : v \leq u \text{ na } M \setminus K(z_0, r)\}.$$

Wtedy $\widetilde{u} \in \mathcal{SH}(M)$*,* $\widetilde{u}$ *jest harmoniczna w* $K(z_0, r)$ *oraz* $\widetilde{u} = u$ *na* $M \setminus K(z_0, r)$*.*

Dowód. Niech φ_n i h_n będą takie jak w dowodzie Twierdzenia 23.1. Wtedy h_n jest ciągiem malejącym do funkcji harmonicznej $h \geq u$ w $K(z_0, r)$. Połóżmy

$$\widehat{u} := \begin{cases} u & \text{na } M \setminus K(z_0, r), \\ h & \text{na } K(z_0, r). \end{cases}$$

Łatwo sprawdzimy, że $\widehat{u}$ jest półciągła z góry, a korzystając z Twierdzenia 23.2 dostaniemy $\widehat{u} \in \mathcal{SH}(M)$. Mamy więc $\widehat{u} \leq \widetilde{u}$ na M. Z drugiej strony, jeżeli $v \in \mathcal{SH}(M)$ jest takie, że $v \leq u$ na $M \setminus K(z_0, r)$, to z zasady maksimum $v \leq h_n$ na $K(z_0, r)$, a zatem $\widetilde{u} \leq \widehat{u}$. □

Udowodnimy teraz podstawowy rezultat metody Perrona (1924).

Twierdzenie 26.2. *Załóżmy, że niepusta rodzina* $\mathcal{F} \subset \mathcal{SH}(M)$ *spełnia następujące warunki*

i) Dla $u, v \in \mathcal{F}$ *istnieje* $w \in \mathcal{F}$ *takie, że* $w \geq \max\{u, v\}$*;*

ii) Dla każdego koła $\overline{K}(z_0, r) \subset M$ *i* $u \in \mathcal{F}$ *istnieje* $v \in \mathcal{F}$ *takie, że* $v \geq \widetilde{u}$ *(*$\widetilde{u}$ *jest modyfikacją z Twierdzenia 26.1).*

Niech $h := \sup \mathcal{F}$*. Wtedy albo* $h \equiv \infty$ *albo* $h \in \mathcal{H}(M)$*.*

Dowód. Niech $z_0 \in M$ będzie takie, że $h(z_0) < \infty$ i ustalmy $\overline{K}(z_0, r) \subset M$. Znajdziemy $u_n \in \mathcal{F}$ takie, że $\lim u_n(z_0) = h(z_0)$. Korzystając z i) znajdziemy $v_1 \in \mathcal{F}$ takie, że $v_1 \geq u_1$ oraz indukcyjnie $v_n \in \mathcal{F}$ takie, że $v_n \geq \max\{v_{n-1}, u_n\}$. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że ciąg u_n jest rosnący. Dzięki ii) $\lim \widetilde{u}_n(z_0) = h(z_0)$. Z twierdzenia Harnacka w $K(z_0, r)$ otrzymamy $h_1 := \lim \widetilde{u}_n \in \mathcal{H}(K(z_0, r))$, przy czym $h_1 \leq h$ i $h_1(z_0) = h(z_0)$. Chcemy pokazać, że $h = h_1$ w $K(z_0, r)$. Weźmy dowolne $z_1 \in K(z_0, r)$ i niech $v_n \in \mathcal{F}$ będą takie, że $\lim v_n(z_1) = h(z_1)$. Podobnie jak poprzednio możemy założyć, że ciąg v_n jest rosnący oraz $v_n \geq u_n$. Wtedy $h_2 := \lim \widetilde{v}_n$ jest funkcją harmoniczną w $K(z_0, r)$ taką, że $h_1 \leq h_2 \leq h$, $h_1(z_0) = h_2(z_0)$ oraz $h_2(z_1) = h(z_1)$. Z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych otrzymamy $h_1 = h_2$, a stąd $h_1(z_1) = h(z_1)$. Pokazaliśmy zatem, że h jest harmoniczna w $K(z_0, r)$. W szczególności, zbiór $\{h < \infty\}$ jest otwarty.

Jeżeli $h(z_0) = \infty$, to z twierdzenia Harnacka łatwo otrzymamy $h = \infty$ w $K(z_0, r)$, a zatem zbiór $\{h < \infty\}$ jest także domknięty. □

Rodzinę $\mathcal{F}$ spełniającą i)-ii) będziemy nazywać rodziną Perrona na M.

Wykład 22, 26.11.2007

Mamy następującą charakteryzację obszarów regularnych.

Twierdzenie 26.3. *Obszar* $D \subset M$ *jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $z_0 \in \partial D$ *istnieje otoczenie* U *punktu* z_0 *w* M *oraz* $u \in \mathcal{SH}^-(D \cap U)$ *takie,* *że*

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D\cap U}} u(z)=0,\quad u^*<0 \ \ na\ (\partial D\setminus\{z_0\})\cap U.$$

Takie u nazywamy barierą dla D w z_0. W szczególności, regularność jest lokalną własnością brzegu.

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że D jest regularny. Dla ustalonego $z_0\in\partial D$ znajdziemy łatwo $\varphi\in C\cap L^\infty(\partial D)$ takie, że $\varphi(z_0)=0$ i $\varphi<0$ na $\partial D\setminus\{z_0\}$. Funkcja $h\in\mathcal{H}(D)\cap C(\overline{D})$ taka, że $h=\varphi$ na ∂D i $h\le 0$ w D osiąga wtedy maksimum dokładnie w z_0 (w przeciwnym razie byłaby lokalnie stała - sprzeczność), jest więc barierą w z_0.

Ustalmy z kolei $\varphi\in C\cap L^\infty(\partial D)$ i niech $h:=\sup\mathcal{F}$, gdzie

$$\mathcal{F}:=\{v\in\mathcal{SH}(D): v^*\le\varphi \text{ na } \partial D,\ v\le\sup_{\partial D}\varphi \text{ w } D\}.$$

Z Twierdzenia 26.2 wynika, że $h\in\mathcal{H}(D)$. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla ustalonego $z_0\in\partial D$ mamy

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}} h(z)=\varphi(z_0). \tag{26.1}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\varphi(z_0)=0$. Ustalmy $\varepsilon>0$. Niech $u\in\mathcal{SH}^-(D\cap U)$ będzie barierą w z_0, gdzie U jest otoczeniem z_0. Niech $r>0$ będzie takie, że $|\varphi|\le\varepsilon$ na $\partial D\cap K(z_0,r)$ oraz $\overline{K}(z_0,r)\subset U$. Wybierzmy a takie, że

$$\sup_{D\cap\partial K(z_0,r)} u<a<0.$$

Połóżmy

$$v:=\begin{cases}\max\{u,a\} & \text{w } D\cap K(z_0,r),\\ a & \text{w } D\setminus K(z_0,r).\end{cases}$$

Dzięki temu, że $u<a$ w otoczeniu $D\cap\partial K(z_0,r)$, mamy $v\in\mathcal{SH}(D)$. W szczególności, każdą barierę określoną lokalnie można przedłużyć na całe D.

Znajdziemy $A>0$ takie, że

$$Av\le -||\varphi||_{L^\infty(\partial D)},\quad \text{na } D\setminus K(z_0,r).$$

Z jednej strony mamy wtedy $Av-\varepsilon\in\mathcal{F}$, a więc $Av-\varepsilon\le h$ w D, skąd otrzymamy

$$h_*(z_0)\ge-\varepsilon.$$

Z drugiej strony, dla dowolnego $w\in\mathcal{F}$ dostaniemy

$$(w+Av-\varepsilon)^*\le 0 \text{ na } \partial(D\cap K(z_0,r)),$$

więc z zasady maksimum

$$w+Av-\varepsilon\le 0\ \text{ w } D\cap K(z_0,r).$$

Z dowolności w otrzymamy $h + Av - \varepsilon \le 0$ w pobliżu z_0, a więc

$$h^*(z_0) \le \varepsilon.$$

Dzięki dowolności ε mamy (26.1). $\square$

Punkty brzegu obszaru, dla których istnieje bariera nazywamy regularnymi. Twierdzenie 26.3 mówi, że obszar jest regularny, jeżeli taki jest każdy punkt jego brzegu. Daje ono łatwo następujące kryterium na regularność obszaru.

Wniosek 26.4. *Każdy obszar o brzegu klasy C^2 jest regularny.*

Dowód. Jeżeli ∂D jest klasy C^2, to dla ustalonego $z_0 \in \partial D$ znajdziemy koło $\overline{K}(\widetilde{z}, 2r) \subset M$ takie, że $\overline{K}(\widetilde{z}, r) \cap \overline{D} = \{z_0\}$. Można wtedy łatwo pokazać, że funkcja

$$u(z) := \log \frac{r}{|z - \widetilde{z}|} \in \mathcal{H}(K(\widetilde{z}, 2r) \setminus \overline{K}(\widetilde{z}, r))$$

jest barierą w z_0. $\square$

Poniższe, znacznie mocniejsze kryterium topologiczne jest trudniejsze do udowodnienia.

Twierdzenie 26.5. *Obszar, którego żadna składowa spójna brzegu nie jest jednopunktowa, jest regularny.*

Dowód. Ponieważ problem jest lokalny, możemy założyć, że nasz obszar jest postaci $D := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$, gdzie $E \subset \mathbb{C}$ jest zwarty i spójny. Z Twierdzenia 10.8 i Wniosku 20.7 obszar D jest jednospójny. Ustalmy $z_0, z_1 \in E$, $z_1 \neq z_0$. Funkcja

$$g(z) := \begin{cases} \frac{z-z_0}{z-z_1}, & z \in D \setminus \{\infty\}, \\ 1, & z = \infty \end{cases}$$

jest holomorficzna i $\neq 0$ w D. Znajdziemy więc $\widetilde{g} = u + iv \in \mathcal{O}(D)$ takie, że $e^{\widetilde{g}} = g$. W szczególności

$$u(z) = \log \left| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right|, \quad z \in D \setminus \{\infty\}.$$

Wtedy

$$w := \operatorname{Re} \frac{1}{\widetilde{g}} = \frac{u}{u^2 + v^2} \in \mathcal{H}(D),$$

$w(z) < 0$, gdy $|z - z_0| < |z - z_1|$, oraz

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} w(z) = 0$$

(bo $|w| \le 1/|u|$). Do zakończenia dowodu wystarczy użyć następującego ogólnego rezultatu.

Twierdzenie 26.6. (Bouligand, 1933) *Przypuśćmy, że $D \subset M$ jest obszarem, $z_0 \in \partial D$, zaś $u \in \mathcal{SH}(D \cap U)$, gdzie U jest otoczeniem z_0, jest takie, że $u < 0$ oraz*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D \cap U}} u(z) = 0.$$

Wtedy punkt z_0 jest regularny.

Dowód (nie było na wykładzie). Ponownie rezultat jest czysto lokalny, możemy więc założyć, że D jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$. Połóżmy $g(z) := |z - z_0| \in \mathcal{SH} \cap C(\mathbb{C})$ oraz

$$h := \sup\{v \in \mathcal{SH}(D) : v^* \le g \text{ na } \partial D\}.$$

Mamy wtedy $g \le h \le M := \sup_D g$ w D oraz z Twierdzenia 26.2 $h \in \mathcal{H}(D)$. Wystarczy pokazać, że $h^*(z_0) = 0$ - wtedy funkcja $-h$ będzie barierą w z_0.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie, że $\overline{K}(z_0, \varepsilon) \subset U$. Niech $F \subset D \cap \partial K(z_0, \varepsilon)$ będzie zbiorem zwartym. Połóżmy

$$\varphi := \begin{cases} 1 & \text{na } \partial K(z_0, \varepsilon) \cap (D \setminus F), \\ 0 & \text{na } (\partial K(z_0, \varepsilon) \setminus D) \cup F, \end{cases}$$

oraz

$$I(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 - |z - z_0|^2}{|\varepsilon e^{it} - (z - z_0)|^2} \varphi(z_0 + \varepsilon e^{it})\, dt, \quad z \in K(z_0, \varepsilon).$$

Wtedy $I \in \mathcal{H}(K(z_0, \varepsilon))$, $0 \le I \le 1$,

$$I(z_0) = \frac{\sigma(\partial K(z_0, \varepsilon) \cap (D \setminus F))}{\sigma(\partial K(z_0, \varepsilon))},$$

gdzie σ jest miarą Lebesgue'a na $\partial K(z_0, \varepsilon)$. Możemy więc wybrać zbiór F tak, że $I(z_0) \le \varepsilon$. Z dowodu Twierdzenia 22.8 wynika, że

$$\lim_{z \to \partial K(z_0, \varepsilon) \cap (D \setminus F)} I(z) = 1. \tag{26.2}$$

Szukamy teraz stałych dodatnich α, β, γ takich, że

$$h \le -\alpha u + \beta I + \gamma \quad \text{w } D \cap K(z_0, \varepsilon).$$

Będzie to zachodzić, jeżeli

$$v^* + \alpha u^* \le \beta I_* + \gamma \quad \text{na } \partial(D \cap K(z_0, \varepsilon)) \tag{26.3}$$

(gdzie $I_* := -(-I)^*$) dla każdego $v \in \mathcal{SH} \cap C(D)$ spełniającego $v^* \le g$ na ∂D. Na $\partial D \cap \overline{K}(z_0, \varepsilon)$ wystarczy wziąć $\gamma = \varepsilon$ (i dowolne $\alpha, \beta > 0$). Na F mamy $v^* \le M$ i (26.3) zachodzi dla

$$\alpha := \frac{M - \varepsilon}{-\max_F u}.$$

Wreszcie na $\partial K(z_0, \varepsilon) \cap (D \setminus F)$, dzięki (26.2) możemy wziąć $\beta := M - \varepsilon$. Otrzymaliśmy zatem

$$h \le \frac{M - \varepsilon}{\max_F u} u + (M - \varepsilon) I + \varepsilon,$$

a stąd

$$h^*(z_0) \le (M - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε mamy $h^*(z_0) = 0$. $\square$

27. Funkcja Greena

Dla $w \in M$, gdzie M jest powierzchnią Riemanna, kładziemy

$$g_M(\cdot, w) := \sup \mathcal{F}_w,$$

gdzie

$$\mathcal{F}_w := \{u \in \mathcal{SH}^-(M) : \limsup_{z \to w}(u(z) - \log|z-w|) < \infty\}.$$

Oczywiście funkcja $\log|\cdot - w|$ zależy od wyboru mapy w otoczeniu w, ale można łatwo sprawdzić, że powyższy warunek nie zależy od wyboru takiej mapy. Mówimy wtedy, że u ma biegun logarytmiczny w w. Jeżeli $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$, to funkcję $g_M(\cdot, w)$ nazywamy funkcją Greena z biegunem w.

Uwaga. Funkcję Greena definiuje się zwykle z przeciwnym znakiem.

Przykład. $g_\Delta(z,w) = \log\left|\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$.

Dowód. Wprost z definicji otrzymamy $\geq$. W celu pokazania przeciwnej nierówności weźmy $u \in \mathcal{F}_w$ i połóżmy

$$v(z) := u(z) - \log\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|.$$

Wtedy v jest subharmoniczna w $\Delta \setminus \{w\}$ i ograniczona z góry w pobliżu w, a więc dzięki Twierdzeniu 23.5 można ją przedłużyć do funkcji subharmonicznej w Δ. Mamy także $v^* \leq 0$ na $\partial\Delta$, a więc z zasady maksimum otrzymamy $v \leq 0$. □

Mamy następujące podstawowe własności funkcji Greena.

Propozycja 27.1. *i)* $N \subset M \;\Rightarrow\; g_N \geq g_M$;
ii) $f \in \mathcal{O}(M,N) \;\Rightarrow\; g_N(f(z), f(w)) \leq g_M(z,w),\ z, w \in M$;
iii) $f \in \operatorname{Aut}(M,N) \;\Rightarrow\; g_N(f(z), f(w)) = g_M(z,w),\ z, w \in M$.

