Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki

Anna Gwiżdż

Funkcja ζ Riemanna

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Zbigniewa Błockiego

Kraków 2007

Składam serdeczne podziękowania
opiekunowi mojej pracy
za pomoc i wyrozumiałość.

Spis treści

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest omówienie jednej z najważniejszych funkcji specjalnych - funkcji dzeta Riemanna. Na jej temat napisano już wiele książek, powstało mnóstwo prac naukowych oraz artykułów. Tak więc z ogromnej ilości zagadnień, problemów i zastosowań tej funkcji musieliśmy niestety wybrać tylko niektóre.

W pierwszym rozdziale opiszemy podstawowe własności funkcji ζ*, udowodnimy iloczyn Eulera oraz równanie funkcyjne Riemanna. Wyprowadzimy również wzory szeregów będących przedłużeniami funkcji* ζ *na półpłaszczyznę zespoloną* $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0 \wedge s \neq 1\}$ *oraz na całą płaszczyznę zespoloną bez punktu* $s = 1$.

W kolejnym rozdziale zaprezentujemy oraz udowodnimy tw. o liczbach pierwszych. Pokażemy związki analizy zespolonej z teorią liczb poprzez ukazanie roli funkcji ζ *w tym dowodzie.*

W rozdziale trzecim postaramy się przybliżyć najsłynniejszy chyba i nadal otwarty problem matematyki współczesnej, hipotezę Riemanna. Pokrótce przedstawimy dotychczasowe wyniki w kierunku udowodnienia (lub obalenia) RH, a także opiszemy kilka równoważnych stwierdzeń oraz wniosków z niej wynikających.

Na koniec przedstawimy wiele dalszych własności ζ*, jej wartości w wybranych punktach, związki* ζ *z innymi funkcjami specjalnymi jak: funkcja* Γ *Eulera, funkcja* μ *Möbiusa, funkcja* λ *Liouville'a. Pokażemy również jedno z licznych zastosowań funkcji* ζ *w fizyce.*

Rozdział 1

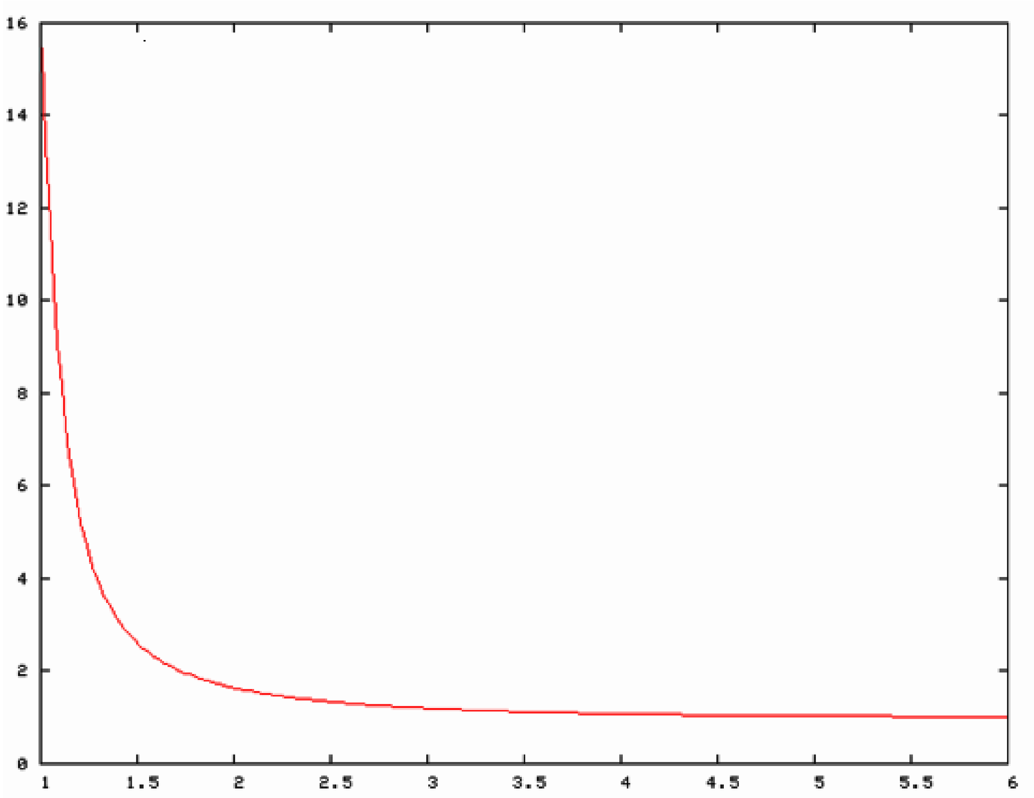
Definicja i podstawowe własności funkcji ζ

1.1 Funkcja ζ Riemanna

Funkcja dzeta Riemanna określona jest wzorem:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1. \tag{1.1}$$

Dla $s = \sigma + it$ mamy $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$. A stąd wynika, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie w każdym podzbiorze zwartym tej półpłaszczyzny i funkcja ζ jest tam holomorficzna.



$\boldsymbol{\zeta(t),\ 0 < t < 6}$.*

Co ciekawe, wzór (1.1) jako pierwszy sformułował Euler. Wykazał on również, iż funkcja ta ma głębokie i istotne związki z liczbami pierwszymi, a dokładniej udowodnił, że

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \ldots = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

gdzie $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych.

Twierdzenie 1.1 (Iloczyn Eulera, 1737 r.). *Prawdziwa jest następująca tożsamość:*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad \Re(s) > 1$$

gdzie w iloczynie występują wszystkie liczby pierwsze.

---

*Rysunek pochodzi ze strony *http : //en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function*.

Fakt ten ma ogromne zastosowanie w teorii liczb, m.in. w dowodzie twierdzenia o rozkładzie liczb pierwszych.

Dowód. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
\zeta(s)(1-2^{-s}) &= \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\dots\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\dots\right)-\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\dots\right)
\end{aligned}$$

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = \left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\dots\right)-\left(\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\dots\right)$$

Widać więc, że:

$$\begin{aligned}
\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\dots(1-p_n^{-s})\dots &= \zeta(s)\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-s})\\
&= 1
\end{aligned}$$

A stąd już natychmiast otrzymujemy tezę. □

1.2 Globalnie zbieżny szereg dla funkcji ζ

Powyżej zdefiniowaliśmy funkcję ζ dla liczb zespolonych s takich, że $\Re(s) > 1$. Spróbujmy teraz znaleźć jej analityczne przedłużenie na większy obszar. Dla $\Re(s) > 1$, mamy:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right) = s\sum_{n=1}^{\infty} n\int_n^{n+1} x^{-s-1}dx.$$

Niech $x = [x] + \{x\}$, gdzie $[x]$ jest cechą, a $\{x\}$ mantysą liczby x. Ponieważ $[x]$ jest na każdym z przedziałów $[n, n+1)$ stałe i równe n, możemy więc napisać

$$\zeta(s) = s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}[x]x^{-s-1}dx = s\int_1^{\infty}[x]x^{-s-1}dx.$$

Wstawiając $[x] = x - \{x\}$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= s\int_1^{\infty} x^{-s}dx - s\int_1^{\infty}\{x\}x^{-s-1}dx\\
&= \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty}\{x\}x^{-s-1}dx, \quad \sigma > 0 \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że całka niewłaściwa w (1.2) jest zbieżna dla $\sigma > 0$ (ponieważ całka $\int_1^\infty x^{-\sigma-1}dx$ jest zbieżna). Ta całka niewłaściwa definiuje funkcję analityczną w obszarze $\Re(s) > 0$. Stąd też funkcja meromorficzna w (1.2) daje analityczną kontynuację $\zeta(s)$ na półpłaszczyznę $\Re(s) > 0$, a wyraz $\frac{s}{s-1}$ daje biegun $\zeta(s)$ w punkcie $s = 1$.

Aby przedłużyć funkcję $\zeta(s)$ na całą płaszczyznę zespoloną bez punktu $s = 1$ posłużymy się *funkcją gamma* $\Gamma(s)$ zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt. \tag{1.3}$$

Mamy

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}dt$$

dla $\sigma > 0$. Wstawiając $t = n^2\pi x$, dostajemy

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx.$$

Dalej sumując po $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ oraz zmieniając kolejność sumowania i całkowania:

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)dx \\ &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx, \qquad (1.4)\end{aligned}$$

gdzie

$$\theta(x) := \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2\pi x}$$

jest *funkcją theta Jacobiego.*

Lemat 1.2. *Funkcja θ spełnia następujące równanie funkcyjne:*

$$x^{\frac{1}{2}}\theta(x) = \theta(x^{-1}), \tag{1.5}$$

prawdziwe dla $x > 0$.

Dowód. Definiujemy

$$f(t) := e^{-\pi t^2 x} \quad \text{oraz} \quad F(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n).$$

Wówczas F jest funkcją okresową o okresie 1 i spełnia warunek Lipschitza. Jej szereg Fouriera jest więc zbieżny punktowo, a stąd

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi int} F(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n),$$

gdzie

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ist} f(t)dt$$

jest transformatą Fouriera funkcji f. Aby znaleźć $\widehat{f}$, musimy obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}dx$ dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $b > 0$. Po podstawieniu $s = \sqrt{b}x - ai/(2\sqrt{b})$ i całkowaniu po odpowiednim konturze otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}dx = \frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}} \int_{\{\Im(s)=-\frac{a}{2\sqrt{b}}\}} e^{-s^2}ds = \frac{e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}.$$

Stąd

$$\left(e^{-\pi t^2 x}\right)^{\wedge} = \frac{e^{-\pi s^2/x}}{\sqrt{x}},$$

co kończy dowód. $\square$

Możemy więc już powrócić do naszych poprzednich rozważań. Liczymy dalej:

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx.$$

Zajmijmy się najpierw pierwszą całką. Korzystając z równania (1.5) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x)dx - \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}dx\right)\\
&= -\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x)dx\right)\\
&= -\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}x^{-\frac{1}{2}}\theta(x^{-1})dx\\
&= -\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\theta(x)dx\\
&= -\frac{1}{s}+\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx\\
&= -\frac{1}{s}+\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx+\frac{1}{s-1}\\
&= \frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx.
\end{aligned}$$

Sumując ostatni wynik z drugą całką, dostajemy:

$$\zeta(s)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left\{\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\theta(x)-1}{2}\right)dx\right\}. \quad (1.6)$$

Wskutek eksponencjalnego spadku funkcji θ, całka niewłaściwa w równaniu (1.6) jest zbieżna dla każdego $s\in\mathbb{C}$ a stąd definiuje funkcję całkowitą na zbiorze liczb zespolonych. Stąd też (1.6) jest analityczną kontynuacją funkcji $\zeta(s)$ na całą płaszczyznę zespoloną bez punktu $s=1$.

1.3 Równanie funkcyjne

Zajmiemy się teraz równaniem funkcyjnym dla $\zeta(s)$. Riemann zauważył, że wzór (1.6) nie tylko zapewnia analityczne przedłużenie funkcji $\zeta(s)$, ale także dostarcza równanie funkcyjne. Zaobserwował on bowiem, że wyrażenie $\frac{1}{s(s-1)}$ oraz całka niewłaściwa w (1.6) nie zmienią się jeśli zastąpimy s przez $1-s$. Stąd też wyprowadził poniższe równanie:

Twierdzenie 1.3 (Równanie funkcyjne). *Dla każdego $s\in\mathbb{C}$,*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

Z powyższego równania funkcyjnego, widać że funkcja ζ ma tak zwane *zera trywialne* w punktach $s = -2,\ -4,\ -6,\ \ldots$.

1.4 Funkcje $\xi(s)$ i $\Xi(t)$

Rozpatrzmy funkcję:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Wówczas równanie funkcyjne upraszcza się do postaci:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Zbiór zer funkcji $\xi(s)$ jest zbiorem nietrywialnych zer funkcji $\zeta(s)$. Mamy także $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$. Wobec tego

$$\overline{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)} = \xi\left(\frac{1}{2}-it\right) = \xi\left(1-(\frac{1}{2}+it)\right) = \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

Zatem $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \in \mathbb{R}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Określamy teraz funkcję rzeczywistą $\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Jest to funkcja parzysta, $\Xi(-t) = \Xi(t)$. Zbiór zer funkcji $\zeta(s)$ na prostej krytycznej jest równy zbiorowi zer funkcji $\xi(s)$ na tej prostej, odpowiada więc zbiorowi zer rzeczywistych funkcji $\Xi(t)$.

Rozdział 2

Twierdzenie o liczbach pierwszych

2.1 Wprowadzenie

Nasza fascynacja liczbami pierwszymi rozpoczęła się już w starożytności. Euklides udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. Eratostenes opracował metodę znajdowania liczb pierwszych (tzw. Sito Eratostenesa). Poprzez dokładne badania tabeli liczb pierwszych, C. Gauss (1777-1855) sformułował zależność, którą my dziś nazywamy twierdzeniem o liczbach pierwszych. Niech $\pi(n)$ oznacza moc zbioru liczb pierwszych spełniających warunek $p \leqslant n$. Twierdzenie o liczbach pierwszych głosi, że:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}, \qquad \text{(tzn.} \quad \frac{\pi(n)}{n/\log n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1)$$

Nie ma tu wzmianki o liczbach zespolonych, tym bardziej zaskakującym jest fakt, że pierwszy (i przez długi czas jedyny znany) dowód przeprowadzony był w oparciu o analizę zespoloną. Droga wiodąca do dowodu tego twierdzenia była długa i zawiła. Niezwykle pomocną okazała się być poniższa funkcja, tak zwany *logarytm całkowy*:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Łatwo zaobserwować, że $Li(x) \sim x/\log x$ przy $x \to +\infty$. Posługując się komputerem można obliczyć, że dla $x = 10^6$ $Li(x) \approx 78\ 628$ oraz $\pi(x) = 78\ 498$.