Dowód. Jeżeli $u \in \mathcal{F}_{f(w)}$, to $u \circ f \in \mathcal{F}_w$. □

Propozycja 27.2. *Dla ustalonego $w \in M$ załóżmy, że $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$. Wtedy*
i) $g_M(\cdot, w) \in \mathcal{H}(M \setminus \{w\})$;
ii) $g_M(\cdot, w) \in \mathcal{F}_w$;
iii) $g_M(\cdot, w) - \log|\cdot - w|$ *przedłuża się do funkcji harmonicznej w otoczeniu w.*

Dowód. i) wynika natychmiast z Twierdzenia 26.2.
ii) W kole $K(w,r) \Subset M$ dzięki Propozycji 27.1 mamy

$$g_M(\cdot, w) \leq g_{K(w,r)}(\cdot, w) = \log\frac{|\cdot - w|}{r}.$$

Stąd oraz z i) dostaniemy ii).
iii) Z ii) funkcja $g_M(\cdot, w) - \log|\cdot - w|$ jest ograniczona z góry, wystarczy więc pokazać, że jest ona także ograniczona z dołu (korzystając z Twierdzeń 23.5 i 23.4.vii). Dzięki i) istnieje $C > 0$ takie, że $g_M(\cdot, w) > -C$ na $\partial K(w,r)$. Wtedy funkcja

$$\begin{cases} \max\{g_M(\cdot, w), \log(|\cdot - w|/r) - C\} & \text{w } K(w,r) \\ g_M(\cdot, w) & \text{na } M \setminus K(w,r) \end{cases}$$

należy do $\mathcal{F}_w$, a więc $g_M(\cdot, w) - \log|\cdot - w| \geq -C - \log r$ w $K(w, r)$. $\square$

Poniższe twierdzenie charakteryzuje powierzchnie Riemanna, na których istnieje funkcja Greena. Takie powierzchnie nazywamy g-hiperbolicznymi.

Twierdzenie 27.3. *Dla powierzchni Riemanna M następujące warunki są równoważne*
i) Dla każdego $w \in M$ mamy $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$;
ii) Istnieje $w \in M$ takie, że $\mathcal{F}_w \neq \emptyset$;
iii) Istnieje $v \in \mathcal{SH}^-(M)$, $v \neq const.$

Dowód. Implikacje i)⇒ii)⇒iii) są oczywiste. Ustalmy więc $w \in M$ i załóżmy, że $v \in \mathcal{SH}^-(M)$ jest niestała. Niech $\overline{K}(w, 2r)$ będzie kołem w M. Zdefiniujmy

$$\widetilde{v} := \sup\{u \in \mathcal{SH}^-(M) : u \leq -1 \text{ na } \overline{K}(w, r)\}.$$

Niech $a := \max_{\overline{K}(w,r)} v$. Wtedy $a < 0$ (z zasady maksimum), a stąd $v/|a| \leq \widetilde{v}$. Co więcej, istnieje $z \notin \overline{K}(w, r)$ takie, że $v(z) > a$, a zatem $\widetilde{v}(z) > -1$. Z Twierdzenia 26.2 wynika, że $\widetilde{v} \in \mathcal{H}(M \setminus \overline{K}(w, r))$. W pierścieniu $P := K(w, 2r) \setminus \overline{K}(w, r)$ zdefiniujmy

$$h := \frac{\log(|\cdot - w|/r)}{\log 2} - 1.$$

Wtedy $h \in \mathcal{H}(P) \cap C(\overline{P})$, $h = -1$ na $\partial K(w, r)$, $h = 0$ na $\partial K(w, 2r)$, a zatem $-1 \leq \widetilde{v} \leq h$ w $\overline{P}$. Wnioskujemy stąd, że $\widetilde{v}$ jest ciągła na M. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że v jest ujemną, niestałą funkcją subharmoniczną na M, harmoniczną na $M \setminus \overline{K}(w, r)$ i taką, że $v = -1$ w $\overline{K}(w, r)$, $v > -1$ na $M \setminus \overline{K}(w, r)$ (z zasady maksimum dla $-v$ na $M \setminus \overline{K}(w, r)$).

Wykład 23, 3.12.2007

Znajdziemy wtedy $\varepsilon > 0$ takie, że $v \geq -1 + 3\varepsilon$ na $\partial K(w, 2r)$. Zdefiniujmy

$$\psi := \frac{\varepsilon \log(|\cdot - w|/r)}{\log 2} - 1 + \varepsilon.$$

Wtedy $\psi \in \mathcal{SH}(K(w, 2r)) \cap C(\overline{K}(w, 2r) \setminus \{w\})$, $\psi = -1 + 2\varepsilon$ na $\partial K(w, 2r)$, $\psi = -1 + \varepsilon$ na $\partial K(w, r)$. Dzięki temu funkcja

$$\widehat{v} := \begin{cases} \psi & \text{w } K(w, r), \\ \max\{v, \psi\} & \text{w } K(w, 2r) \setminus K(w, r), \\ v & \text{na } M \setminus K(w, 2r) \end{cases}$$

jest subharmoniczna na M oraz $\varepsilon^{-1} \log 2 \, \widehat{v} \in \mathcal{F}_w$. $\square$

Ponieważ funkcje subharmoniczne na zwartych powierzchniach Riemanna są stałe, takie powierzchnie nie są g-hiperboliczne. Co więcej, z Twierdzenia 23.5 wynika np., że $\mathbb{C} = \mathbb{P} \setminus \{\infty\}$ również nie jest powierzchnią g-hiperboliczną (nie jest nią również $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$).

Przy pomocy funkcji Greena możemy scharakteryzować jednospójne powierzchnie g-hiperboliczne.

Twierdzenie 27.4. *Jednospójna powierzchnia g-hiperboliczna jest konforemna z Δ.*

Dowód. Dla ustalonego $w \in M$ oznaczmy $g := g_M(\cdot, w)$. Chcemy najpierw skonstruować $F \in \mathcal{O}(M, \Delta)$ takie, że $g = \log|F|$. Dzięki Propozycji 27.2.iii i Twierdzeniu 22.2 znajdziemy dysk $D_0 \subset M$ zawierający w i $f \in \mathcal{O}(D_0)$ takie, że $\operatorname{Re} f = g - \log|\cdot - w|$ w $D_0 \setminus \{w\}$. Wtedy jeżeli $F_0(z) := (z-w)e^{f(z)} \in \mathcal{O}(D_0)$, to $g = \log|F_0|$ w D_0.

Pokażemy teraz, że F_0 można przedłużyć do funkcji holomorficznej w M. Dla $\widetilde{z} \in M$ niech $\gamma \in C(I, M)$ będzie krzywą łączącą w i $\widetilde{z}$. Funkcję $F_\gamma \in C(I, \mathbb{C})$ definiujemy następująco: znajdziemy podział $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ oraz dyski $D_1, \dots, D_{n-1}$ w M niezawierające w takie, że $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset D_j$, $j = 0, \dots, n-1$. Dla $j = 1, \dots, n-1$ indukcyjnie definiujemy $F_j \in \mathcal{O}(D_j)$ takie, że $g = \log|F_j|$ w D_j oraz $F_j(\gamma(t_j)) = F_{j-1}(\gamma(t_j))$ (takie F_j jest wyznaczone jednoznacznie; definiujemy je jako e^{g+iv}, gdzie v jest funkcją sprzężoną do g w D_j). Mamy wtedy $F_j = F_{j-1}$ w otoczeniu $\gamma(t_j)$. Kładziemy $F_\gamma(t) := F_j(\gamma(t))$, $t_j \le t \le t_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Łatwo sprawdzamy, że F_γ nie zależy od wyboru t_j i D_j.

Jeżeli γ_s, $s \in I$, jest rodziną krzywych o początku w i końcu $\widetilde{z}$, ciągłą względem s, z definicji F_{γ_s} łatwo dostaniemy, że funkcja $s \mapsto F_{\gamma_s}(1)$ jest lokalnie stała na I, a więc stała. Z jednospójności M otrzymamy więc, że $F(\widetilde{z}) := F_\gamma(1)$ nie zależy od wybory krzywej γ łączącej w i $\widetilde{z}$. Z tej jednoznaczności otrzymamy także, że $F = F_{n-1}$ w otoczeniu $\widetilde{z}$, a więc F jest funkcją holomorficzną. Dla każdego $w \in M$ skonstruowaliśmy zatem $F_w \in \mathcal{O}(M, \Delta)$ takie, że $g_M(\cdot, w) = \log|F_w|$ (korzystamy z tego, że $g_M < 0$). Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że F_w jest jednokrotne (bo obszar $F_w(M)$ jest jednospójny i wystarczy skorzystać z twierdzenia Riemanna).

Dla $\widetilde{w} \neq w$ niech $\eta := F_w(\widetilde{w})$. Mamy $\log|T_\eta \circ F_w| \in \mathcal{F}_{\widetilde{w}}$, a więc

$$\log|T_\eta \circ F_w| \le g_M(\cdot, \widetilde{w}). \tag{27.4}$$

Mamy więc

$$g_M(\widetilde{w}, w) = \log|F_w(\widetilde{w})| = \log|\eta| = \log|T_\eta(0)| = \log|T_\eta(F_w(w))| \le g_M(w, \widetilde{w}),$$

skąd wnioskujemy, że g_M jest symetryczna. W powyższej nierówności mamy więc w rzeczywistości równość. Lewa strona (27.4) jest funkcją subharmoniczną, zaś prawa harmoniczną na $M \setminus \{\widetilde{w}\}$. Są one równe w w, a więc z zasady maksimum także w (27.4) otrzymamy równość. Jeżeli teraz $F_w(\widetilde{w}) = F_w(\widehat{w})$ dla pewnego $\widehat{w}$, to $g_M(\widehat{w}, \widetilde{w}) = -\infty$, a więc $\widehat{w} = \widetilde{w}$. □

Metodę konstrukcji funkcji F w dowodzie Twierdzenia 27.4 nazywamy <u>przedłużeniem analitycznym</u>. Możemy sformułować osobno rezultat otrzymany przy jej pomocy.

Twierdzenie 27.5. *Niech M, N będą powierzchniami Riemanna, przy czym M jest jednospójna. Załóżmy, że $\{U_\alpha\}$ rodziną obszarów pokrywającą M i że dla każdego α mamy rodzinę $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{O}(U_\alpha, N)$ taką, że dla $f \in \mathcal{F}_\alpha$ oraz $z_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$ znajdziemy $\widetilde{f} \in \mathcal{F}_\beta$ takie, że $f = \widetilde{f}$ w otoczeniu z_0. Wtedy dla ustalonego $f_0 \in \mathcal{F}_{\alpha_0}$ znajdziemy $F \in \mathcal{O}(M, N)$ takie, że $F|_{U_{\alpha_0}} = f_0$.* □

28. Całkowanie przez części

Powierzchnia Riemanna jest w szczególności dwuwymiarową rozmaitością rzeczywistą. Na takiej rozmaitości M rozważamy wiązki wektorowe: wiązkę styczną TM, wiązkę kostyczną T^*M oraz $T^*M \wedge T^*M$. Przekroje tych wiązek to odpowiednio: pola wektorowe (lokalnie zapisujemy je w postaci $u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y$), 1-formy ($u\,dx + v\,dy$) oraz 2-formy ($u\,dx \wedge dy$).

Dla gładkiej funkcji u określonej na powierzchni Riemanna M kładziemy

$$d^c u := -u_y dx + u_x dy = i(-u_z dz + u_{\bar{z}} d\bar{z}).$$

Łatwo sprawdzamy ($\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$), że definicja ta nie zależy od konforemnej zmiany zmiennych. Zauważmy, że choć operator d^c jest rzeczywisty (funkcje rzeczywiste przekształca w rzeczywiste 1-formy), do jego dobrego zdefiniowania w istotny sposób użyliśmy struktury zespolonej na M.

Zauważmy, że $dd^c u = \Delta u\, dx \wedge dy$, a więc funkcja $u \in C^2(M)$ jest harmoniczna, gdy $dd^c u = 0$, oraz subharmoniczna, jeżeli $dd^c u \geq 0$ (łatwo sprawdzić, że ta nierówność nie zależy od konforemnej zmiany zmiennych).

Struktura zespolona wprowadza orientację na powierzchni Riemanna: odwzorowania przejścia są konforemne, a te mają dodatni jakobian rzeczywisty, czyli zachowują orientację. Możemy więc całkować 2-formy na M. Jednym z ważnych narzędzi będzie dla nas następująca konsekwencja wzoru Greena.

Propozycja 28.1. *Niech $D \Subset M$ będzie obszarem o brzegu klasy C^2. Wtedy dla $u, v \in C^2(\overline{D})$ mamy*

$$\int_D (udd^c v - vdd^c u) = \int_{\partial D} (ud^c v - vd^c u).$$

Dowód. Mamy

$$d(ud^c v - vd^c u) = udd^c v - vdd^c u + du \wedge d^c v - dv \wedge d^c u$$

oraz

$$du \wedge d^c v = (u_x v_x + u_y v_y) dx \wedge dy = dv \wedge d^c u. \qquad \square$$

Całkując przez części będziemy zwykle korzystać z następującego lematu, który natychmiast wynika z Propozycji 28.1, jeżeli obszar D jest gładki oraz funkcje g, h gładko przedłużają się na ∂D.

Lemat 28.2. *Załóżmy, że $D \Subset M$ jest obszarem, natomiast U, V zbiorami otwartymi takimi, że $V \Subset U \Subset D$, przy czym ∂U jest klasy C^2. Niech g, h będą ujemnymi funkcjami harmonicznymi w $D \setminus \overline{V}$ takimi, że $g_* = h_* = 0$ na ∂D. Wtedy*

$$\int_{\partial U} (gd^c h - hd^c g) = 0. \tag{28.1}$$

Dowód. Dla $\varepsilon > 0$ odp. małego chcemy najpierw skonstruować ciąg $g_\varepsilon \in \mathcal{SH} \cap C^\infty(D)$ taki, że $-\varepsilon \leq g_\varepsilon < 0$ w D, $g_\varepsilon = -\varepsilon$ w otoczeniu $\overline{U}$, $g_\varepsilon = g$ w pobliżu ∂D. Ciąg $\max\{g, -\varepsilon\}$ jest takim przykładem oprócz tego, że nie jest gładki. Wystarczy jednak zastąpić maksimum dwóch liczb zregularyzowanym maksimum: niech funkcja $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie rosnąca, wypukła i taka, że $\chi(t) = 0$ dla $t \leq -1$ i $\chi(t) = t$ dla $t \geq 1$. Połóżmy $\chi_j(t) := \chi(jt)/j$, wtedy $\chi_j \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jest również rosnąca, wypukła, $\chi(t) = 0$ dla $t \leq -1/j$ i $\chi(t) = t$ dla $t \geq 1/j$. Co więcej $\chi_j(t)$ maleje do $\max\{t, 0\}$, gdy $j \to \infty$. Wtedy funkcja $g_\varepsilon := -\varepsilon + \chi_j \circ (g + \varepsilon)$ dla j odp. dużego spełnia żądane własności.

Znajdziemy obszar D_ε o gładkim brzegu taki, że $g_\varepsilon = g$ w otoczeniu ∂D_ε. Dzięki temu, że $hdd^c g_\varepsilon \leq 0$ mamy

$$0 \geq \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{U}} [(g - g_\varepsilon) dd^c h - h dd^c (g - g_\varepsilon)] = -\int_{\partial U} [(g - \varepsilon) d^c h - h d^c (g - \varepsilon)]$$

korzystając z Propozycji 28.1. Stąd otrzymamy $\geq$ w (28.1), przeciwną nierówność dostaniemy zamieniając g i h. $\square$

Podamy teraz zastosowanie Lematu 28.2.

Twierdzenie 28.3. *Dla dowolnej powierzchni Riemanna M funkcja g_M jest symetryczna.*

Do dowodu potrzebować będziemy następującego faktu.