A biorąc $x = 10^9$ dostajemy $Li(x) \approx 50\ 849\ 235$ oraz $\pi(x) = 50\ 847\ 478$. Twierdzenie o liczbach pierwszych orzeka, że błąd (w pewnym sensie) będzie malał do zera przy x dążącym do nieskończoności. Dokładniejsze przybliżenia tego błędu dostarczają nam bardziej szczegółowych informacji dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych.

Rosyjski matematyk P. L. Czebyszew (1821-1894) udowodnił, że iloraz:

$$\frac{\pi(n)}{n/\log n} \tag{2.1}$$

zawsze leży pomiędzy dwoma dodatnimi stałymi, kiedy n jest „duże". J. J. Sylvester $(1814 - 1897)$ „zepchnął" te stałe bliżej siebie (choć nadal leżały one po obydwu stronach 1). Dopiero J. Hadamard $(1865 - 1963)$ i C. de la Vallee Poussin $(1866 - 1962)$, niezależnie od siebie udowodnili, że wyrażenie (2.1) jest asymptotyczne z 1 gdy $n \to \infty$. Napiszmy to bardziej formalnie:

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie o liczbach pierwszych). *Funkcja $\pi(n)$ jest asymptotycznie równoważna z $n/\log n$ w następującym sensie:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1.$$

Istotnym krokiem do przodu w dowodzie tego twierdzenia, dokonanym przez Hadamarda i de la Vallee Poussina, było zastosowanie narzędzi spoza teorii liczb. W szczególności posłużyli się analizą zespoloną - wykorzystali funkcję ζ Riemanna w wyczerpujący i oryginalny sposób.

W 1949 Selberg i Erdős znaleźli „elementarny" dowód Tw.2.1. Był on elementarny w tym sensie, że nie wykorzystano w nim analizy zespolonej. W istocie był on techniczny i niezwykle skomplikowany.

Aktualny dowód Tw.2.1, który zaprezentuję pochodzi od D. J. Newmana [6] i został nieco uproszczony przez Zagiera [10].

2.2 Twierdzenie o liczbach pierwszych a analiza zespolona

Na pierwszy rzut oka nie widać żadnego oczywistego związku Tw.2.1 z analizą zespoloną. Funkcja $\pi(n)$ prowadzi z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ stąd nie ma mowy o jej różniczkowalności, a nawet ciągłości. Kluczem do rozwiązania okazał się być iloczyn Eulera (patrz Tw.1.1):

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad \Re(s) > 1 \tag{2.2}$$

który możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots). \tag{2.3}$$

Zaczniemy od dowodu następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.2. *Suma odwrotności liczb pierwszych jest nieskończona:*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

W szczególności istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód. Zauważmy, że $0 < \zeta(s) < +\infty$ dla $s \in (1, \infty)$. Prawa strona równości (2.2) wyraźnie maleje kiedy zbliżamy się z s do 1, $s \to 1^+$. Załóżmy niewprost, że $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} < +\infty$. Wówczas iloczyn $\prod_{p\in\mathcal{P}}(1 - \frac{1}{p})$ jest zbieżny i ma granicę różną od zera. Również dla wszystkich rzeczywistych $s > 1$ oraz dla ustalonej $N > 0$ mamy:

$$\prod_{p\leqslant N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \geqslant \prod_{p\leqslant N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geqslant \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > 0$$

Stąd

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{s\to 1^+} \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \geqslant \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) > 0.$$

A zatem granica $\lim_{x\to 1^+} \zeta(s)$ jest skończona. Ale dla dowolnego $A > 0$, znajdziemy $N \in \mathbb{Z}^+$ takie, że $\sum_1^N \frac{1}{n} > A$. Stąd też $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) \geqslant \sum_1^N \frac{1}{n} > A$.

W rezultacie otrzymujemy, że $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s)$ nie może być skończone. Sprzeczność. $\square$

Dla uproszczenia zapisu będziemy używać następującego oznaczenia:

$$f(x) \sim g(x) \quad \equiv \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Heureza. Funkcja $\pi(x)$ wskazuje które liczby są pierwsze w następujący sposób: liczba naturalna n jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy wartość $\pi(x)$ wzrasta o 1 dla $x = n$. Stąd wartość poniższej sumy:

$$\sum_{p\leqslant x} f(p), \quad p \in \mathcal{P}$$

gdzie dana funkcja f jest określona na $\mathbb{R}^+$, jest w tym sensie zdeterminowana przez wartości funkcji $\pi(x)$. To ostatnie wyrażenie zapiszemy teraz przy pomocy całki Stjeltiesa. Mianowicie:

$$\sum_{p\leqslant x} f(p) = \int_0^x f(t)d\pi(t)$$

zakładając oczywiście, że f jest ciągłą funkcją określoną na $\mathbb{R}^+$. Podstawmy w powyższym wyrażeniu $f(x) = \log x$ zakładając przy tym na chwilę, że $\pi(x)$ równa się $x/\log x$. Oczywiście funkcja $\pi(x)$, która jest „skokowa", nie może i nie równa się $x/\log x$, która jest $\mathcal{C}^\infty$ na $\{x: \ x > 1\}$. Możemy jednak założyć, że idea asymptotycznego zachowania $\sum_{p\leqslant x} f(p)$ przy $n \to +\infty$ może wywodzić się z asymptotycznego zachowania funkcji $\pi(x)$. Oznaczmy teraz:

$$\vartheta(x) := \sum_{p\leqslant x} \log p.$$

Następnie dla wygody możemy zmienić dolną granicę sumowania (bez straty ogólności, ponieważ interesują nas tylko duże wartości x),

$$\vartheta(x) \sim \sum_{2<p\leqslant x} \log p.$$

Wyrażenie $\sum_{2<p\leqslant x}\log p$ powinno być tej samej wielkości co:

$$\begin{aligned}\int_2^x \log t\ d(t/\log t) &= \log t\cdot\frac{t}{\log t}\bigg|_2^x - \int_2^x \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\log t}dt\\ &= x-2-\int_2^x\frac{1}{\log t}dt.\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z całkowania przez części. Korzystając z reguły l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_2^x\frac{1}{\log t}dt}{x}\overset{R.H.}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{\log 2}}{1}=0.$$

Stąd możemy już wnioskować, że

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\log p=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x}=1$$

lub też $\vartheta(x)\sim x$.

Ta ostatnia asymptotyczność jest rzeczywiście prawdziwa, chociaż jeszcze jej dokładnie nie udowodniliśmy, nawet przy dodatkowym założeniu, że $\pi(x)\sim x/\log x$.

Powyższe heurystyczne rozumowanie może być (nawet mniej formalnie) odwrócone. Załóżmy, że

$$\vartheta(x)=x \qquad \text{lub} \qquad x\sim\int_2^x(\log t)d\pi(t).$$

Różniczkujemy ostatnie wyrażenie względem x otrzymując:

$$1\sim\log x\frac{d\pi(x)}{dx}$$

czyli

$$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{1}{\log t}dt$$

Ale

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_2^x\frac{1}{\log t}dt}{x/\log x}=1$$

Ponownie, dzięki regule l'Hospitala mamy:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Tak więc niespodziewanie, te niepewne rozważania i mało rygorystyczne rozumowania zaprowadziły nas do prawdziwych konkluzji. Teraz sformułujemy i udowodnimy nasze pomysły prawidłowo i dokładnie:

Lemat 2.3. *Prawdziwa jest następująca asymptotyczność:*

$$\vartheta(x) \sim x$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\vartheta(x) \sim x$. Teraz

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p \leqslant \sum_{p \leqslant x} \log x = \pi(x) \log x.$$

Także, dla $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \vartheta(x) \quad & \geqslant \quad \sum_{x^{1-\varepsilon} \leqslant p \leqslant x} \log p \\ & \geqslant \quad \sum_{x^{1-\varepsilon} \leqslant p \leqslant x} (1-\varepsilon) \log x \\ & \geqslant \quad (1-\varepsilon) \log x [\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})]. \end{aligned}$$

Stąd, dla dużych x,

$$\frac{1}{x}\pi(x)\log x \geqslant \frac{\vartheta(x)}{x} \geqslant (1-\varepsilon)\frac{\log x}{x}\pi(x) - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})\log x}{x}(1-\varepsilon).$$

Ale $\pi(x^{1-\varepsilon}) \leqslant x^{1-\varepsilon}$, tak więc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x^{1-\varepsilon}) \log x}{x} = 0.$$

Stąd już wynika, że $\pi(x) \sim x/\log x$. Dowód w przeciwną stronę polega na odwróceniu kroków powyższego rozumowania. □

Pokażemy teraz, że dla dużych wartości x, $\vartheta(x)$ jest bliskie x w pewnym „całkowym" sensie.

Lemat 2.4. *Jeśli istnieje*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\vartheta(t)-t}{t^2}dt$$

to wówczas $\vartheta(x)\sim x$.

Dowód. Załóżmy niewprost, że istnieje liczba $\lambda > 1$ taka, że dla pewnego ciągu $\{x_j\},\ x_j\in\mathbb{R}$, którego granica $\lim_{j\to\infty} x_j = +\infty$ mamy:

$$\vartheta(x_j)\geqslant \lambda x_j.$$

Korzystając z faktu, że ϑ jest niemalejąca oraz biorąc x równe pewnemu x_j dostajemy:

$$\int_x^{\lambda x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}dt \geqslant \int_x^{\lambda x}\frac{\lambda x - t}{t^2}dt = \left|\begin{array}{c} u=\frac{t}{x}\\ du=\frac{dt}{x}\\ xdu=dt\end{array}\right| = \int_1^{\lambda}\frac{\lambda-u}{u^2}du = c_1,$$

gdzie $c_1 = -1+\lambda-\log\lambda > 0$ dla dowolnej $\lambda > 1$. To oszacowanie jest sprzeczne z założeniem o zbieżności całki (z warunku Cauchy'ego). Ta zbieżność implikuje że

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{x_j}^{\lambda x_j}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}dt = 0.$$

Jeśli teraz założymy, że dla pewnego $0<\lambda<1$ zachodzi nierówność $\vartheta(x_j)\leqslant\lambda x_j$, to dla x równemu pewnemu x_j, mamy:

$$\int_{\lambda x}^{x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}dt \leqslant \int_{\lambda x}^{x}\frac{\lambda x-t}{t^2}dt = \int_{\lambda}^{1}\frac{\lambda-t}{t^2}dt = c_2.$$

gdzie $c_2 = 1-\lambda+\log\lambda < 0$.
Ponownie dostaliśmy sprzeczność. □

To, czy faktycznie zrobiliśmy jakiś postęp w dowodzie Tw.2.1, zależy od tego czy potrafimy udowodnić zbieżność całki:

$$\int_1^x\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}dt\ ,\quad gdzie\ x\to+\infty.$$

I tu właśnie sięgniemy po analizę zespoloną. Zanim jednak to zrobimy, udowodnimy jeszcze pewien wniosek dotyczący funkcji ϑ. Chcemy pokazać, że $\vartheta(x)\sim x$, ale już w tej chwili możemy zobaczyć, że $\vartheta(x)=\mathcal{O}(x)$*.

*notacja Landau'a; oznacza to, że $\limsup_{x\to+\infty}\vartheta(x)/x < +\infty$ lub równoważnie, że istnieje stała $C>0$ taka, że $\vartheta(x)\leqslant Cx$

Lemat 2.5. *Dla pewnego $C > 0$ i wszystkich $x \geqslant 1$, mamy $\vartheta(x) \leqslant Cx$. Równoważnie, używając notacji Landau'a, $\vartheta(x) = \mathcal{O}(x)$.*

Dowód. Dla dowolnej liczby $N \in \mathbb{Z}_+$ prawdą jest, że

$$(1+1)^{2N} = \sum_{m=0}^{2N} \binom{2N}{m} \geqslant \binom{2N}{N} \geqslant e^{\vartheta(2N)-\vartheta(N)} \tag{2.4}$$

biorąc liczbę pierwszą p taką, że $p \in (N,\ 2N)$, widzimy że p dzieli $(2N)!$ ale nie dzieli $N!$. Stąd p dzieli

$$\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!)^2}.$$

Logarytmując obustronnie wyrażenie (2.4) otrzymujemy:

$$\vartheta(2N) - \vartheta(N) \leqslant 2N \log 2.$$

Sumując po $N = 2,\ N = 4,\ N = 8, \ldots,\ N = 2^k$

$$+\begin{cases} \vartheta(4) - \vartheta(2) \leqslant 4 \log 2 \\ \vartheta(8) - \vartheta(4) \leqslant 8 \log 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vartheta(2^{k+1}) - \vartheta(2^k) \leqslant 2^k \log 2 \end{cases}$$

dostajemy:

$$\begin{aligned} \vartheta(2^{k+1}) &\leqslant 1 + (\log 2)(1 + \ldots + 2^k) \\ &\leqslant 1 + (\log 2)(2^{k+1} - 1) \\ &\leqslant (3 \log 2)(2^k) \end{aligned}$$

przy założeniu, że $k \geqslant 2$. Teraz, dla dowolnego $x \geqslant 2$ istnieje liczba całkowita $k > 2$ taka, że $2^k \leqslant x \leqslant 2^{k+1}$. Stąd

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\leqslant \vartheta(2^{k+1}) \\ &\leqslant (3 \log 2)(2^k) \\ &\leqslant (6 \log 2)x. \end{aligned}$$

□

2.3 Związki analizy zespolonej i twierdzenia o liczbach pierwszych

W poprzednich podrozdziałach zasygnalizowaliśmy w jaki sposób wykorzystać nasze wiadomości na temat funkcji ζ w celu uzyskania informacji na temat dystrybucji liczb pierwszych. Jednakże w dowodzie Tw.2.1 będziemy opierać się na bardziej szczegółowych rozważaniach dotyczących związku ζ i funkcji π.

Rozpoczniemy prostej obserwacji, którą wykorzystamy w kilku dowodach.

Lemat 2.6. *Funkcja*

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\ , \qquad \textit{gdzie} \ \ \Re(s) > 1$$

przedłuża się holomorficznie do całej półpłaszczyzny $\{s : \Re(s) > 0\}$.