Propozycja 28.4. *Niech $D \Subset M$ będzie regularny. Wtedy $(g_D(\cdot, w))_* = 0$ na ∂D, $w \in D$.*

Dowód. Niech $\overline{K}(w, r) \subset D$. Z Twierdzenia 26.3 wynika, że zbiór $D \setminus \overline{K}(w, r)$ jest także regularny. Co więcej, dla

$$h := \sup\{v \in \mathcal{SH}^-(D \setminus \overline{K}(w, r)) : v^* \leq g_D(\cdot, w) \text{ na } \partial K(w, r)\}$$

mamy $h \in \mathcal{H}(D \setminus \overline{K}(w, r)) \cap C(\overline{D} \setminus K(w, r))$, $h = g_D(\cdot, w)$ na $\partial K(w, r)$, $h = 0$ na ∂D. Z własności funkcji subharmonicznych wnioskujemy, że

$$\begin{cases} g_D(\cdot, w) & \text{w } K(w, r), \\ h & \text{w } D \setminus K(w, r) \end{cases} \in \mathcal{F}_w,$$

a stąd $g_D(\cdot, w) \geq h$ w pobliżu ∂D. $\square$

Wykład 24, 10.12.2007

Dowód Twierdzenia 28.3. Przypuśćmy najpierw, że obszar $D \Subset M$ jest regularny. Dla $w, \widetilde{w} \in D$, $w \neq \widetilde{w}$, oznaczmy $g := g_D(\cdot, w)$, $\widetilde{g} := g_D(\cdot, \widetilde{w})$. Dla $r > 0$ takiego, że $\overline{K}(w, r) \subset D$, $\overline{K}(\widetilde{w}, r) \subset D$ i $\overline{K}(w, r) \cap \overline{K}(\widetilde{w}, r) = \emptyset$ z Lematu 28.2 otrzymamy

$$\int_{\partial K(w,r) \cup \partial K(\widetilde{w}, r)} [g\, d^c \widetilde{g} - \widetilde{g}\, d^c g] = 0. \tag{28.2}$$

Na $\partial K(w, r)$ mamy $|g| \leq C_1 - \log r$, a stąd

$$\left| \int_{\partial K(w,r)} g d^c \widetilde{g} \right| \leq C_2 r (C_1 - \log r),$$

gdzie stałe C_1, C_2 są niezależne od r. Zatem

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial K(w,r)} g\, d^c \widetilde{g} = \lim_{r \to 0} \int_{\partial K(\widetilde{w}, r)} \widetilde{g}\, d^c g = 0. \tag{28.3}$$

Z drugiej strony, w pobliżu w mamy $g = h + \log|\cdot - w|$, gdzie h jest harmoniczna. Wtedy

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial K(w,r)} \widetilde{g}\, d^c h = \lim_{r\to 0}\int_{K(w,r)} d\widetilde{g}\wedge d^c h = 0,$$

a zatem

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial K(w,r)} \widetilde{g}\, d^c g = \lim_{r\to 0}\int_{\partial K(w,r)} \widetilde{g}\, d^c \log|\cdot - w| = 2\pi\widetilde{g}(w),$$

gdyż $r^{-1}d^c\log|\cdot - w|$ jest miarą powierzchniową na $\partial K(w,r)$. Łącząc to z (28.2) i (28.3) mamy $\widetilde{g}(w) = g(\widetilde{w})$, czyli symetryczność g_D, gdy $D \Subset M$ jest obszarem regularnym.

Dla ustalonego $w \in M$ niech $\mathcal{D}_w$ oznacza rodzinę obszarów regularnych $D \Subset M$ zawierających w. Zdefiniujmy

$$u_D := \begin{cases} -g_D(\cdot, w) & \text{na } D\setminus\{w\} \\ 0 & \text{na } M\setminus D. \end{cases}$$

Wtedy $u_D \in \mathcal{SH}(M\setminus\{w\})$, $u_D \le -g_M(\cdot, w)$. Rodzina $\{u_D\}_{D\in\mathcal{D}_w}$ jest rodziną Perrona w $M\setminus\{w\}$ (bo dla $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_w$ istnieje $D \in \mathcal{D}_w$ takie, że $D_1 \cup D_2 \subset D$). Z Twierdzenia 26.2 otrzymamy,

$$u := \sup_{D\in\mathcal{D}_w} u_D \in \mathcal{H}(M\setminus\{w\}),$$

a stąd $-u \in \mathcal{F}_w$. Mamy zatem $g_M(\cdot, w) = -u$, czyli

$$g_M(z,w) = \inf_{D\in\mathcal{D}_z\cap\mathcal{D}_w} g_D(z,w)$$

i wystarczy skorzystać z pierwszej części. □

Udowodnimy teraz twierdzenie podające wzór na funkcję Greena powierzchni Riemanna, której nakryciem uniwersalnym jest dysk. (Później pokażemy, że w rzeczywistości każda powierzchnia g-hiperboliczna jest nakrywana przez dysk.)

Twierdzenie 28.5. (Myrberg, 1935) *Przypuśćmy, że $p : \Delta \to M$ jest nakryciem (holomorficznym). Wtedy*

$$g_M(z, p(\lambda)) = \sum_{\mu\in p^{-1}(z)} g_\Delta(\lambda, \mu), \quad \lambda\in\Delta,\ z\in M. \tag{28.4}$$

Dowód. Dla ustalonego $\lambda \in \Delta$ niech $u(z)$ oznacza prawą stronę (28.4). Jeżeli U jest prawidłowym zbiorem otwartym w M, zaś V_j płatami nad U, to

$$u(z) = \sum_j g_\Delta(\varphi_j(z), \lambda), \quad z \in U,$$

gdzie $\varphi_j := (p|_{V_j})^{-1} \in \mathcal{O}(U)$. Stąd łatwo wnioskujemy, że albo $u \equiv -\infty$ albo $u \in \mathcal{F}_{p(\lambda)}$, a więc mamy $\ge$ w (28.4).

W celu wykazania przeciwnej nierówności ustalmy z kolei $z \in M$ i niech $p^{-1}(z) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Połóżmy

$$v(\zeta) := g_M(z, p(\zeta)), \quad v_N(\zeta) := \sum_{j=1}^{N} g_\Delta(\zeta, \lambda_j), \quad \zeta \in \Delta.$$

Z symetryczności g_M otrzymamy, że albo $v \equiv -\infty$ (wtedy dowód jest zakończony) albo $v \in \mathcal{SH}^-(\Delta)$, natomiast funkcja $v_N \in \mathcal{SH}^-(\Delta)$ ma bieguny logarytmiczne w $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ oraz $(v_N)_* = 0$ na $\partial\Delta$. Wnioskujemy, że $v - v_N \in \mathcal{SH}(\Delta)$ oraz $(v - v_N)^* \le 0$ na $\partial\Delta$, a więc z zasady maksimum $v \le v_N$. $\square$

29. Powierzchnie nie-g-hiperboliczne

Pokażemy najpierw, że na powierzchniach Riemanna, które nie są g-hiperboliczne zawsze mamy jednoznaczność problemu Dirichleta.

Propozycja 29.1. *Przypuśćmy, że D jest dowolnym obszarem w powierzchni Riemanna M, która nie jest g-hiperboliczna. Wtedy dla $u \in \mathcal{SH} \cap L^\infty(D) \cap C(\overline{D})$ mamy $\sup_D u = \sup_{\partial D} u$. W szczególności, dla $\varphi \in C \cap L^\infty(\partial D)$ istnieje co najwyżej jedna $h \in \mathcal{H} \cap L^\infty(D) \cap C(\overline{D})$ taka, że $h = \varphi$ na ∂D.*

Dowód. Dla $A > \sup_{\partial D} u$ połóżmy

$$v := \begin{cases} \max\{u, A\} & \text{w } D \\ A & \text{na } M \setminus D. \end{cases}$$

Wtedy v jest ograniczoną funkcją subharmoniczną, a więc stałą. $\square$

Następny rezultat ma fundamentalne znaczenie.

Twierdzenie 29.2. *Załóżmy, że M jest powierzchnią Riemanna, która nie jest g-hiperboliczna, $z_0 \in M$, natomiast f jest funkcją holomorficzną posiadającą osobliwość w z_0 (określoną w pewnym otoczeniu z_0). Wtedy istnieje jedyna funkcja harmoniczna h w $M \setminus \{z_0\}$ taka, że h jest ograniczona poza dowolnym otoczeniem z_0, oraz*

$$\lim_{z \to z_0} (h(z) - \operatorname{Re} f(z)) = 0. \tag{29.1}$$

W celu udowodnienia Twierdzenia 29.2 będziemy potrzebować kilku lematów.

Lemat 29.3. *Niech M będzie powierzchnią Riemanna, która nie jest g-hiperboliczna, zaś U, V zbiorami otwartymi takimi, że $V \Subset U \Subset M$, przy czym ∂U jest klasy C^2. Przypuśćmy, że h jest ograniczoną funkcją harmoniczną w $M \setminus \overline{V}$. Wtedy*

$$\int_{\partial U} d^c h = 0.$$

Dowód. Bez straty ogólności można założyć, że $h \ge 0$. Niech $\mathcal{D}$ oznacza rodzinę obszarów regularnych $D \Subset M$ takich, że $\overline{U} \subset D$. Niech W będzie zbiorem otwartym o gładkim brzegu takim, że $V \Subset W \Subset U$. Dla $D \in \mathcal{D}$ niech $h_D \in \mathcal{H}(D \setminus \overline{W}) \cap C(\overline{D} \setminus W)$ będzie taka, że $h_D = h$ na ∂W i $h_D = 0$ na ∂D. Kładąc dodatkowo $h_D := 0$ w $M \setminus D$ otrzymamy $h_D \in \mathcal{SH}(M \setminus \overline{W})$. Z Twierdzenia 26.2,

$$\widetilde{h} := \sup_{D \in \mathcal{D}} h_D \in \mathcal{H}(M \setminus \overline{W}) \cap C(M \setminus W),$$

$\widetilde{h} = h$ na ∂W. Mamy także $\widetilde{h} \leq h$, a stąd $\widetilde{h}$ jest ograniczona. Z Propozycji 29.1 wynika, że $h = \widetilde{h}$ w $M \setminus W$ (tu korzystamy z tego, że M nie jest g-hiperboliczna), czyli

$$h = \sup_{D \in \mathcal{D}} h_D.$$

Podobnie jak h_D definiujemy funkcje u_D, przy czym zakładamy, że $u_D = 1$ na ∂W. Otrzymamy

$$1 = \sup_{D \in \mathcal{D}} u_D.$$

Z Lematu 28.2 (zastosowanego dla funkcji $-h_D, -u_D$) dostaniemy

$$\int_{\partial U} (u_D d^c h_D - h_D d^c u_D) = 0, \quad D \in \mathcal{D}.$$

Z dowodu Twierdzenia 26.2 wynika, że dla dowolnego koła $\overline{K}(z_0, r) \subset M \setminus \overline{W}$ istnieje rosnący ciąg $D_j \in \mathcal{D}$ taki, że $\lim h_{D_j} = h$, $\lim u_{D_j} = 1$ w $K(z_0, r)$. Ponieważ ∂U możemy pokryć skończoną liczbę takich kół, możemy założyć, że zbieżność zachodzi w otoczeniu ∂U. Wystarczy teraz skorzystać z drugiej części Propozycji 22.9. $\square$

Przykład. Jeżeli $h(z) = \log |z|$ i $r > 0$, to

$$\int_{\partial K(0,r)} d^c h = 2\pi.$$

Pokazuje to, że założenia w Lemacie 29.3 o tym, że M nie jest g-hiperboliczna oraz że h jest ograniczona są konieczne.

Będziemy także potrzebować dwóch lematów dotyczących funkcji harmonicznych i holomorficznych w pierścieniu.

Lemat 29.4. *Dla funkcji harmonicznej h w pierścieniu $P := \{r < |z| < R\}$ następujące warunki są równoważne*

i) Istnieje $f \in \mathcal{O}(P)$ takie, że $h = \operatorname{Re} f$;

ii) $\displaystyle\int_{\partial K(0,\rho)} d^c h = 0$, $r < \rho < R$.

Dowód. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(P)$ jest takie, że $h = \operatorname{Re} f$, to

$$f_z dz = f_x dz = dh + i d^c h.$$

Ponieważ $\int_{\partial K(0,\rho)} du = 0$ dla dowolnej gładkiej funkcji u na $\partial K(0, \rho)$, mamy i)⇒ii). W celu pokazania ii)⇒i) dla ustalonego $z_0 \in P$ kładziemy

$$f(z) := h(z_0) + \int_\gamma (dh + i d^c h),$$

gdzie γ jest drogą łączącą z_0 i z. Z ii) łatwo wynika, że definicja nie zależy od wyboru γ, w standardowy sposób pokazujemy też, że $f \in \mathcal{O}(P)$. $\square$

Lemat 29.5. *Niech $f \in \mathcal{O}(P)$, gdzie $P := \{r < |z| < R\}$, przy czym $r < R/2$. Oznaczmy $h := \operatorname{Re} f$ i załóżmy, że*

$$\lim_{|z| \to r^+} h(z) = 0, \quad \limsup_{|z| \to R^-} |h(z)| \le A.$$

Wtedy

$$|h(z)| \le \frac{16A|z|}{R}, \quad r < |z| \le R/2.$$

Dowód. Funkcja f rozwija się w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in P.$$

Biorąc części rzeczywiste i zapisując $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ otrzymamy rozwinięcie w szereg Fouriera

$$h(\rho e^{it}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\alpha_n \rho^n + \alpha_{-n}\rho^{-n}) \cos(nt) - (\beta_n \rho^n - \beta_{-n}\rho^{-n}) \sin(nt) \right], \tag{29.2}$$

gdzie dla $n = 0, 1, \dots$ i $r < \rho < R$

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{-n}\rho^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\rho e^{it}) \cos(nt) dt,$$
$$\beta_n \rho^n - \beta_{-n}\rho^{-n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\rho e^{it}) \sin(nt) dt.$$

Gdy $\rho \to r^+$, to wnioskujemy stąd, że

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_n r^n + \alpha_{-n} r^{-n} = \beta_n r^n - \beta_{-n} r^{-n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{29.3}$$

natomiast, gdy $\rho \to R^-$

$$|\alpha_n R^n + \alpha_{-n} R^{-n}| \le 2A, \quad |\beta_n R^n - \beta_{-n} R^{-n}| \le 2A, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{29.4}$$

Z (29.2) i (29.3) mamy

$$h(\rho e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n} - r^{2n}}{\rho^n} \left(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt) \right),$$

natomiast z (29.3) i (29.4) (bo $r < R/2$)

$$|\alpha_n| \le \frac{4A}{R^n}, \quad |\beta_n| \le \frac{4A}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Stąd

$$|h(\rho e^{it})| \le 8A \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n = \frac{8A\rho}{R - \rho} \le \frac{16A\rho}{R},$$

gdy $r < \rho \leq R/2$. $\square$

Wykład 25, 17.12.2007

Przykład. Funkcje $h(z) = \log|z|/(-\log r) + 1$ nie spełniają tezy lematu (np. dla $|z| = 2r$ mamy $h(z) = \log 2/(-\log r) \nleq Cr$). Pokazuje to, że założenie, że h jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej jest konieczne.

Dowód Twierdzenia 29.2. Jednoznaczność wynika natychmiast z tego, że M nie jest g-hiperboliczna (stosujemy Propozycję 29.1 dla $D = M \setminus \{z_0\}$). Niech $R > 0$ będzie takie, że f jest holomorficzna w otoczeniu $\overline{K}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ i niech $0 < r < R$. Istnieje (jedyne dzięki Propozycji 29.1) $h_r \in \mathcal{H} \cap L^\infty(M \setminus \overline{K}(z_0, r)) \cap C(M \setminus K(z_0, r))$ takie, że $h_r = \operatorname{Re} f$ na $\partial K(z_0, r)$. Z Lematu 29.3

$$\int_{\partial K(z_0,\rho)} d^c h_r = 0, \quad r < \rho \leq R,$$

zaś z Lematów 29.4 i 29.5 otrzymamy

$$\max_{\partial K(z_0,\rho)} |h_r - \operatorname{Re} f| \leq \frac{16\rho}{R} \max_{\partial K(z_0,R)} |h_r - \operatorname{Re} f|, \quad r \leq \rho \leq \frac{R}{2}. \tag{29.5}$$

Połóżmy

$$C_{r,\rho} := \max_{\partial K(z_0,\rho)} |h_r| = \max_{M \setminus K(z_0,\rho)} |h_r|, \quad r \leq \rho \leq R$$

(korzystamy z Propozycji 29.1), skąd

$$C_{r,\rho_2} \leq C_{r,\rho_1}, \quad r < \rho_1 \leq \rho_2 \leq R. \tag{29.6}$$

Chcemy pokazać, że

$$C_\rho := \sup_{0<r\leq\rho} C_{r,\rho} < \infty, \quad 0 < \rho \leq R. \tag{29.7}$$

Z (29.6) mamy

$$C_{\rho_2} \leq C_{\rho_1}, \quad 0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq R,$$

a więc (29.7) wystarczy pokazać tylko dla odp. małych ρ. Oznaczmy

$$M_\rho := \max_{\partial K(z_0,\rho)} |\operatorname{Re} f|, \quad 0 < \rho \leq R.$$

Korzystając z (29.5) i (29.6) dostaniemy

$$C_{r,\rho} \leq M_\rho + \frac{16\rho}{R}(C_{r,R} + M_R) \leq M_\rho + \frac{16\rho}{R}(C_{r,\rho} + M_R), \quad r \leq \rho \leq \frac{R}{2}.$$

W efekcie

$$C_{r,\rho} \leq 2M_\rho + M_R, \quad r \leq \rho \leq \frac{R}{32},$$

czyli otrzymaliśmy (29.7). Pokazaliśmy więc, że dla ustalonego $\rho \in (0, R]$ ciąg h_r, $0 < r \leq \rho$, jest jednostajnie ograniczony w otoczeniu $\partial K(z_0, \rho)$. Dzięki Twierdzeniu

22.10 znajdziemy podciąg zbieżny jednostajnie na $\partial K(z_0, \rho)$, natomiast korzystając ponownie z Propozycji 29.1 jest on zbieżny jednostajnie na $M \setminus K(z_0, \rho)$. Stosując metodę diagonalizacyjną znajdziemy podciąg zbieżny lokalnie jednostajnie na $M \setminus \{z_0\}$ do pewnej funkcji harmonicznej h. Przechodząc z r do 0 w (29.5) otrzymamy oszacowanie, z którego wynika (29.1). $\square$

Funkcja h z Twierdzenia 29.2 dla $f(z) = 1/(z-z_0)$ będzie pełnić podobną rolę do funkcji Greena z biegunem w z_0 na powierzchniach g-hiperbolicznych. Zauważmy, w pobliżu z_0 mamy

$$g_M(z, z_0) = \log|z - z_0| + \text{funkcja harmoniczna}$$

oraz

$$h = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z - z_0} + \text{funkcja harmoniczna.}$$

Dobrze obrazuje to dowód następnego rezultatu.

Twierdzenie 29.6. *Na każdej powierzchni Riemanna istnieje niestała funkcja meromorficzna.*

Dowód. Wybierzmy $w, \widetilde{w} \in M$, $w \neq \widetilde{w}$. Jeżeli M jest powierzchnią g-hiperboliczną, to połóżmy $F := g_z/\widetilde{g}_z$, gdzie $g = g_M(\cdot, w)$, $\widetilde{g} = g_M(\cdot, \widetilde{w})$. Można wtedy łatwo pokazać, że definicja F nie zależy od wyboru mapy, a więc F jest funkcją holomorficzną w $M \setminus \{w, \widetilde{w}\}$. Co więcej, w pobliżu w mamy

$$g_z = \frac{1}{2(z - w)} + \text{funkcja holomorficzna,}$$

a zatem F ma w w biegun oraz zero w $\widetilde{w}$.

Jeżeli M nie jest g-hiperboliczna, to niech $h \in \mathcal{H}(M \setminus \{w\})$ będzie dane przez Twierdzenie 29.2 dla $z_0 = w$ i $f(z) = 1/(z - w)$, natomiast $\widetilde{h} \in \mathcal{H}(M \setminus \{\widetilde{w}\})$ dla $z_0 = \widetilde{w}$ i $\widetilde{f}(z) = 1/(z - \widetilde{w})$. Wtedy $F := h_z/\widetilde{h}_z$ jest także globalnie określone, holomorficzne w $M \setminus \{w, \widetilde{w}\}$. W pobliżu w mamy

$$h_z = -\frac{1}{2(z - w)^2} + \text{funkcja holomorficzna,}$$

a zatem F ma w w biegun rzędu ≥ 2 oraz zero krotności ≥ 2 w $\widetilde{w}$. $\square$

Dzięki Twierdzeniu 29.2 możemy przede wszystkim scharakteryzować jednospójne powierzchnie, które nie są g-hiperboliczne.

Twierdzenie 29.7. *Niech M jednospójną powierzchnią Riemanna, która nie jest g-hiperboliczna. Wtedy albo $M \simeq \mathbb{P}$ (jeżeli M jest zwarta) albo $M \simeq \mathbb{C}$ (w przeciwnym wypadku).*

Dowód. Ustalmy $z_0 \in M$ i w otoczeniu z_0 połóżmy $f(z) := 1/(z - z_0)$. Niech $h \in \mathcal{H}(M \setminus \{z_0\})$ będzie funkcją daną przez Twierdzenie 29.2. Znajdziemy dysk D_0 zawierający z_0 oraz $F_0 \in \mathcal{O}(D_0 \setminus \{z_0\})$ takie, że $F_0 - f$ jest ograniczona w pobliżu z_0 (a więc F_0 ma prosty biegun w z_0) oraz $h = \mathrm{Re}\, F_0$ w D_0. Korzystając z Twierdzenia 27.5 znajdziemy $F \in \mathcal{O}(M \setminus \{z_0\})$ takie, że $\mathrm{Re}\, F = h$. Co więcej, F ma w z_0 biegun prosty, mamy więc $F \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P})$ oraz F jest iniektywne w otoczeniu z_0. W celu zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że F jest iniektywne na M (bo

$\mathbb{P}$ i $\mathbb{C}$ to, z dokładnością do biholomorfizmu, jedyne jednospójne obszary w $\mathbb{P}$, które nie są g-hiperboliczne).

Udowodnimy najpierw, że funkcja F jest ograniczona poza dowolnym otoczeniem z_0. Dla $\widetilde{f}(z) := i/(z - z_0)$ niech $\widetilde{h} \in \mathcal{H}(M \setminus \{z_0\})$ będzie funkcją daną przez Twierdzenie 29.2 ($\widetilde{h}$ jest więc w szczególności ograniczona poza dowolnym otoczeniem z_0), natomiast $\widetilde{F} \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P})$ funkcją skonstruowaną jak poprzednio, taką, że $\widetilde{h} = \operatorname{Re} \widetilde{F}$. Pokażemy, że funkcja $\widetilde{F} - iF$ jest stała, skąd otrzymamy, że funkcja $\operatorname{Im} F + \widetilde{h}$ jest stała. Ponieważ funkcja $\widetilde{F} - \widetilde{f}$ jest ograniczona w pobliżu z_0, funkcja $\widetilde{F} - iF$ jest holomorficzna na M. Znajdziemy $r > 0$ i $A > 0$ takie, że F i $\widetilde{F}$ są iniektywne na $\overline{K}(z_0, r)$ oraz $|h| \leq A$, $|\widetilde{h}| \leq A$ na $M \setminus K(z_0, r)$. Z własności f i $\widetilde{f}$ wynika, że istnieje $w \in \overline{K}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ takie, że $|h(w)| \geq 2A$ i $|\widetilde{h}(w)| \geq 2A$. Niech $G := 1/(F - F(w))$ i $\widetilde{G} := 1/(\widetilde{F} - \widetilde{F}(w))$. Wtedy $G, \widetilde{G} \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P})$, $G(z_0) = \widetilde{G}(z_0) = 0$, $G, \widetilde{G}$ mają bieguny proste w w. Znajdziemy $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ takie, że $\widetilde{G} - T \circ G$ jest holomorficzna w pobliżu w i znika w w. Co więcej,

$$|F(z) - F(w)| \geq |h(z) - h(w)| \geq A, \quad z \in M \setminus K(z_0, r),$$

a zatem $|G| \leq 1/A$, i podobnie $|\widetilde{G}| \leq 1/A$, na $M \setminus K(z_0, r)$. Z tego, że M nie jest g-hiperboliczna wynika więc, że $\widetilde{G} = T \circ G$ (korzystamy z Propozycji 29.1 dla $D = M \setminus \{w\}$), a zatem $\widetilde{F} = aF + b$ dla pewnych $a \in \mathbb{C}_*$, $b \in \mathbb{C}$. Jedyną możliwością jest $a = i$, pokazaliśmy więc, że F jest ograniczona poza dowolnym otoczeniem z_0.

Dla dowolnego $w \in M$ znaleźliśmy zatem $F \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P})$ takie, że F ma prosty biegun w w oraz F jest ograniczona poza dowolnym otoczeniem w. Klasę takich odwzorowań oznaczmy przez $\mathcal{A}_w$. Chcemy pokazać, że dla $w, \widetilde{w} \in M$

$$F \in \mathcal{A}_w,\ \widetilde{F} \in \mathcal{A}_{\widetilde{w}} \ \Rightarrow\ \exists\, T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}) :\ \widetilde{F} = T \circ F. \tag{29.8}$$

Zauważmy najpierw, że z (29.8) łatwo wynika iniektywność $F \in \mathcal{A}_w$: jeżeli $F(\widetilde{w}) = F(\widehat{w})$, to wybierając dowolne $\widetilde{F} \in \mathcal{A}_{\widetilde{w}}$ znajdziemy $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ takie, że $\widetilde{F} = T \circ F$. Wtedy $\infty = \widetilde{F}(\widetilde{w}) = \widetilde{F}(\widehat{w})$, mamy więc $\widetilde{w} = \widehat{w}$. Do zakończenia dowodu wystarczy zatem pokazać (29.8).

Dla $w, \widetilde{w} \in M$ spełniających (29.8) będziemy pisać $w \sim \widetilde{w}$. Jest oczywiste, że relacja $\sim$ jest symetryczna i przechodnia. Dla $F, G \in \mathcal{A}_w$ znajdziemy transformację liniową T (a więc $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$) taką, że funkcja $F - T \circ G$ jest ograniczona w pobliżu w i znika w w, a stąd $F = T \circ G$. Pokazaliśmy więc, że $\sim$ jest relacją równoważności. W celu wykazania (29.8) dla wszystkich $w, \widetilde{w}$ wystarczy wykazać, że każda klasa równoważności względem $\sim$ jest otwartym podzbiorem M (dzięki spójności M). Dla $F \in \mathcal{A}_w$ znajdziemy obszar $U \Subset M$, otoczenie w, taki, że dla $V := F(U)$ mamy $F|_U \in \operatorname{Aut}(U, V)$ oraz $F^{-1}(V) = U$ (korzystamy z tego, że F jest ograniczona poza dowolnym otoczeniem w). Ze zwrotności $\sim$ wynika, że U nie zależy od wyboru $F \in \mathcal{A}_w$. Dla $\widetilde{w} \in U$ oraz $\widetilde{F} \in \mathcal{A}_{\widetilde{w}}$ znajdziemy $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ takie, że $T(F(\widetilde{w})) = \infty$ oraz takie, że funkcja $\widetilde{F} - T \circ F$ jest holomorficzna w otoczeniu $\widetilde{w}$ i znika w $\widetilde{w}$. Znajdziemy obszar $\widetilde{V} \subset V$, otoczenie $F(\widetilde{w})$, takie, że $T(\widetilde{V}) \subset V$. Wtedy $\widetilde{U} := (T \circ F)^{-1}(\widetilde{V}) \subset U$, a stąd funkcja $T \circ F$ jest ograniczona poza otoczeniem $\widetilde{w}$, a więc $T \circ F \in \mathcal{A}_{\widetilde{w}}$. Wnioskujemy, że $\widetilde{F} = T \circ F$, a zatem $\widetilde{w} \sim w$. Udowodniliśmy (29.8) co kończy dowód twierdzenia. □

Wykład 26, 7.01.2008

30. Pewne zastosowania

Dzięki Twierdzeniom 27.4 i 29.7 otrzymaliśmy więc *twierdzenie uniformizacyjne.*

Twierdzenie 30.1. *Jedynymi jednospójnymi powierzchniami Riemanna są, z dokładnością do biholomorfizmu,* Δ, $\mathbb{C}$ *i* $\mathbb{P}$. $\square$

Podamy teraz pewne zastosowania tego rezultatu. Natychmiast otrzymujemy następujący fakt.

Twierdzenie 30.2. *Każda powierzchnia Riemanna homeomorficzna z* $\mathbb{P}$ *jest także biholomorficzna z* $\mathbb{P}$. $\square$

Innymi słowy, w przeciwieństwie do torusa, na sferze topologicznej istnieje dokładnie jedna struktura zespolona.

Dzięki Twierdzeniu 30.1 wszystkie powierzchnie Riemanna możemy podzielić na trzy klasy: nakrywane przez Δ (będziemy je nazywać hiperbolicznymi powierzchniami Riemanna), przez $\mathbb{C}$ (powierzchnie paraboliczne) oraz przez $\mathbb{P}$ (eliptyczne). Wszystkie niehiperboliczne powierzchnie zostały opisane w Twierdzeniu 25.3. Powierzchnie hiperboliczne możemy scharakteryzować następująco.

Twierdzenie 30.3. *Powierzchnia Riemanna* M *jest hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje holomorficzne* $\mathbb{C} \to M$ *są stałe.*

Dowód. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, M)$ zaś $p : \Delta \to M$ jest nakryciem, to znajdziemy podniesienie $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \Delta)$ takie, że $p \circ \widetilde{f} = f$. Z twierdzenia Liouville'a funkcja $\widetilde{f}$ jest stała, a więc f jest stała. Z drugiej strony, jeżeli nakryciem uniwersalnym M jest $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{P}$, to oczywiście znajdziemy niestałe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, M)$. $\square$

Wniosek 30.4. *Każdy obszar na hiperbolicznej powierzchni Riemanna jest także hiperboliczną powierzchnią Riemanna.* $\square$

Na powierzchniach niehiperbolicznych ($\mathbb{P}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_*$, torusy) nie istnieje funkcja Greena, mamy więc następujący rezultat.

Twierdzenie 30.5. *Każda powierzchnia g-hiperboliczna jest hiperboliczna.* $\square$

Rezultat odwrotny do Twierdzenia 30.5 nie jest prawdziwy, co pokazuje np. przypadek powierzchni z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 30.6. $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ *jest hiperboliczną powierzchnią Riemanna.* $\square$

Z Twierdzenia 30.6 łatwo wynika twierdzenie Montela oraz *Wielkie Twierdzenie Picarda.*

Twierdzenie 30.7. (Montel, 1912) *Dla obszaru* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *rodzina* $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ *jest normalna (tzn. z każdego ciągu możemy wybrać podciąg zbieżny lokalnie jednostajnie albo do funkcji holomorficznej albo do* ∞*).*

Dowód. Można łatwo pokazać, że rezultat jest czysto lokalny, wystarczy więc rozpatrzyć przypadek $\Omega = \Delta$. Wybierzmy ciąg $f_n \in \mathcal{O}(\Delta, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, przechodząc w razie potrzeby do podciągu, bez straty ogólności możemy założyć, że $f_n(0) \to w_0$ dla pewnego $w_0 \in \mathbb{P}$. Przypuśćmy najpierw, że $w_0 \neq 0, 1, \infty$. Jeżeli $p : \Delta \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

jest nakryciem holomorficznym takim, że $p(0) = w_0$, to dla każdego n znajdziemy podniesienie $\widetilde{f}_n \in \mathcal{O}(\Omega, \Delta)$ takie, że $f_n = p \circ \widetilde{f}_n$ i $\widetilde{f}_n(0) \to 0$. Z lematu Montela i zasady maksimum wynika wtedy, że istnieje podciąg $\widetilde{f}_{n_k}$ zbieżny do pewnego $\widetilde{g} \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta)$, a stąd podciąg f_{n_k} jest zbieżny do $p \circ \widetilde{g}$.