Dowód. Wynika z faktu, że funkcja ζ jest postaci (1.2). □

Zdefiniujemy teraz funkcję Φ

$$\Phi(s) := \sum_{p \in \mathcal{P}} (\log p) p^{-s}, \quad \textit{gdzie } s \in \mathbb{C}.$$

Oczywiście, aby ta definicja miała sens, musimy mieć pewność, że szereg jest zbieżny dla wskazanych wartości s. W rzeczywistości, ten szereg jest absolutnie i jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach półpłaszczyzny $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re(s) > 0 \wedge s \neq 1\}$, co w oczywisty sposób wynika z następujących faktów:

(1) Oszacowanie:

$$|(\log p)p^{-s}| \leqslant |p^{-s+\varepsilon}| \leqslant |p^{-\Re(s)+\varepsilon}|$$

pozostaje prawdziwe dla dużych wartości p;

(2) Szereg $\sum_{1}^{\infty} |p^{-s}|$ jest zbieżny dla każdego s zespolonego z $\Re(s) > 1$.

Obydwa powyższe stwierdzenia są trywialne i nie wymagają formalnych dowodów.

Funkcja Φ jest blisko związana z funkcją ζ. W szczególności Φ powstaje poprzez obliczenie „pochodnej logarytmicznej" ζ'/ζ w następujący sposób: Korzystamy z reprezentacji ζ przy pomocy nieskończonego iloczynu:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{(1-p^{-s})}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{[\partial/\partial s](1-p^{-s})}{1-p^{-s}} \\
&= -\sum_{p\in\mathcal{P}} (p^{-s}\log p)\frac{1}{1-p^{-s}} \\
&= -\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s-1} \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^s\log p}{p^s(p^s-1)} \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{(p^s-1+1)\log p}{p^s(p^s-1)} \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} + \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s} \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} + \Phi(s).
\end{aligned}$$

Szereg

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

jest absolutnie i jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach półpłaszczyzny $\{s : \Re(s) > 1/2\}$. Uzasadnienie tego faktu jest analogiczne do pokazania, że Φ jest dobrze zdefiniowana na $\{s : \Re(s) > 1\}$. Stąd z rozszerzenia funkcji ζ na $\{s: \Re(s) > 0\}$ wynika, że Φ przedłuża się meromorficznie na $\{s: \Re(s) > 1/2\}$. Ta meromorficznie przedłużona funkcja ma biegun w $s = 1$, gdzie ζ też ma biegun. Ma również bieguny w miejscach zerowych funkcji ζ w półpłaszczyźnie $\{s: \Re(s) > 1/2\}$. Oczywiście wiedzielibyśmy więcej o funkcji Φ gdybyśmy umieli dokładnie zlokalizować zera funkcji ζ.

Twierdzenie 2.7. *Funkcja $\zeta(s) \neq 0$ dla $s = 1 + i\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. W szczególności $\Phi(s) - 1/(s-1)$ jest holomorficzna w otoczeniu zbioru $\{\Re(s) \geqslant 1\}$.*

Dowód. Skoro ζ posiada biegun w punkcie $s = 1$ to interesuje nas tylko przypadek gdy $\alpha \neq 0$. Załóżmy, że ζ ma zero rzędu μ w punkcie $1 + i\alpha$ oraz rzędu ν w punkcie $1 + 2i\alpha$ (używamy tu konwencji, w której zero rzędu 0 jest punktem w którym funkcja jest niezerowa). Chcemy pokazać, że $\mu = 0$. W tym celu ocenimy pewne granice, używając wzoru na ζ'/ζ.

(i) Granica $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1$, ponieważ $\Phi(s) - 1/(s-1)$ jest holomorficzna w otoczeniu punktu $s = 1$.

(ii) Granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \cdot \Phi(1 + \varepsilon \pm i\alpha) = -\mu$$

ponieważ końcowa suma w wyrażeniu na $-\zeta'/\zeta$ jest zbieżna, więc pomnożona przez ε ma granicę równą zero. Ponadto $-(s - (1 + i\alpha)) \cdot \zeta'(s)/\zeta(s)$ ma granicę $-\mu$ w $1 + i\alpha$ oraz $-(s - (1 - i\alpha)) \cdot \zeta'(s)/\zeta(s)$ ma granicę $-\mu$ w $1 - i\alpha$. (Zauważmy, że rzędy zer w punktach $1 + \alpha$ i $1 - \alpha$ muszą być równe skoro $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$. Ostatnia równość wynika z faktu, że ζ przyjmuje wartości rzeczywiste na zbiorze $\{x + i0: x \in \mathbb{R},\ x > 1\}$.)

(iii) Granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \cdot \Phi(1 + \varepsilon \pm 2i\alpha) = -\nu.$$

Uzasadnienie analogiczne jak w (ii).

Teraz wykorzystamy pewną algebraiczną sztuczkę. Mianowicie, zauważmy że, skoro $p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2}$ jest liczbą rzeczywistą, to:

$$0 \leqslant \sum_{p>2} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2}\right)^4,$$

ale

$$\sum_{p} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2}\right)^4 =$$

$$\Phi(1+\varepsilon-2i\alpha)+4\Phi(1+\varepsilon-i\alpha)+6\Phi(1+\varepsilon)+4\Phi(1+\varepsilon+i\alpha)+\Phi(1+\varepsilon+2i\alpha).$$

Mnożąc przez $\varepsilon > 0$ i biorąc granice po $\varepsilon \to 0^+$ dostajemy

$$-\nu - 4\mu + 6 - 4\mu - \nu = 6 - 8\mu - 2\nu \geqslant 0$$

Stąd $\mu = 0$ czyli $\zeta(1 + i\alpha) \neq 0$. Holomorficzność funkcji $\Phi(s) - 1/(s-1)$ w otoczeniu 1 wynika z uwag poprzedzających to twierdzenie. $\square$

Postaramy się teraz powiązać funkcję ϑ z Φ, o której zebraliśmy już sporo informacji.

Lemat 2.8. *Jeśli* $\Re(s) > 1$, *to*

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-st} \vartheta(e^t) dt.$$

Dowód. Spróbujmy wyrazić Φ przy pomocy ϑ:

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \\
&= s \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx \\
&= \left| \begin{matrix} x=e^t \\ dx=e^t dt \end{matrix} \right| \\
&= s \int_0^\infty e^{-st} \vartheta(e^t) dt,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Możemy teraz sprowadzić tw. o liczbach pierwszych do ważnego wniosku analizy zespolonej. Wystarczy pokazać, że całka

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

jest zbieżna. Ta zbieżność jest równoważna, poprzez zmianę zmiennych $x = e^t$, ze zbieżnością

$$\int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)dt.$$

Weźmy $f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$. Wtedy, ze wzoru:

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-st}\vartheta(e^t)dt,$$

widzimy, że

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

jest holomorficzna w otoczeniu $\{s : \Re(s) \geqslant 0\}$. Mianowicie,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1}\Phi(s+1) &= \frac{1}{s+1}(s+1)\int_0^\infty e^{-(s+1)t}\vartheta(e^t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}e^{-t}\vartheta(e^t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Ale jak już pokazaliśmy funkcja

$$-\frac{1}{s} + \frac{\Phi(s+1)}{s+1}$$

jest holomorficzna w otoczeniu $\{s : \Re(s) \geqslant 0\}$.