W przypadku, gdy $w_0 = 1$ znajdziemy $g_n \in \mathcal{O}(\Delta, \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\})$ takie, że $g_n^2 = f_n$ (ponieważ $f_n \neq 0$). Zamieniając ewentualnie g_n z $-g_n$ możemy założyć, że $g_n(0) \to -1$. Korzystając z poprzedniej części znajdziemy lokalnie jednostajnie zbieżny podciąg g_{n_k}, a więc f_{n_k} jest także lokalnie jednostajnie zbieżny. Jeżeli $w_0 = 0$ lub $w_0 = \infty$, to znajdziemy $T \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{P})$ takie, że $T(\{0, 1, \infty\}) = \{0, 1, \infty\}$ oraz $T(w_0) = 1$, i możemy powtórzyć poprzednie rozumowanie dla funkcji $T \circ f_n$. $\square$

Twierdzenie 30.8. (Picard, 1879) *Funkcja holomorficzna posiadająca istotną osobliwość omija co najwyżej jedną wartość.*

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja holomorficzna f w $\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, posiadająca istotną osobliwość w z_0, omija dwie wartości $w_0 \neq w_1$. Składając f z odp. funkcją liniową możemy założyć, że $w_0 = 0$, $w_1 = 1$. Z twierdzenia Montela wynika, że ciąg $f_n(z) := f(z/n)$ jest rodziną normalną. Znajdziemy zatem podciąg f_{n_k} albo jednostajnie zbieżny na okręgu $\partial K(z_0, \varepsilon/2)$ albo jednostajnie rozbieżny do ∞ na tym okręgu. W pierwszym przypadku f byłoby jednostajnie ograniczone na okręgach $\partial K(z_0, \varepsilon/(2n_k))$, skąd (i z zasady maksimum) wynikałoby, że funkcja f jest ograniczona w pobliżu z_0. W drugim przypadku podobnie dostalibyśmy $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Otrzymalibyśmy więc, że z_0 jest albo osobliwością usuwalną albo biegunem - sprzeczność. $\square$

Możemy też łatwo pokazać następujący fakt.

Twierdzenie 30.9. *Każda powierzchnia Riemanna ma przeliczalną bazę topologii.*

Dowód. Jeżeli $p : \widetilde{M} \to M$ jest nakryciem uniwersalnym powierzchni M, to $\widetilde{M}$ ma przeliczalną bazę topologii $\mathcal{U}$. Można wtedy łatwo sprawdzić, że $\{p(U) : U \in \mathcal{U}\}$ jest bazą topologii M. $\square$

Przykład. Niech $M := \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2/\sim$, gdzie $(t, z) \sim (\widetilde{t}, \widetilde{z})$ jeżeli albo $(t, z) = (\widetilde{t}, \widetilde{z})$ albo $t \neq \widetilde{t}$, $z_1 = \widetilde{z}_1$ oraz $t + z_1 z_2 = \widetilde{t} + \widetilde{z}_1 \widetilde{z}_2$. Jeżeli p oznacza rzutowanie $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \to M$, dla $t \in \mathbb{R}$ niech $U_t := p(\{t\} \times \mathbb{C}^2)$ oraz $\varphi_t : U_t \ni [(t, z)] \longmapsto z \in \mathbb{C}^2$. Wtedy φ_t jest bijekcją oraz

$$\varphi_{\widetilde{t}} \circ \varphi_t^{-1} : \mathbb{C}_* \times \mathbb{C} \ni z \longmapsto \big(z_1, \frac{t - \widetilde{t}}{z_1} + z_2\big) \in \mathbb{C}_* \times \mathbb{C}$$

jest dyfeomorfizmem dla $t, \widetilde{t} \in \mathbb{R}$, $t \neq \widetilde{t}$. Można łatwo sprawdzić, że rodzina $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tworzy atlas na M (oraz definiuje topologię, która jest w szczególności spójna), a więc M jest rozmaitością zespoloną wymiaru 2 (odwzorowania przejścia są w naszym przypadku w szczególności wymierne). Zbiór $p(\mathbb{R} \times \{0\})$ jest jednak nieprzeliczalny i dyskretny, a więc M nie może mieć przeliczalnej bazy topologii. Pokazuje to, że Twierdzenie 30.9 jest bardzo specjalną własnością jednowymiarowych rozmaitości zespolonych.

31. Elementy geometrii riemannowskiej

Zakładamy, że M jest rozmaitością rzeczywistą wymiaru n. Pole wektorowe na M, czyli odzworowanie $X \in C^\infty(M, TM)$ takie, że $X|_p \in T_p M$ dla $p \in M$, możemy identyfikować z odwzorowaniami $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, które są $\mathbb{R}$-liniowe i takie, że

$$X(fg) = fXg + gXf, \quad f, g \in C^\infty(M)$$

(robimy to poprzez relację $Xf = d_X f$, gdzie $d_X f$ jest pochodną kierunkową). Pola wektorowe możemy więc lokalnie zapisywać w postaci $X = X^i \partial_i$, gdzie $\partial_i := \partial/\partial x_i$, zbiór pól wektorowych na M oznaczamy $\mathcal{X}(M)$. Dla $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ mamy $[X, Y] := XY - YX \in \mathcal{X}(M)$.

Metryka riemannowska na M to dodatnio określone, symetryczne, 2-liniowe (nad $\mathbb{R}$) odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$. Innymi słowy, dla każdego $p \in M$ określamy iloczyn skalarny na $T_p M$, gładko zależny od p. Lokalnie definiujemy $g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle$, wtedy (g_{ij}) jest dodatnio określoną macierzą symetryczną, której wyrazami są funkcje gładkie. Lokalnie naszą metrykę możemy wtedy zapisać w postaci

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Rozmaitość z metryką riemannowską nazywamy rozmaitością riemannowską. Odwzorowanie $f : M \to N$, gdzie (M, ds^2_M) i (N, ds^2_N) są rozmaitościami riemannowskimi, nazywamy izometrią, jeżeli f jest dyfeomorfizmem takim, że $f_* ds^2_N = ds^2_M$.

Pierwszym podstawowym rezultatem jest twierdzenie o istnieniu koneksji metrycznej.

Twierdzenie 31.1. *Na rozmaitości riemannowskiej istnieje jednoznacznie wyznaczona koneksja metryczna, tj. odwzorowanie*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$$

o następujących własnościach

i) ∇ *jest* $C^\infty(M)$*-liniowe względem* X *i* $\mathbb{R}$*-liniowe względem* Y*;*
ii) $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{X}(M)$*;*
iii) $\nabla_X(fY) = Xf\, Y + f \nabla_X Y, \quad f \in C^\infty(M),\ X, Y \in \mathcal{X}(M)$*;*
iv) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$*.*

Dowód (nie było na wykładzie). Załóżmy najpierw, że ∇ jest odwzorowaniem spełniającym ii) oraz iv). Wtedy dla $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ mamy

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Sumując pierwsze dwa równania i odejmując ostatnie otrzymamy

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle =& X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \end{aligned} \tag{31.1}$$

Pokazuje to, że takie odwzorowanie jest jednoznacznie wyznaczone. Co więcej, (31.1) definiuje ∇ i łatwo sprawdzamy, że spełnia one żądane własności. □

Przeanalizujemy teraz koneksję we współrzędnych lokalnych. Niech $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^i \partial_i$, wtedy

$$\nabla_X Y = X^i(\partial_i Y^k + Y^j \Gamma^k_{ij}) \partial_k = XY + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} \partial_k,$$

gdzie Γ^k_{ij} to symbole Christoffela zdefiniowane przez relację $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$. Z (31.1) łatwo pokazujemy, że

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

gdzie (g^{kl}) jest macierzą odwrotną do (g_{ij}).

Niech $\gamma \in C^1((a,b),M)$. Zauważmy, że jeżeli X jest lokalnym polem wektorowym takim, że $X \circ \gamma = \dot\gamma$, to dla $Y \in \mathcal{X}(M)$ i $f \in C^1(M)$ na γ mamy

$$XY = \frac{d}{dt}(Y \circ \gamma), \quad Xf = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma).$$

Widać, że dla pola wektorowego Y oraz funkcji f określonych tylko na γ mają sens wyrażenia $\dot\gamma Y$ oraz $\dot\gamma f$, przy czym pierwsze jest polem wektorowym na γ, a drugie funkcją na γ.

Wnioskujemy stąd, że jeżeli Y jest polem wektorowym na γ, to $\nabla_{\dot\gamma}Y$ jest polem wektorowym na γ, lokalnie mamy

$$\nabla_{\dot\gamma}Y = \frac{d}{dt}(Y \circ \gamma) + \dot\gamma^i Y^j \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

W szczególności, jeżeli γ jest klasy C^2,

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \ddot\gamma + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j\partial_k.$$

Krzywą $\gamma \in C^2((a,b),M)$ nazywamy geodezyjną, jeżeli $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, tzn.

$$\ddot\gamma^k + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Mamy wtedy w szczególności (ozn. $|X|^2 := \langle X, X\rangle$)

$$\frac{d}{dt}|\dot\gamma|^2 = \dot\gamma|\dot\gamma|^2 = 2\langle\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = 0. \tag{31.2}$$

Z ogólnej teorii równań różniczkowych zwyczajnych wynika, że dla ustalonego $p \in M$ oraz $v \in T_pM$ istnieje $\varepsilon > 0$ oraz jednoznacznie wyznaczona geodezyjna $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka, że $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$. Rozwiązanie to w gładki sposób zależy od warunków początkowych p i v. Dla $a > 0$ krzywa $\widetilde\gamma(t) := \gamma(at)$ jest także geodezyjną, określoną na przedziale $(-\varepsilon/a, \varepsilon/a)$, taką, że $\widetilde\gamma(0) = p$, $\dot{\widetilde\gamma}(0) = av$. Oznacza to, że jeżeli v jest odp. blisko 0, to γ jest określone w otoczeniu przedziału $[-1, 1]$. Dla takich v kładziemy

$$\exp_p(v) := \gamma(1).$$

Zauważmy, że

$$\exp_p(tv) := \gamma(t),$$

gdy tv jest odp. blisko 0. Odwzorowanie $\exp_p$ jest gładkim odwzorowaniem pewnego otoczenia 0 w T_pM o wartościach w M takim, że $\exp_p(0) = p$. Mamy także

$$d_0 \exp_p|_v = \frac{d}{dt}\exp_p(tv)|_{t=0} = \dot\gamma(0) = v,$$

czyli $d_0 \exp_p = id_{T_pM}$. W szczególności, $\exp_p$ jest dyfeomorfizmem w pewnym otoczeniu 0.

Dla każdej drogi $\gamma : [a,b] \to M$ możemy zdefiniować jej długość

$$l(\gamma) := \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt.$$

Twierdzenie 31.2. *Przypuśćmy, że* $\exp_p$ *jest dyfeomorfizmem na* $K(0,\varepsilon)$*. Dla* $v \in K(0,\varepsilon)$ *niech* $\gamma(t) := \exp_p(tv)$*,* $t \in [0,1]$*, natomiast* $\eta : [0,1] \to M$ *niech będzie inną drogą taką, że* $\eta(0) = \gamma(0)$*,* $\eta(1) = \gamma(1)$*. Wtedy* $l(\eta) \leq l(\gamma)$*, natomiast równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $\eta([0,1]) = \gamma([0,1])$*.*

Głównym narzędziem w dowodzie Twierdzenia 31.2 będzie *lemat Gaussa* (1822).

Lemat 31.3. *Niech* $v \in T_pM$ *będzie takie, że* $\exp_p$ *jest zdefiniowane w* v*. Wtedy dla* $w \in T_pM$ *mamy*

$$\langle d_v \exp_p|_v, d_v \exp_p|_w\rangle = \langle v, w\rangle,$$

tzn. $\exp_p$ *jest radialną izometrią.*

Dowód (nie było na wykładzie). Bez straty ogólności możemy założyć, że $\langle v, w\rangle = 0$. Znajdziemy gładką krzywą α w T_pM taką, że $\alpha(0) = v$ oraz $\alpha'(0) = w$. Połóżmy

$$\gamma(t,s) := \exp_p(t\alpha(s))$$

(dla s odp. bliskiego 0). Wtedy

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(1,0) = d_v \exp_p|_v, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial s}(1,0) = d_v \exp_p|_w. \tag{31.3}$$

Niech X i Y będą polami wektorowymi na M takimi, że na γ mamy $X = \partial\gamma/\partial t$, $Y = \partial\gamma/\partial s$. Wtedy na γ zachodzi $\nabla_X X = 0$ (bo $\gamma(\cdot, s)$ jest geodezyjną), $[X,Y] = 0$ oraz

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\rangle = X\langle X, Y\rangle = \langle X, \nabla_X Y\rangle = \langle X, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}Y|X|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right|^2 = 0$$

(dzięki (31.2) i (31.3)). Z drugiej strony

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial\gamma}{\partial s}(t,0) = \lim_{t\to 0} d_{tv}\exp_p|_{tw} = 0,$$

a więc

$$\langle\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,0), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(t,0)\rangle = 0. \quad \square$$

Jeżeli złożymy $\exp_p^{-1}$ z odwzorowaniem ortonormalnym $T_pM \to \mathbb{R}^n$, to otrzymamy mapę w otoczeniu p. Lemat Gaussa mówi dokładnie, że w tej mapie we współrzędnych biegunowych (tzn. $r = |x|$) mamy

$$ds^2 = dr^2 + \omega,$$

gdzie ω nie zależy od dr. Takie współrzędne w otoczeniu p nazywamy <u>normalnymi</u>. Jest także jasne, że ω jest dodatnio określoną formą na przestrzeni stycznej do sfery.

Wykład 27, 14.01.2008

Przykład. Niech S^2 będzie sferą $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z metryką ds^2 indukowaną z metryki euklidesowej $dx^2 + dy^2 + dz^2$ w $\mathbb{R}^3$. Rozpatrując parametryzację zdefiniowaną przy pomocy współrzędnych biegunowych

$$\mathbb{R}^2 \ni r(\cos\varphi, \sin\varphi) \longmapsto R(\sin(r/R)\cos\varphi, \sin(r/R)\sin\varphi, \cos(r/R)) \in S^2 \tag{31.4}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \left(\cos(r/R) \cos\varphi \frac{dr}{R} - \sin(r/R) \sin\varphi d\varphi \right)^2 \\ &\quad + R^2 \left(\cos(r/R) \sin\varphi \frac{dr}{R} + \sin(r/R) \cos\varphi d\varphi \right)^2 + \sin^2(r/R) dr^2 \\ &= dr^2 + R^2 \sin^2(r/R) d\varphi^2. \end{aligned}$$

W tych współrzędnych drogi postaci $\gamma(t) = tv$, $v \in \mathbb{R}^2$, są geodezyjnymi (w tym celu wystarczy sprawdzić, że $\Gamma^{\varphi}_{rr} = \Gamma^{r}_{rr} = 0$). Odwzorowanie (31.4) jest więc równe $\exp_{(0,0,-R)}$. Chcielibyśmy jeszcze zapisać ds^2 w postaci $F(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2)$. Będzie to możliwe, gdy $\rho = f(r)$, przy czym $(d/dr)(\log f) = 1/(R\sin(r/R))$. Otrzymamy $\rho = \tan(r/2R)$, wtedy $\sin(r/2R) = \rho/\sqrt{1+\rho^2}$, $\cos(r/2R) = 1/\sqrt{1+\rho^2}$ oraz

$$\sin\frac{r}{R} = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \cos\frac{r}{R} = \frac{\rho^2-1}{1+\rho^2}, \quad dr = \frac{2R d\rho}{1+\rho^2},$$

a zatem

$$dr^2 + R^2 \sin^2(r/R) d\varphi^2 = \frac{4R^2(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2)}{(1+\rho^2)^2}.$$

Odwzorowanie (31.4) przyjmuje postać

$$\mathbb{R}^2 \ni \rho(\cos\varphi, \sin\varphi) \longmapsto R\left(\frac{2\rho\cos\varphi}{1+\rho^2}, \frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2}, \frac{\rho^2-1}{1+\rho^2} \right) \in S^2 \setminus \{(0,0,R)\}, \tag{31.5}$$

tj.

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto R\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \in S^2 \setminus \{(0,0,R)\}.$$

Dowód Twierdzenia 31.2 (nie było na wykładzie). Załóżmy najpierw, że $\eta(t) \in \exp_p(K(0,\varepsilon) \setminus \{p\})$ dla $t \in (0,1]$. We współrzędnych normalnych mamy $\gamma(t) = tv$, zaś z lematu Gaussa

$$|\dot\eta|^2 = g_{ij}\dot\eta^i\dot\eta^j \geq \dot r^2,$$

gdzie $r = |\eta|$. Zatem

$$l(\eta) \geq \int_0^1 |\dot r(t)| dt \geq \int_0^1 \dot r(t) dt = |v| = l(\gamma).$$

Dla dowolnego η wystarczy rozpatrzyć tylko $t > t_0$, gdzie t_0 jest największe takie, że $\eta(t_0) = 0$. Jeżeli zaś $|\eta(t)| = \varepsilon$ dla pewnego t, to $l(\eta) \geq \varepsilon > l(\gamma)$. Jasna jest także druga część tezy. $\square$

Twierdzenie 31.4. *Dla każdego $p \in M$ istnieje otoczenie U oraz $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $q \in U$ odwzorowanie $\exp_q$ jest dyfeomorfizmem na $K(0,\delta)$ oraz $U \subset \exp_q(K(0,\delta))$.*

Dowód (nie było na wykładzie). Odwzorowanie $F(q,v) := (q, \exp_q(v))$, określone na pewnym otwartym otoczeniu zbioru $M \times \{0\}$ w TM, jest gładkie oraz

$$d_{(p,0)}F = \begin{pmatrix} id & id \\ 0 & id \end{pmatrix}.$$

Odwzorowanie F jest więc lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu $(p,0)$. Oznacza to, że istnieje otwarte otoczenie V punktu p oraz $\varepsilon > 0$ takie, że F jest dyfeomorfizmem na zbiorze $\mathcal{V} := \{(q,v) : q \in V,\ |v| < \varepsilon\}$. Znajdziemy wtedy otoczenie otwarte U takie, że $p \in U \subset V$ oraz $U \times U \subset F(\mathcal{V})$, co jest równoważne temu, że $U \subset \exp_q(K(0,\varepsilon))$, $q \in U$. $\square$

Odległość między dwoma punktami $p, q \in M$ jest dana formułą

$$d(p,q) = \inf\{l(\gamma) : \gamma : [a,b] \to M \text{ - droga},\ \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q\}.$$

Łatwo sprawdzamy, że d jest istotnie metryką na M. Z Twierdzenia 31.2 dla $p \in M$ i odp. małego $\varepsilon > 0$ mamy

$$d(p, \exp_p(v)) = |v|, \quad v \in K(0,\varepsilon).$$

W szczególności, metryka d jest zgodna z topologią M, a odwzorowanie $d(p,\cdot)$ jest ciągłe.

Twierdzenie 31.5. *Przypuśćmy, że $\eta : [0,1] \to M$ jest drogą taką, że $l(\eta) = d(\eta(0), \eta(1))$. Wtedy $\eta([0,1]) = \gamma([0,1])$ dla pewnej geodezyjnej γ.*

Dowód (nie było na wykładzie). Znajdziemy podział $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ oraz zbiory otwarte U_j takie jak w Twierdzeniu 31.4, spełniające $\eta([t_{j-1}, t_j] \subset U_j$, $j = 1, \dots, m$. Z Twierdzenia 31.2 istnieje więc droga $\gamma : [0,1] \to M$ taka, że $|\dot\gamma| = const$, $\eta([0,1]) = \gamma([0,1])$, oraz istnieje podział $0 = \widetilde{t}_0 < \widetilde{t}_1 < \dots < \widetilde{t}_m = 1$ taki, że $\gamma|_{[\widetilde{t}_{j-1}, \widetilde{t}_j]}$ jest geodezyjną łączącą $\eta(t_{j-1})$ z $\eta(t_j)$. Korzystając ponownie z Twierdzenia 31.2 i jednoznaczności geodezyjnych otrzymamy, że γ jest geodezyjną. $\square$

Mówimy, że rozmaitość riemannowska M jest zupełna, jeżeli metryka d jest zupełna. Mamy następującą charakteryzację takich rozmaitości.

Twierdzenie 31.6. (Hopf-Rinow, 1931) *Dla ustalonego $p \in M$ NWSR*
i) M jest zupełna;
ii) Wszystkie geodezyjne przechodzące przez p są określone na $\mathbb{R}$.
Dowolną parę punktów rozmaitości zupełnej można połączyć geodezyjną.

Dowód (nie było na wykładzie). i)⇒ii) Niech γ będzie geodezyjną taką, że $\gamma(0) = p$, określoną na przedziale $[0,T)$, przy czym $T > 0$ jest maksymalną taką liczbą. Niech $t_j > 0$ będzie ciągiem rosnącym do T. Wtedy z (31.2) mamy dla $j < k$ mamy

$$d(\gamma(t_j), \gamma(t_k)) \le \int_{t_j}^{t_k} |\dot\gamma(t)| dt = c(t_k - t_j),$$

a więc $\gamma(t_j)$ jest ciągiem Cauchy'ego. Znajdziemy $q \in M$ takie, że $\gamma(t_j) \to q$. Niech U, otoczenie q, oraz $\delta > 0$ będą takie jak w Twierdzeniu 31.2.ii. Dla j odp.

dużego mamy więc $U \subset \exp_{\gamma(t_j)}(K(0,\delta))$, skąd łatwo możemy przedłużyć γ poza T - sprzeczność.

ii)⇒i) Wystarczy pokazać, że dla wszystkich $r > 0$ zachodzi

$$\exp_p(\overline{K}(0,r)) = \overline{K}(p,r) \tag{31.6}$$

(bo wtedy kule $\overline{K}(p,r)$ są zwarte, a zatem z każdego ciągu Cauchy'ego możemy wybrać podciąg zbieżny). Zauważmy, że zawsze mamy $\subset$ w (31.6) oraz że (31.6) zachodzi dla odp. małych r. Niech $r_0 > 0$ będzie takie, że (31.6) zachodzi dla $r \in (0, r_0)$. Dla $q \in \overline{K}(p, r_0)$ znajdziemy ciąg $q_j \in K(p, r_0)$ zbieżny do q (z ciągłości $d(p,\cdot)$). Ponieważ (31.6) zachodzi dla $r < r_0$ znajdziemy $v_j \in K(0, r_0)$ takie, że $\exp_p(v_j) = q_j$. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $v_j \to v \in \overline{K}(0, r_0)$, z ciągłości $\exp_p$ mamy więc $\exp_p(v) = q$. Pokazaliśmy, że (31.6) zachodzi dla $r = r_0$.

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ (31.6) zachodzi dla $r \in (r_0, r_0 + \varepsilon)$. Ponieważ kula $\overline{K}(p, r_0)$ jest zwarta, istnieje relatywnie zwarte otoczenie $U \supset \overline{K}(p, r_0)$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, że każdą parę $q, \widetilde{q} \in \overline{U}$ spełniającą $d(q, \widetilde{q}) \le \varepsilon$ możemy połączyć geodezyjną. Dla $r \in (r_0, r_0 + \varepsilon)$, $q \in \overline{K}(p,r) \setminus \overline{K}(p, r_0)$ i $\delta > 0$ niech γ_δ będzie drogą taką, że $\gamma_\delta(0) = q$, $\gamma_\delta(1) = p$ oraz $l(\gamma_\delta) \le d(p,q) + \varepsilon$. Znajdziemy $t_\delta > 0$, najmniejszą liczbę taką, że $d(p, \gamma_\delta(t_\delta)) = R$ (znowu korzystamy z ciągłości $d(p,\cdot)$). Niech $\widetilde{q}$ będzie punktem skupienia $\gamma_\delta(t_\delta)$. Wtedy $d(p, \widetilde{q}) = r_0$ oraz $d(p,q) = r_0 + d(\widetilde{q}, q)$ (dla $\delta > 0$ mamy $r_0 + d(\widetilde{q}, q) \le l(\gamma_\delta) \le d(p,q) + \delta$, przeciwna nierówność wynika z nierówności trójkąta). Oznacza to, że geodezyjna postaci $t \mapsto \exp_p(tv)$, gdzie $\exp_p(v) = \widetilde{q}$, łączącą p z $\widetilde{q}$, można skleić z geodezyjną łączącą $\widetilde{q}$ z q, a ewentualnie zmieniając parametryzację i korzystając z Twierdzenia 31.5 oraz jednoznaczności geodezyjnych otrzymamy $q \in \exp_p(\overline{K}(0,r)$.

Ostatnia część tezy wynika z (31.6). $\square$

Załóżmy teraz, że $n = 2$, tj. M jest powierzchnią. Krzywiznę Gaussa definiujemy wzorem

$$K := \frac{\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

gdzie X, Y są polami wektorowymi lokalnie stanowiącymi bazę w przestrzeni stycznej. Można sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru X, Y.

We współrzędnych normalnych możemy zapisać

$$ds^2 = dr^2 + F^2 d\varphi^2,$$

gdzie F jest gładką funkcją dodatnią (określoną poza 0) zależną od r i φ. Ponieważ $ds^2 = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2$, gdzie $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ oraz A, B, C są funkcjami gładkimi w otoczeniu 0 takimi, że $A = C = 1$, $B = 0$ w 0, otrzymamy

$$F^2 = r^2 (A \sin^2\varphi - 2B \sin\varphi \cos\varphi + C \cos^2\varphi),$$

a stąd

$$F = r(1 + O(r)). \tag{31.7}$$

Dla $\partial_r := \partial/\partial r$, $\partial_\varphi = \partial/\partial_\varphi$ mamy $|\partial_r| = 1$, $|\partial_\varphi| = F$, $\langle \partial_r, \partial_\varphi \rangle = 0$ (i oczywiście $[\partial_r, \partial_\varphi] = 0$). Możemy sprawdzić, że

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\varphi_{rr} = \Gamma^r_{r\varphi} = 0, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \frac{\partial_r F}{F}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -F\,\partial_r F,$$

a stąd w szczególności

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0, \quad \nabla_{\partial_r}\partial_\varphi = \nabla_{\partial_\varphi}\partial_r = \frac{\partial_r F}{F}\,\partial_\varphi.$$

Mamy zatem

$$K = -\frac{\langle \nabla_{\partial_r}\nabla_{\partial_\varphi}\partial_r, \partial_\varphi\rangle}{F^2} = -\partial_r\big(\frac{\partial_r F}{F}\big) - \frac{(\partial_r F)^2}{F^2} = -\frac{\partial_r^2 F}{F}. \tag{31.8}$$

Załóżmy teraz, że krzywizna K jest stała. Z (31.7) i (31.8) wnioskujemy, że $F = F(r)$ jest rozwiązaniem problemu

$$F'' + KF = 0, \quad F(0) = 0,\ F'(0) = 1.$$

Otrzymamy

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{K}\,r)}{\sqrt{K}} & K > 0, \\ r & K = 0, \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{|K|}\,r)}{\sqrt{|K|}} & K < 0. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku mamy więc lokalnie kawałek sfery o promieniu $1/\sqrt{K}$, w drugim kawałek płaszczyzny euklidesowej, natomiast w trzecim, podobnie jak poprzednio po podstawieniu $\rho = \tanh(r/2R)$ otrzymamy

$$dr^2 + R^2\sinh^2(r/R)d\varphi^2 = \frac{4R^2(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2)}{(1-\rho^2)^2}. \tag{31.9}$$

Jest to więc, z dokładnością do stałej, hiperboliczna metryka Poincarégo w kole.

Dostaliśmy więc następujący rezultat.

Twierdzenie 31.7. (Riemann, 1854) *Każda rozmaitość riemannowska wymiaru 2 o stałej krzywiźnie jest lokalnie izometryczna z kawałkiem sfery (jeżeli krzywizna jest dodatnia), płaszczyzny euklidesowej (jeżeli krzywizna znika) lub koła z metryką Poincarégo (jeżeli krzywizna jest ujemna).* □

32. Zespolone metryki zupełne o stałej krzywiźnie

Niech M będzie powierzchnią Riemanna. Zespoloną metryką riemannowską (lub metryką hermitowską) na M nazywamy tensor na M, który lokalnie możemy zapisać w postaci $g|dz|$, gdzie g jest gładką funkcją dodatnią. Zauważmy, że przy holomorficznej zmianie zmiennych $z = f(\zeta)$ przybiera on postać $g\circ f|f'||d\zeta|$, (czyli dodatniość nie zależy od takiej zmiany).

Ćwiczenie Pokazać (korzystając z Twierdzenia 29.6), że na każdej powierzchni Riemanna istnieje metryka zespolona. (Fakt ten znacznie wzmocnimy poniżej - zob. Twierdzenie 32.5.)

Metryka zespolona $g|dz|$ jest w szczególności metryką riemannowską postaci $g^2(dx^2+dy^2)$. Mamy wtedy

$$\Gamma^x_{xx}=\frac{g_x}{g},\quad \Gamma^y_{xx}=-\frac{g_y}{g},\quad \Gamma^x_{xy}=\frac{g_y}{g},\quad \Gamma^y_{xy}=\frac{g_x}{g},\quad \Gamma^x_{yy}=-\frac{g_x}{g},\quad \Gamma^y_{yy}=\frac{g_y}{g}.$$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że równanie geodezyjnej dla metryki zespolonej $g|dz|$ ma postać $2g_z\dot{\gamma}^2+g\ddot{\gamma}=0$

Krzywizna Gaussa metryki zespolonej wyraża się wzorem

$$K_{g|dz|}=\frac{\langle\nabla_{\partial_x}\nabla_{\partial_y}\partial_y-\nabla_{\partial_y}\nabla_{\partial_x}\partial_y,\partial_x\rangle}{g^4}=-\frac{\Delta(\log g)}{g^2}.$$

Zauważmy, że krzywizna jest niezmiennicza względem odwzorowań konforemnych:

$$K_{f_*\omega}=-\frac{\Delta((\log g)\circ f)}{(g\circ f)^2|f'|^2}=-\frac{(\Delta(\log g))\circ f}{(g\circ f)^2}=K_\omega\circ f.$$

Przykład. Metryka Poincarégo $|dz|/(1-|z|^2)$ na Δ jest metryką zespoloną o krzywiźnie -4.

Naszym celem będzie scharakteryzowanie wszystkich zupełnych metryk zespolonych o stałej krzywiźnie. Przeanalizujemy najpierw przypadek sfery Riemanna $\mathbb{P}$. Korzystając z (31.9) i z tego, że we współrzędnych biegunowych $z=re^{i\varphi}$ mamy $|dz|^2=dr^2+r^2d\varphi^2$, na $\mathbb{C}$ możemy zdefiniować metrykę $2|dz|/(1+|z|^2)$. Można łatwo pokazać, że przedłuża się ona do metryki zespolonej na sferze Riemanna $\mathbb{P}$ o krzywiźnie $+1$. Metrykę tę oznaczamy $\omega_{\mathbb{P}}$. Otrzymaliśmy ją z metryki riemannowskiej na sferze jednostkowej S^2 w $\mathbb{R}^3$ poprzez odwzorowanie (31.5), które daje utożsamienie sfery Riemanna $\mathbb{P}$ z S^2.