Jak widać zbieżność całki $\int_1^\infty f(t)dt$ pociąga za sobą tw. o liczbach pierwszych, tak więc będzie ono udowodnione, jeśli uda nam się pokazać następujący rezultat (gdzie f zdefiniowana jak wyżej oraz $g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$).

2.4 Twierdzenie całkowe

Twierdzenie 2.9. *Niech* $f(t),\ t \geqslant 0$ *będzie ograniczoną i lokalnie całkowalną funkcją taką, że*

$$g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ , \quad \Re(s) > 0$$

przedłuża się holomorficznie do pewnego otoczenia $\{s:\ \Re(s) \geqslant 0\}$. *Wtedy*

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

istnieje (jest zbieżna) i równa jest $g(0)$.

Dowód. Ustalamy $T > 0$ i zdefiniujmy

$$g_T(s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

Wtedy g_T jest w oczywisty sposób holomorficzna dla każdego s (z tw. Morery). Musimy pokazać, że

$$\lim_{T\to+\infty} g_T(0) = g(0)$$

Niech R będzie dużą, dodatnią liczbą , δ - małą, dodatnią liczbą a C - brzegiem następującego obszaru:

$$U = \{s \in \mathbb{C}:\ |s| \leqslant R,\ \Re(s) \geqslant -\delta\}.$$

Dobieramy δ odpowiednio małą, tak aby $g(s)$ była holomorficzna w otoczeniu domknięcia obszaru wyznaczonego przez C. Wtedy, z wzoru Cauchy'ego zastosowanego do funkcji $(g - g_T)h_T$, gdzie

$$h_T(s) := e^{sT}\left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right),$$

mamy:

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C [g(s) - g_T(s)]e^{sT}\left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right)\frac{ds}{s}.$$

Na zbiorze $C_+ = C \cap \{\Re(s) > 0\}$, funkcja podcałkowa jest ograniczona przez $4B/R^2$, gdzie $B = \max_{t \geqslant 0} |f(t)|$. Jest tak ponieważ

$$|g(s) - g_T(s)| = \left| \int_T^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \leqslant B \int_T^\infty |e^{-st}| dt = \frac{Be^{-\Re(s)T}}{\Re(s)}$$

dla $\Re(s) > 0$) oraz

$$\begin{aligned}
\left| e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \frac{1}{s} \right| &= e^{\Re(s) \cdot T} \cdot \left| \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \cdot \frac{1}{s} \right| \\
&= e^{\Re(s) \cdot T} \cdot \left| (1 + e^{2it}) \frac{1}{s} \right| \\
&= e^{\Re(s) \cdot T} \cdot \frac{1}{R} \cdot \sqrt{(1 + \cos(2t))^2 + \sin^2(2t)} \\
&= e^{\Re(s) \cdot T} \cdot \frac{1}{R} \cdot \sqrt{2 + 2\cos(2t)} \\
&= e^{\Re(s) \cdot T} \cdot \frac{1}{R} \cdot 2|\cos(2t)| \\
&= e^{\Re(s) \cdot T} \cdot \frac{2|\Re(s)|}{R^2}.
\end{aligned}$$

Stąd odpowiednia całka po C_+ jest zbieżna do 0, gdy $R \to \infty$.

Niech $C_- \equiv C \cap \{\Re(s) < 0\}$. By obliczyć tę całkę po C_-, rozważmy osobno g i g_T.

Z jednej strony, skoro g_T jest całkowita, drogę całkowania możemy zamienić na $C'_- \equiv \{s \in \mathbb{C} : \ |s| = R, \ \Re(s) < 0\}$. Całka po C'_- będzie wtedy ograniczona na moduł przez $4\pi B/R$ z tym samym oszacowaniem co wcześniej, ponieważ

$$|g_T(s)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-st} dt \right| \leqslant B \int_{-\infty}^T |e^{-st}| dt = \frac{Be^{-\Re(s) \cdot T}}{|\Re(s)|}$$

dla $\Re(s) < 0$.

Z drugiej strony, pozostała całka po C_- zmierza do 0 gdy $T \to \infty$ ponieważ funkcja podcałkowa jest jest iloczynem funkcji $g(s) \cdot (1 + s^2/R^2)/s$, która jest niezależna od T oraz funkcji e^{sT}, która zmierza jednostajnie do 0 na zbiorach zwartych gdy $T \to +\infty$ w półpłaszczyźnie $\{\Re(s) < 0\}$. Stąd

$$\limsup_{T \to +\infty} |g(0) - g_t(0)| \leqslant 4\pi B/R.$$

Skoro R jest dowolne, twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Rozdział 3

Hipoteza Riemanna

3.1 Wprowadzenie

Hipoteza Riemanna sformułowana pierwotnie przez Bernharda Riemanna w 1859 r. jest chyba najbardziej znanym i najważniejszym nierozwiązanym problemem matematyki współczesnej. Pomimo skoncentrowanych wysiłków wielu wybitnych matematyków, problem ten nadal pozostaje otwarty. Hipoteza Riemanna dotyczy rozmieszczenia zer funkcji $\zeta(s)$. Wiemy, że funkcja ζ jest określona dla wszystkich liczb zespolonych $s \neq 1$ oraz że posiada tak zwane zera trywialne w punktach $-2,\ -4,\ -6, \ldots$. Hipoteza Riemanna koncentruje się na zerach nietrywialnych i orzeka, że:

Hipoteza 3.1 (Riemanna). *Część rzeczywista każdego nietrywialnego zera funkcji ζ jest równa $\frac{1}{2}$.*

Innymi słowy wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ leżą na tak zwanej prostej krytycznej $\frac{1}{2}+it,\ t \in \mathbb{R}$. Hipoteza ta jest jednym z najważniejszych otwartych problemów matematyki współczesnej, ponieważ wiele głębokich i istotnych twierdzeń zostało udowodnionych przy założeniu, że jest ona prawdziwa. Clay Mathematics Institute zaoferował nawet nagrodę wysokości \$1.000.0000 za pierwszy poprawny dowód.

3.2 Wstęp historyczny

W 1859 r. Riemann sformułował w swojej pracy „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse," swoją hipotezę. Wiedział on, że funkcja ζ spełnia następujące równanie funkcyjne:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

a także, że nietrywialne zera funkcji ζ są symetrycznie rozłożone względem prostej $s = \frac{1}{2} + it$ oraz leżą w pasie $0 < \Re(s) < 1$. Policzył nawet kilka pierwszych zer: $\frac{1}{2} + i14.134\ldots$, $\frac{1}{2} + i21.022\ldots$ Riemann wprowadził następującą funkcję zmiennej zespolonej s:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

i pokazał, że $\xi(s)$ jest całkowitą i parzystą funkcją zmiennej s, a jej zera pokrywają się z nietrywialnymi zerami funkcji ζ. Stwierdził również, że liczba zer $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ dla $t \in (0, T]$ wynosi około $\frac{T}{2\pi}\log(\frac{T}{2\pi e})$.