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że przy utożsamieniu (31.5) sfery Riemanna $\mathbb{P}$ z S^2 odwzorowanie $1/z\in\operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ odpowiada złożeniu dwóch odbić w S^2.

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że obrazy geodezyjnych względem metryki $\omega_{\mathbb{P}}$ w $\mathbb{C}\subset\mathbb{P}$ to proste przechodzące przez 0 oraz okręgi $\partial K(w,\sqrt{|w|^2+1})$, $w\in\mathbb{C}$, natomiast obrazy geodezyjnych względem metryki Poincarégo w Δ to proste przechodzące przez 0 oraz okręgi przecinające się z $\partial\Delta$ pod kątem prostym.

Połóżmy

$$G_{\mathbb{P}}:=\{f\in\operatorname{Aut}(\mathbb{P}):f_*\omega_{\mathbb{P}}=\omega_{\mathbb{P}}\}.$$

Propozycja 32.1. *$G_{\mathbb{P}}$ jest tranzytywną podgrupą $\operatorname{Aut}(\mathbb{P})$ (tzn. dla dowolnych $z,w\in\mathbb{P}$ znajdziemy $f\in G_{\mathbb{P}}$ takie, że $f(z)=w$) zawierającą obroty wokół 0.*

Dowód. Na S^2 izometrie zachowujące orientację (czyli grupa $SU(\mathbb{R},3)$) tworzą taką grupę. Wystarczy zatem skorzystać z utożsamienia (32.1) oraz następującego faktu.

Propozycja 32.2. *Niech M,N będą powierzchniami Riemanna i niech ω będzie metryką zespoloną na N. Przypuśćmy, że $f:M\to N$ jest lokalnym dyfeomorfizmem takim, że $f_*\omega$ jest także metryką zespoloną. Wtedy f jest albo odwzorowaniem holomorficznym albo antyholomorficznym.*

Dowód. Lokalnie zapiszmy $\omega = g|d\zeta|$ i $f = (u, v)$. Wtedy

$$\begin{aligned} f_*\omega &= (g \circ f)^2 \left[(u_x dx + u_y dy)^2 + (v_x dx + v_y dy)^2\right] \\ &= (g \circ f)^2 \left[(u_x^2 + v_x^2)dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)dxdy + (u_y^2 + v_y^2)dy^2\right], \end{aligned}$$

a więc

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2, \quad u_x u_y + v_x v_y = 0.$$

To oznacza, że albo $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (jeżeli $u_x v_y - u_y v_x > 0$) albo $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$ (jeżeli $u_x v_y - u_y v_x < 0$). $\square$

$\boxed{\textbf{Ćwiczenie}}$ Pokazać, że

$$G_{\mathbb{P}} = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{P}) : c = -\bar{b},\ d = \bar{a} \right\}.$$

Dla pozostałych powierzchni jednospójnych Δ i $\mathbb{C}$ połóżmy

$$\omega_\Delta = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}, \quad \omega_{\mathbb{C}} = |dz|.$$

Wtedy $K_{\omega_\Delta} = -1$, $K_{\omega_{\mathbb{C}}} = 0$. Definiując G_Δ i $G_{\mathbb{C}}$ podobnie jak $G_{\mathbb{P}}$ otrzymamy

$$G_\Delta = \mathrm{Aut}\,(\Delta), \quad G_{\mathbb{C}} = \{az + b : a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1\}.$$

W szczególności, obie grupy także są tranzytywne oraz zawierają obroty wokół 0.

Wykład 28, 21.01.2008

Twierdzenie 32.3. *Przypuśćmy, że M jest jednospójną powierzchnią Riemanna, natomiast ω metryką zespoloną na M o krzywiźnie K równej -1, 0 lub +1. Połóżmy $\widehat{M} := \Delta$ (jeżeli $K = -1$), $\widehat{M} := \mathbb{C}$ (jeżeli $K = 0$) lub $\widehat{M} := \mathbb{P}$ (jeżeli $K = +1$). Wtedy istnieje lokalnie konforemne odwzorowanie $F \in \mathcal{O}(M, \widehat{M})$ takie, że $\omega = F_*\omega_{\widehat{M}}$. Jeżeli metryka ω jest zupełna, to $F \in \mathrm{Aut}\,(M, \widehat{M})$.*

Dowód. Z Twierdzenia 31.7 i Propozycji 32.2 wynika, że dla każdego $z \in M$ istnieje otoczenie U_z takie, że rodzina

$$\mathcal{F}_z := \{f \in \mathcal{O}(U_z, \widehat{M}) : f \text{ jednokrotne, } \omega = f_*\omega_{\widehat{M}} \text{ na } U_z\}$$

jest niepusta. Twierdzimy, że

$$f \in \mathcal{F}_z,\ w \in U_z \cap U_{\tilde{z}} \ \Rightarrow\ \exists\, \tilde{f} \in \mathcal{F}_{\tilde{z}} : f = \tilde{f} \text{ w otoczeniu } w. \tag{32.1}$$

Korzystając z Propozycji 32.1 (i podobnego faktu dla Δ i $\mathbb{C}$) dla $w \in U_z \cap U_{\tilde{z}}$ i $f \in \mathcal{F}_z$, $\hat{f} \in \mathcal{F}_{\tilde{z}}$ znajdziemy $\varphi, \hat{\varphi} \in G_{\widehat{M}}$ spełniające $\varphi(f(w)) = \hat{\varphi}(\hat{f}(w)) = 0$ oraz $\arg(\varphi \circ f)'(w) = \arg(\hat{\varphi} \circ \hat{f})'(w)$ (w pewnej mapie). Połóżmy $\tilde{f} := \varphi^{-1} \circ \hat{\varphi} \circ \hat{f}$. Wtedy $\tilde{f} \in \mathcal{F}_{\tilde{z}}$, $\tilde{f}(w) = f(w)$, $\arg \tilde{f}'(w) = \arg f'(w)$. Twierdzimy, że $\tilde{f} = f$ w otoczeniu w. Mamy $f'(w) = \tilde{f}'(w)$ i np. dla $\widehat{M} = \Delta$ indukcyjnie pokazujemy, że jeżeli $|f'|^2/(1 - |f|^2)^2 = h$, to $\partial^n h/\partial z^n = f^{(n+1)}\overline{f'}/(1 - |f|^2)^2 + R$, gdzie R

jest funkcją wymierną zmiennych $f, f', \ldots, f^{(n)}, \overline{f}, \overline{f'}, \ldots, \overline{f^{(n)}}$. Wnioskujemy, że $\widetilde{f^{(n)}}(w) = \widetilde{f}^{(n)}(w)$ dla wszystkich n. Rozumując podobnie dla $\mathbb{C}$ i $\mathbb{P}$ otrzymamy (32.1). Pierwsza część tezy wynika teraz z Twierdzenia 27.5.

Załóżmy teraz dodatkowo, że ω jest zupełna. Dla ustalonego $z_0 \in M$ i $w \in \widehat{M}$ niech $\widehat{\gamma}$ będzie geodezyjną łączącą $F(z_0)$ z w. Wtedy w otoczeniu z_0 $F^{-1} \circ \widehat{\gamma}$ jest geodezyjną, którą możemy przedłużyć na $\mathbb{R}$. Stąd łatwo wnioskujemy, że $w \in F(M)$, a więc F jest surjekcją. W celu pokazania iniektywności niech γ będzie geodezyjną w M łączącą z oraz $\widetilde{z}$, $z \neq \widetilde{z}$. Wtedy $F \circ \gamma$ jest geodezyjną w $\widehat{M}$. Ponieważ w Δ i $\mathbb{C}$ geodezyjne nie przecinają się, w tym przypadku mamy $F(z) \neq F(\widetilde{z})$.

Musimy jeszcze pokazać iniektywność F, gdy $\widehat{M} = \mathbb{P}$. Jeżeli $z, z' \in M$ są takie, że $F(z) = F(z')$ i $z \neq z'$, to $d(z, z') \geq 2\pi$. Niech $0 < r < \pi$. Wtedy $K(z, r) \cap K(z', r) = \emptyset$ oraz $F|_{K(z,r)} \to K(F(z), r)$ jest iniektywne. Podobnie jak poprzednio pokazujemy także, że to odwzorowanie jest surjekcją. Pokazaliśmy więc, że F jest nakryciem, z jednospójności M wnioskujemy, że jest to w rzeczywistości automorfizm. $\square$

Zauważmy, że Twierdzenie 32.3 ma następującą konsekwencję dla równania różniczkowego $\Delta u = \pm e^{2u}$: każde gładkie rozwiązanie takiego równania lokalnie (a nawet globalnie w obszarach jednospójnych) jest postaci

$$u = \log \frac{2|f'|}{1 \mp |f|^2},$$

gdzie f jest funkcją holomorficzną (bo metryka $e^u|dz|$ ma krzywiznę ∓ 1; analogiczny fakt dla dla krzywizny 0 wynika natychmiast z Twierdzeń 10.8 i 22.2).

Twierdzenie 32.3 daje charakteryzację metryk zupełnych o stałej krzywiźnie na powierzchniach jednospójnych.

Twierdzenie 32.4. *Załóżmy, że ω jest zupełną metryką zespoloną o stałej krzywiźnie K na M. Wtedy*

i) Jeżeli $M = \mathbb{P}$, to $K > 0$ oraz $\omega = F_*\omega_{\mathbb{P}}/\sqrt{K}$ dla pewnego $F \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{P})$;
ii) Jeżeli $M = \mathbb{C}$, to $K = 0$ oraz $\omega = c\omega_{\mathbb{C}}$ dla pewnej stałej $c > 0$;
iii) Jeżeli $M = \Delta$, to $K < 0$ oraz $\omega = \omega_\Delta/\sqrt{|K|}$. $\square$

Możemy teraz scharakteryzować zupełne metryki zespolone o stałej krzywiźnie na dowolnej powierzchni Riemanna.

Twierdzenie 32.5. *Na danej powierzchni Riemanna M zupełne metryki zespolone o stałej krzywiźnie to dokładnie metryki postaci $p^*\widetilde{\omega}$, gdzie $p : \widetilde{M} \to M$ jest nakryciem uniwersalnym, zaś $\widetilde{\omega}$ zupełną metryką zespoloną o stałej krzywiźnie na $\widetilde{M}$. W szczególności, na każdej hiperbolicznej powierzchni Riemanna istnieje dokładnie jedna zupełna metryka zespolona o krzywiźnie -1.*

Dowód. Jeżeli ω jest taką metryką na M, to $p_*\omega$ jest metryką o takiej samej krzywiźnie na $\widetilde{M}$. Niech z_j będzie ciągiem Cauchy'ego na $\widetilde{M}$, wtedy $(p(z_j))$ jest ciągiem Cauchy'ego na M (bo odwzorowanie p nie zwiększa odległości względem tych metryk - wynika to wprost z definicji odległości), a więc zbieżnym do pewnego $w \in M$. Z własności nakrycia wynika, że znajdziemy płat V w $\widetilde{M}$ taki, że $z_j \in V$ dla j odp. dużego j. Otrzymamy, że $z_j \to (p|V)^{-1}(w)$, a więc $p_*\omega$ jest także zupełna.

Z drugiej strony, jeżeli $\widetilde{\omega}$ jest taką metryką na $\widetilde{M}$, to najpierw musimy pokazać, że $p^*\widetilde{\omega}$ jest dobrze zdefiniowane, tj. że $\widetilde{\omega}$ jest niezmiennicza względem automorfizmów nakrycia. Jeżeli $\widetilde{M} \simeq \mathbb{P}$, to jedynym automorfizmem nakrycia jest identyczność, zaś gdy $\widetilde{M} = \Delta$, to na mocy Twierdzenia 32.4 mamy $\widetilde{\omega} = c\omega_\Delta$, a zatem $\widetilde{\omega}$ jest niezmiennicza względem każdego automorfizmu $\widetilde{M}$. Jeżeli $\widetilde{M} = \mathbb{C}$, to dzięki Twierdzeniu 25.3.ii musimy tylko rozpatrzyć przypadki $p(z) = e^z$ (gdy $M \simeq \mathbb{C}_*$) oraz rzutowania $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, gdzie $\Gamma = \alpha_1\mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$ (gdy M jest torusem). W pierwszym przypadku automorfizmy nakrycia są postaci $z \mapsto z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, natomiast w drugim $z \mapsto z + k\alpha_1 + l\alpha_2$, $k, l \in \mathbb{Z}$, metryka $\omega_\mathbb{C}$ jest zaś niezmiennicza względem wszystkich translacji. Pokazaliśmy więc, że metryka $p^*\widetilde{\omega}$ jest dobrze zdefiniowana. Jest oczywiste, że ma ona taką samą krzywiznę jak $\widetilde{\omega}$, natomiast zupełność $p^*\widetilde{\omega}$ wynika natychmiast z zupełności $\widetilde{\omega}$ oraz twierdzenia Hopfa-Rinowa. $\square$

Ćwiczenie Pokazać, że $(e^\zeta)^*(|d\zeta|) = |dz|/|z|$.

Przeanalizujemy teraz dokładniej przypadek hiperbolicznych powierzchni Riemanna. Przez ω_M oznaczamy jedyną metrykę zupełną o krzywiźnie -1 na M.

Ćwiczenie Pokazać, że

i) $\omega_\mathbb{H} = |dz|/y$;

ii) $\omega_{\Delta_*} = -\dfrac{1}{|z| \log |z|}\, |dz|$;

iii) $\omega_{\{\rho<|z|<1\}} = -\dfrac{a}{|z| \sin(a \log |z|)}\, |dz|$, gdzie $a = \pi/\log\rho$.

Propozycja 32.6. *Dla $\varphi \in \mathcal{O}(\Delta, M)$ mamy $\varphi_*\omega_M \le \omega_\Delta$.*

Dowód. Niech $p : \Delta \to M$ będzie nakryciem. Znajdziemy $\psi \in \mathcal{O}(\Delta, \Delta)$ takie, że $p \circ \psi = \varphi$. Wtedy

$$\varphi_*\omega_M = \psi_*p_*\omega_M = \psi_*\omega_\Delta \le \omega_\Delta,$$

gdzie ostatnia nierówność to dokładnie lemat Schwarza-Picka. $\square$

Łatwą konsekwencją powyższego rezultatu jest następujący fakt.

Propozycja 32.7. *Jeżeli w pewnej mapie mamy $\omega_M = g|dz|$, gdzie M jest hiperboliczną powierzchnią Riemanna, to w tej mapie*

$$g(z) = \min\left\{ \frac{2}{|\varphi'(0)|} : \varphi \in \mathcal{O}(\Delta, M),\ \varphi(0) = z \right\}.$$

Dowód. Z Propozycji 32.6 mamy $\le$, natomiast równość mamy dla nakrycia $p : \Delta \to M$ takiego, że $p(0) = z$. $\square$

Wniosek 32.8. *Jeżeli $N \subset M$, to $\omega_M \le \omega_N$ na N.* $\square$

Twierdzenie 32.9. (Bieberbach, 1916) *Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$. Wtedy istnieje rozwiązanie problemu*

$$\begin{cases} u \in C^\infty(\Omega) \\ \Delta u = e^{2u} \\ \lim\limits_{z \to \partial\Omega} u(z) = +\infty. \end{cases} \tag{32.2}$$

Dowód. Niech $g \in C^\infty(\Omega)$ będzie takie, że $\omega_\Omega = g|dz|$. Połóżmy $u := \log g$. Wtedy $K = -1$ oznacza dokładnie, że $\Delta u = e^{2u}$. W celu pokazania warunku brzegowego weźmy $z_0 \in \partial\Omega$ oraz $R > 0$ takie, że $\Omega \subset K(z_0, R)$. Wtedy $\omega_\Omega \geq \omega_{K(z_0,R)\setminus\{z_0\}}$, co oznacza, że

$$u(z) \geq -\log|z - z_0| - \log\log(R/|z - z_0|). \quad \square$$

Propozycja 32.10. *Jeżeli $\Omega = \Delta$, to funkcja*

$$u(z) = \log\frac{2}{1 - |z|^2}$$

jest jedynym rozwiązaniem problemu (32.2).

Dowód. Musimy tylko pokazać jednoznaczność (32.2). Niech v będzie rozwiązaniem (32.2) i dla $r < 1$ połóżmy $v_r(z) = v(z/r) - \log r$. Wtedy $v_r \in C^\infty(K(0,r))$ spełnia $\Delta v_r = e^{2v_r}$ oraz $\lim_{|z|\to r} v_r(z) = +\infty$. Przypuśćmy, że zbiór $\{v_r < u\}$ jest niepusty. Jest on relatywnie zwarty w $K(0,r)$, znajdziemy zatem z_0 w tym zbiorze takie, że $v_r - u$ ma minimum w z_0. Wtedy w z_0 mamy $0 \leq \Delta v_r - \Delta u = e^{2v_r} - e^{2u}$ - sprzeczność. Otrzymaliśmy zatem $u \leq v_r$, a stąd $u \leq v$. Zamieniając u z v otrzymamy równość. $\square$

33. Iteracja funkcji wymiernych (nie było na wykładzie)

Będziemy teraz stale zakładać, że $R = P/Q$ jest funkcją wymierną (którą traktujemy jako odwzorowanie holomorficzne $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$), gdzie P, Q są wielomianami zespolonymi bez wspólnych zer. Zakładamy także, że $d = \deg R := \max\{\deg P, \deg Q\} \geq 2$. Oznacza to, że dla w spoza skończonego podzbioru $\mathbb{P}$ zbiór $R^{-1}(w)$ jest dokładnie d-elementowy. Przez $R^n = R \circ \cdots \circ R$ oznaczamy n-tą iterację odwzorowania R.

Zbiór Fatou $\mathcal{F}$ funkcji R definiujemy jako zbiór wszystkich $z \in \mathbb{P}$ takich, że ciąg R^n jest rodziną normalną w pewnym otoczeniu z. (Normalność rodziny funkcji wymiernych, a nawet meromorficznych, oznacza dokładnie, że z każdego ciągu możemy wybrać podciąg zbieżny jednostajnie w metryce sferycznej na $\mathbb{P}$.) Dopełnienie zbioru Fatou $\mathcal{J} := \mathbb{P} \setminus \mathcal{F}$ to zbiór Julii funkcji R. Oczywście $\mathcal{F}$ jest otwarty, zaś $\mathcal{J}$ jest zwarty. Zbiory te zostały zdefiniowane niezależnie przez tych dwóch matematyków w 1918 r.

Udowodnimy teraz podstawowe własności zbioru Julii.

Propozycja 33.1. *$\mathcal{J} \neq \emptyset$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathcal{J} = \emptyset$. Wtedy $\{R^n\}$ jest rodziną normalną na $\mathbb{P}$, a więc istnieje podciąg R^{n_k} jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}, \mathbb{P})$, czyli do funkcji wymiernej. Jeżeli f jest stała, to dla n odp. dużego R^n nie byłoby surjekcją - sprzeczność. Jeżeli f nie jest stała, to f ma skończoną liczbę zer. Z twierdzenia Rouchégo (rozpatrując odp. małe koła o środkach w tych zerach) łatwo dostaniemy, że dla k odp. dużego R^{n_k} ma tyle samo zer liczonych z krotnościami co f. Oznaczałoby to, że $\deg R^{n_k}$ jest ograniczony, ale $\deg R^{n_k} = dn_k$ - sprzeczność. $\square$

Propozycja 33.2. *$R^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.*

Dowód. Jeżeli rodzina $\{R^n\}$ jest normalna na zbiorze otwartym U, to jest również normalna na zbiorach otwartych $R^{-1}(U)$ oraz $R(U)$. Stąd oraz z surjektywności R otrzymamy $R^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, a więc także $R^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$. $\square$

Propozycja 33.3. *Zbiór Julii odwzorowania R^N, $N \geq 1$, jest taki sam jak zbiór Julii R.*

Dowód. Jeżeli $\{R^n\}$ jest rodziną normalną na pewnym zbiorze otwartym, to jest oczywiste, że również $\{R^{nN}\}$ jest rodziną normalną. Z drugiej strony, jeżeli $\{R^{nN}\}$ jest normalna i R^{n_k} jest ciągiem w $\{R^n\}$, to, ewentualnie zamieniając go z podciągiem, możemy założyć, że ciąg $R^{[n_k/N]N}$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji f. Znajdziemy wtedy $N_0 = 0, 1, \ldots, N-1$ oraz podciąg n_{k_l} taki, że $R^{n_{k_l}-N_0} \to f$, czyli $R^{n_{k_l}} \to f \circ R^{N_0}$. $\square$

Twierdzenie 33.4. *Jeżeli $\mathcal{J}$ ma niepuste wnętrze, to $\mathcal{J} = \mathbb{P}$.*

Dowód. Niech $U \subset \mathcal{J}$ będzie zbiorem otwartym. Rozważmy zbiór $\bigcup_{n\geq 1} R^n(U)$. Z Propozycji 33.2 jest on zawarty w $\mathcal{J}$, natomiast z twierdzenia Montela wynika, że jego dopełnienie jest co najwyżej dwuelementowe (bo ciąg R^n nie jest rodziną normalną na U). Z domkniętości $\mathcal{J}$ dostaniemy tezę. $\square$

Propozycja 33.5. *Jeżeli R jest wielomianem, to $\infty \notin \mathcal{J}$.*

Dowód. Znajdziemy $r > 0$ i $\lambda > 1$ takie, że $|R(z)| \geq \lambda|z|$, gdy $|z| \geq r$, a zatem $|R^n(z)| \geq \lambda^n|z|$, gdy $|z| \geq r$ i $n \geq 1$. Wynika stąd, że $\mathbb{P} \setminus K(0,r) \subset \mathcal{F}$. $\square$

Poniższe twierdzenie może być użyte do komputerowego wyznaczania zbioru Julii.

Twierdzenie 33.6. *Dla każdego $z_0 \in \mathcal{J}$ zbiór $\bigcup_{n\geq 1} R^{-n}(z_0)$ jest gęsty w $\mathcal{J}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że nie jest to prawda. Znajdziemy wtedy zbiór otwarty U taki, że $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ oraz $U \cap \bigcup_{n\geq 1} R^{-n}(z_0) = \emptyset$. Oznacza to, że $z_0 \notin \bigcup_{n\geq 1} R^n(U)$. Ponieważ $\{R^n\}$ nie jest rodziną normalną na U (bo $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$), to z twierdzenia Montela zbiór $E := \mathbb{P} \setminus \bigcup_{n\geq 1} R^n(U)$ jest co najwyżej dwuelementowy. Mamy wtedy $z_0 \in E$ i w celu zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $E \subset \mathcal{F}$.

Jeżeli $R(z) \in E$, to $R(z) \notin R^n(U)$ dla każdego n, a stąd $z \in E$, czyli $R^{-1}(E) \subset E$. Ponieważ zbiór E jest skończony, $R|_E$ jest bijekcją $E \to E$. W przypadku, gdy E jest jednoelementowy, to zmieniając zmienne w $\mathbb{P}$ przy pomocy homografii możemy założyć, że $E = \{\infty\}$. Ale wtedy $R^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, a więc R jest wielomianem i korzystamy z Propozycji 33.5.

Jeżeli natomiast E jest dwuelementowy, to znowu zmieniając zmienne możemy założyć, że $E = \{0, \infty\}$. Wtedy albo $R(0) = 0$, $R(\infty) = \infty$ albo $R(0) = \infty$, $R(\infty) = 0$. W pierwszym przypadku R jest postaci Cz^d, a w drugim Cz^{-d}. W obydwu $E \subset \mathcal{F}$ (**Ćwiczenie**). $\square$

Twierdzenie 33.7. *$\mathcal{J}$ jest zbiorem doskonałym, tzn. nie zawiera punktów izolowanych.*

Dowód. Niech U będzie otoczeniem $z_0 \in \mathcal{J}$. Załóżmy najpierw, że $R^n(z_0) \neq z_0$ dla wszystkich $n \geq 1$ (tzn. z_0 nie jest punktem okresowym). Wybierzmy z_1 takie, że $R(z_1) = z_0$. Wtedy $z_1 \in \mathcal{J}$ (Propozycja 33.2) i z Twierdzenia 33.6 znajdziemy $\zeta \in \mathcal{J} \cap U$ oraz $m \geq 1$ takie, że $R^m(\zeta) = z_1$ i $\zeta \neq z_0$ (inaczej z_0 byłby punktem okresowym).

Niech z kolei $R^{n_0}(z_0) = z_0$ dla pewnego $n_0 \geq 1$ i niech n_0 będzie najmniejszą taką liczbą. Jeżeli z_0 byłoby jedynym rozwiązaniem równania $R^{n_0}(z) = z_0$, to z Propozycji 33.3 i 33.5 otrzymalibyśmy $z_0 \notin \mathcal{J}$ (bo po konforemnej zmianie zmiennych, tak że $z_0 = \infty$, R^{n_0} byłoby wielomianem) - sprzeczność. Niech więc $z_2 \in \mathcal{J}$,

$z_2 \neq z_0$, będzie takie, że $R^{n_0}(z_2) = z_0$. Jeżeli teraz $R^j(z_0) = z_2$ dla pewnego $j \geq 1$, to z okresowości zachodziłoby to dla pewnego $j = 1, \ldots, n_0 - 1$, ale z drugiej strony $z_0 = R^{n_0}(z_2) = R^{n_0+j}(z_0) = R^j(z_0)$, co przeczy minimalności n_0. Postępujemy teraz tak samo jak poprzednio. $\square$

Przypuśćmy teraz, że $R = P$ jest wielomianem (stopnia $d \geq 2$). Dzięki Propozycji 33.5 wiemy, że zbiór Julii $\mathcal{J}$ jest zwarty w $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 33.8. *Dla wielomianu P połóżmy*

$$\mathcal{K} := \{z \in \mathbb{C} : \text{ ciąg } P^n(z) \text{ jest ograniczony}\}.$$

Wtedy $\partial K = \mathcal{J}$ oraz $\mathcal{K}$ jest wypełnionym zbiorem Julii, tzn. $\mathcal{K} = \mathcal{J} \cup \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ jest sumą składowych ograniczonych $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}$.

Dowód. Niech λ, R będą takie jak w dowodzie Propozycji 33.5. Wtedy

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{K} = \bigcup_{n \geq 1} P^{-n}(\{|z| > r\}). \tag{33.1}$$

W szczególności, $\mathcal{K}$ jest zwarty. Zauważmy, że $z \in P(\mathcal{K}) \Leftrightarrow z \in \mathcal{K}$, tzn. $P^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Z kolei $P(z) \in \partial\mathcal{K}$ oznacza, że $P(z) \in \mathcal{K}$ oraz istnieje ciąg $w_k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ zbieżny do z. Np. dzięki otwartości P jest to równoważne istnieniu ciągu $z_{k_l} \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ zbieżnego do z i takiego, że $P(z_{k_l}) = w_{k_l}$. Mamy więc $P^{-1}(\partial\mathcal{K}) = \partial\mathcal{K}$.

Jeżeli $z \in \partial\mathcal{K}$, to ciąg $P^n(z)$ jest ograniczony, ale z (33.1) mamy $P^n \to \infty$ lokalnie jednostajnie na $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$, a więc na żadnym otoczeniu punktu z ciąg P^n nie jest rodziną normalną, czyli $\partial\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$. Ponieważ $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, to $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ i, dzięki Propozycji 33.1, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Niech $z_0 \in \partial\mathcal{K}$. Z Twierdzenia 33.6 wynika, że zbiór $\bigcup_{n \geq 1} P^{-n}(z_0)$ jest gęsty w $\mathcal{J}$. Zbiór ten jest jednak zawarty w $\partial\mathcal{K}$ (bo $P^{-1}(\partial\mathcal{K}) = \partial\mathcal{K}$), a więc $\partial\mathcal{K}$ jest gęsty w $\mathcal{J}$. Stąd $\partial\mathcal{K} = J$.

Mamy $\partial\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$, więc z zasady maksimum i dzięki temu, że $P(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ dostaniemy $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$. Pokazaliśmy, że $\partial\mathcal{K} \cup \mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ i że $\mathcal{U}$ jest sumą składowych ograniczonych $\mathbb{C} \setminus \partial\mathcal{K}$. Ponieważ składowa nieograniczona $\mathbb{C} \setminus \partial\mathcal{K}$ nie ma punktów wspólnych z $\mathcal{K}$, mamy $\partial\mathcal{K} \cup \mathcal{U} = \mathcal{K}$. $\square$

Przykłady. i) Dla $P(z) = z^2$ mamy $\mathcal{J} = \partial\Delta$.

ii) Niech $P(z) = z^2 - 2$. Można pokazać **Ćwiczenie**, że funkcja $f(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ odwzorowuje konforemnie obszar $\{|\zeta| > 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Mamy także $(f^{-1} \circ P \circ f)(\zeta) = \zeta^2$. Wynika stąd, że $P^n \to \infty$ na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Z drugiej strony $P([-2, 2]) \subset [-2, 2]$, a więc z Twierdzenia 33.8 $\mathcal{J} = \mathcal{K} = [-2, 2]$.

W ogólnym przypadku jednak dynamika wielomianu kwadratowego $P_c(z) := z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, jest bardzo skomplikowana i zbiory Julii $\mathcal{J}_c$ wielomianu P_c mają zwykle strukturę fraktali. Zbiór Mandelbrota (Brook, Matelski, 1978, Mandelbrot, 1980) $\mathcal{M}$ to zbiór tych $c \in \mathbb{C}$, dla których ciąg $P_c^n(0)$ jest ograniczony.

Ćwiczenie Pokazać następujące własności zbioru Mandelbrota

i) $|P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}}$, $|c| \geq 2$, $n \geq 1$;

ii) $\mathcal{M} \subset \overline{K}(0, 2)$;

iii) $\mathcal{M} = \bigcap_{n \geq 1} \{c \in \mathbb{C} : |P_c^n(0)| \leq 2\}$;

iv) $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$.

Można udowodnić (zob. np. [3]), że $\mathcal{M}$ jest spójny i jednospójny, ale otwartym problemem pozostaje lokalna spójność $\mathcal{M}$. Można także pokazać, że jeżeli $c \in \mathcal{M}$, to $\mathcal{J}_c$ jest spójny, natomiast dla $c \notin \mathcal{M}$ zbiór $\mathcal{J}_c$ jest całkowicie niespójny (tzn. wszystkie składowe spójne $\mathcal{J}_c$ są jednopunktowe).

Literatura

[1] A.F. Beardon, *A Primer on Riemann Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[2] E. Bombieri, *Problems of the Millenium: Riemann Hypothesis*, zob. http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis.

[3] L. Carleson, T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[5] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] N. Elkies, *Introduction to Analytic Number Theory*, lecture notes, 1998, zob. http://www.math.harvard.edu/ elkies/M259.98/index.html.

[8] R.E. Greene, S.G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[9] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[10] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[11] L. Hörmander, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North Holland, Amsterdam, 1991 (str. 1-16).

[12] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, Walter de Gruyter, Berlin 1993 (str. 1-13).

[13] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[14] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 2001 (str. 249-250).

[16] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa, 1986.

[17] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej,* wyd. 3, PWN, Warszawa, 1982 (str. 164-165).

[18] E.B. Saff, A.D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis for Mathemtics, Science, and Engineering,* wyd. 2, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[19] S. Saks, A. Zygmund, *Analytic functions*, Monografie Matematyczne 28, PTM, Warszawa-Wrocław, 1952.

[20] J. Stillwell, *Mathematics and its History,* wyd. 2, Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] J. Wermer, *Potential Theory*, Lect. Notes in Math. 408, Springer-Verlag, New York, 1981.

[22] D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 705-709.