W 1896 r. Hadamard i de la Vallée-Poussin niezależnie od siebie udowodnili, że funkcja ζ nie posiada zer na prostej $\Re(s) = 1$.

W 1900 r. Hilbert umieścił Hipotezę Riemanna na swojej sławnej liście 23 nierozwiązanych problemów (pod numerem VIII). Jednakże początkowo miał on mylne pojęcie na temat trudności RH. Porównał on bowiem trzy nierozwiązane problemy: przestępność liczby $2^{\sqrt{2}}$, Wielkie Twierdzenie Fermata oraz Hipotezę Riemanna. Uznał, że RH doczeka się rozwiązana w ciągu kilu najbliższych lat, Wielkie Twierdzenie Fermata w przeciągu jego życia, a przestępność liczby $2^{\sqrt{2}}$ prawdopodobnie nigdy. W rzeczywistości problem przestępności został rozwiązany jako pierwszy zaledwie parę lat później przez Gelfonda i Schneidera, tw. Fermata w 1994 r. przez Andrew Wilesa, a jak wiemy RH pozostaje nadal otwarta.

W 1914 r. Hardy udowodnił, że na prostej krytycznej leży nieskończenie wiele zer funkcji ζ. Późniejsze prace Hardy'ego i Littlewood'a z 1921 r. oraz

Selberga z 1942 r. przyniosły oszacowania średniej gęstości zer na prostej krytycznej.

W 1945 r. wydawało się, że niemiecki matematyk Hans Rademacher obalił RH. Ten wniosek oparty był na dedukcji, że pewna funkcja miałaby absurdalne przedłużenie analityczne, gdyby RH byłaby prawdziwa. Jednakże matematycy, którzy wzięli pod lupę ten dowód, wykazali że jest on błędny.

Najnowsze prace skupiają się na obliczeniu dokładnych lokacji wielkiej liczby miejsc zerowych (w nadziei na znalezienie kontrprzykładu) lub umiejscowieniu górnych granic liczby zer, które mogą leżeć poza prostą krytyczną (w nadziei, że uda się je zredukować do zera).

3.3 Zasadnicze twierdzenia o zerach funkcji ζ

Przypomnijmy najpierw udowodnione w rozdziale drugim jedno ważniejszych twierdzeń dotyczących zer funkcji ζ.

Twierdzenie 3.2 (**J. Hadamard, Ch. de le Vallée-Poussin, 1896**). *Funkcja $\zeta(s)$ nie ma zer na prostej $\Re(s) = 1$.*

Warto tu jeszcze wspomnieć o osiągnięciach dwóch matematyków Vinogradova i Korobova, którzy niezależnie od siebie wykazali, że $\zeta(s)$ nie ma zer w obszarze:

$$\Re(s) \geqslant 1 - \frac{c}{(\log|t|+1)^{\frac{2}{3}}(\log\log(3+|t|))^{\frac{1}{3}}},$$

gdzie c jest pewną stałą dodatnią.

Oznaczmy teraz

$$N(T) := \#\{s \in \mathbb{C} : \zeta(s) = 0,\ 0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1,\ 0 \leqslant \Im(s) \leqslant T\},$$

$$N_0(T) := \#\{s \in \mathbb{C} : \zeta(s) = 0,\ \Re(s) = \frac{1}{2},\ 0 \leqslant \Im(s) \leqslant T\},$$

Twierdzenie 3.3 (**H. v. Mangoldt, 1895, 1905**). *Mamy*

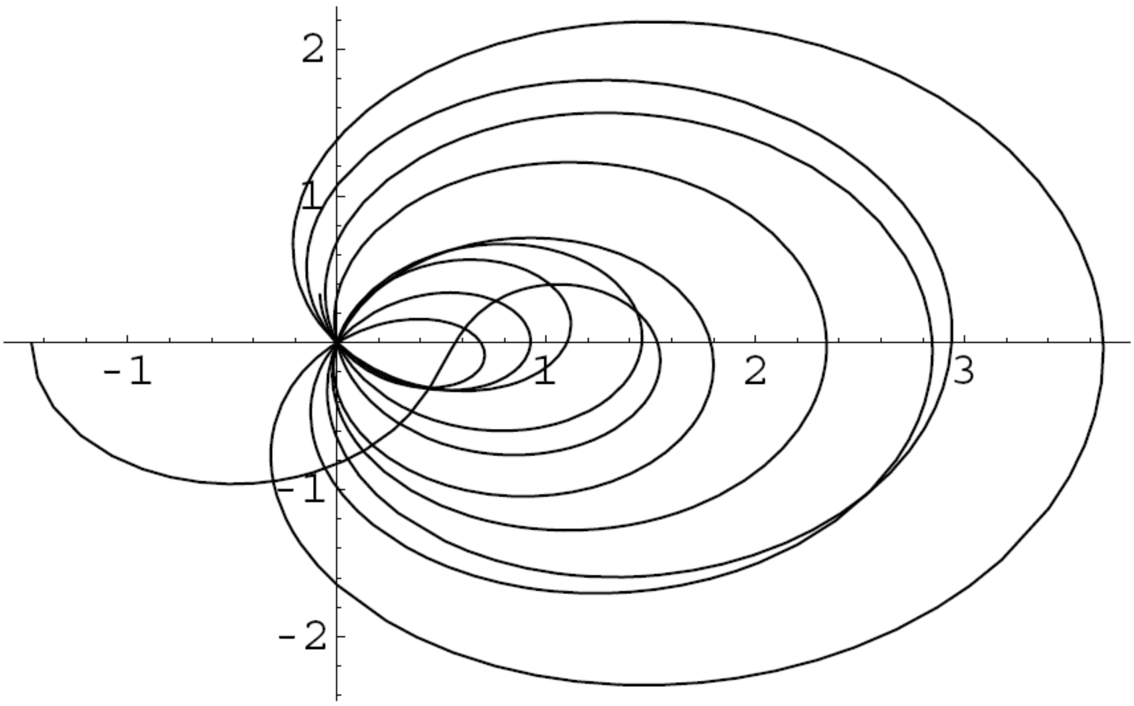
$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)$$

Dokładniej

$$|\mathcal{O}(\log T)| \leqslant 0.5\log T + 2\log\log T + 14$$

W 1924 r. J.E. Littlewood poprawił to oszacowanie do $\mathcal{O}(\log T/\log\log T)$.

Jednym z pierwszych rezultatów przemawiających na korzyść RH jest twierdzenie Hardy'ego.



$\zeta(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \mathbf{it}),\ \mathbf{0} < \mathbf{t} < \mathbf{50}.$*

Twierdzenie 3.4 (**G. H. Hardy, 1914**). *Nieskończenie wiele zer funkcji* $\zeta(s)$ *leży na prostej* $\Re(s) = \frac{1}{2}$

*Rysunek pochodzi z pracy J.B.Conrey [3].

Twierdzenie 3.5 (**J. B. Conrey, 1989**).

$$N_0(T) \geqslant 0.4088 \cdot N(T).$$

Hipoteza 3.6 (**Riemanna**).

$$N_0(T) = N(T).$$

3.4 Hipotezy równoważne RH

Omówię teraz kilka innych nadal otwartych problemów matematycznych, równoważnych RH. Warto poświęcić im trochę uwagi, ponieważ dają one większe pole do manewrów przy ewentualnych próbach dowiedzenia RH. Po pierwsze RH jest równoważna następującemu „wzmocnionemu" tw. o rozkładzie liczb pierwszych:

Równoważność 3.7. *Stwierdzenie, że*

$$\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x)$$

jest równoważne hipotezie Riemanna.

Dla potrzeb kolejnej równoważności zdefiniujemy funkcję *lambda Liouville'a.*

Definicja 3.8. *Funkcja lambda Liouville'a jest zdefiniowana w następujący sposób:*

$$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)},$$

gdzie $\omega(n)$ jest liczbą wszystkich czynników pierwszych n liczonych z krotnościami.

Równoważność 3.9. *Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi*

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \ldots \lambda(n) \ll n^{1/2+\varepsilon}.$$

Używając języka rachunku prawdopodobieństwa możemy powiedzieć, że liczba całkowita ma równe szanse posiadania parzystej jak i nieparzystej liczby czynników pierwszych.

Następna równoważność wykorzystuje *funkcje Möbiusa i Mertensa.*

Definicja 3.10. *Funkcja Möbiusa jest zdefiniowana w następujący sposób*

$$\mu(n) := \begin{cases} 0, & \textit{jeżeli } n \textit{ dzieli się przez kwadrat jakiejś liczby pierwszej} \\ -1^k, & \textit{gdy } n = p_1 \dots p_k,\ p_i \in \mathcal{P},\ p_i \neq p_j \textit{ dla } i \neq j \\ 1, & \textit{gdy } n = 1 \end{cases}$$

Definicja 3.11.

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n).$$

Równoważność 3.12. *Hipoteza Riemanna jest równoważna następującemu oszacowaniu:*

$$M(x) = \mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon})$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Zamiast analizować funkcję $\pi(x)$, rozsądniejsza wydaje się być praca z funkcją $M(x)$ i dowód powyższego oszacowania, być może poprzez jakieś rozumowanie kombinatoryczne. W rzeczywistości Stjelties dał do zrozumienia, że ma taki dowód. W 1896 Hadamard, w swoim sławnym dowodzie tw. o liczbach pierwszych, odniósł się do orzeczenia Stjeltiesa i zaproponował osłabione znacznie twierdzenie, że $\zeta(s)$ na prostej $\Re(s) = 1$, w nadziei że prostota jego dowodu może się okazać użyteczna. Niestety Stjelties nigdy nie opublikował swojego dowodu.

Z kolei Mertens postawił mocniejsza hipotezę:

$$|M(x)| \leqslant \sqrt{x}.$$

Oczywiście implikuje ona RH. Jednakże hipotezę tą obalili Odlyżko i te Riele w 1985. Oszacowanie $M(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x})$ najprawdopodobniej również jest nieprawdziwe, choć nikomu jeszcze nie udało się tego dowieść.

Możemy także sformułować RH przy pomocy funkcji sumy dzielników.

Definicja 3.13. *Dla* $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d.$$

Równoważność 3.14. *Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że dla każdego* $n > 5040$

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log n,$$

gdzie γ *jest stałą Eulera.*

Robin wykazał również, bezwarunkowo, że:

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log n + 0.6482 \frac{n}{\log \log n}, \quad \forall n \geqslant 3,$$

W oparciu o jego prace, Lagarias udowodnił kolejną równoważność RH, która wykorzystuje funkcję sumy dzielników.

Równoważność 3.15. *Poniższe stwierdzenie jest równoważne RH:*

$$\sigma(n) \leqslant H_n + e^{H_n} \log H_n$$

dla każdego $n \geqslant 1$*, równość zachodzi gdy n=1.*

Tutaj H_n oznacza n-tą liczbę harmoniczną, zdefiniowaną jako:

$$H_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Ostatnia zaprezentowana równoważność odróżnieniu od poprzednich, ma charakter analityczny.

Równoważność 3.16. *Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że wszystkie zera funkcji* η *Dirichleta:*

$$\eta(n) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s),$$

które znajdują się w pasie $0 < \Re(s) < 1$*, leżą na prostej* $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Wiele wysiłku włożono w udowodnienie *hipotezy Lindelöfa*, będącej konsekwencją RH. Postuluje ona, że dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \mathcal{O}(t^{\varepsilon}), \quad \textit{przy } t \to \infty.$$

Hardy i Littlewood udowodnili, że $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$. To Weyl poprawił to oszacowanie do $t^{\frac{1}{6}+\varepsilon}$.

Kolejnym wynikiem RH jest tzw. *hipoteza gęstościowa*, która mówi,że:

$$N(\sigma, T) = \mathcal{O}(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)}),$$

gdzie $N(\sigma, T)$ jest liczbą zer funkcji ζ w prostokącie $\{s \in \mathbb{C} : \sigma \leqslant \Re(s) < 1,\ |\Im(s)| < T\}$.

Żadne z powyższych przypuszczeń nie zostało do tej pory udowodnione. Wiadomo, że prawdziwość RH pociągłaby za sobą prawdziwość hipotezy Lindelöfa, a ta z kolei pociągłaby za sobą prawdziwość hipotezy gęstościowej.

Pomimo sceptycznych opinii niektórych matematyków, wynikłych głównie z wielkiej liczby niepowodzeń w dowodzeniu tej hipotezy, możemy dziś spokojnie stwierdzić, że istnieje więcej argumentów za niż przeciw.

1° *Podejście numeryczne*

Przeprowadzono numerycznie weryfikację zer w zadanym przedziale w następujący sposób. Liczba $\widetilde{N}(T)$ zer funkcji ζ w prostokącie $\mathcal{R}$ o wierzchołkach w punktach: $-1-iT$, $2-iT$, $2+it$, $-1+iT$ wyraża się przy pomocy całki Cauchy'ego:

$$\widetilde{N}(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds,$$

-1 po lewej stronie równania wynika z faktu, że $\zeta(s)$ ma biegun w punkcie $s = 1$. Funkcja ζ i jej pochodna mogą być policzone z bardzo dużą dokładnością wykorzystując wzór sumacyjny MacLaurin'a lub równanie Riemanna-Siegela. Wielkość $\widetilde{N}(T) - 1$, która jest liczbą całkowitą, jest liczona poprzez podzielenie numerycznej oceny wartości całki przez $2\pi i$ i zaokrąglając część rzeczywistą do najbliższej liczby całkowitej.

Jak widać nietrudno policzyć ile zer znajduje się w tym prostokącie. Nie wynika stąd jednak, że znajdują się one na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Aby temu zaradzić wybieramy punkty $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{\widetilde{N}(T)} < T$ tak, aby rzeczywista funkcja $\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$ przyjmowała w kolejnych punktach wartości o przeciwnych znakach. Ponieważ funkcja Ξ jest ciągła to pomiędzy dowolnymi dwoma kolejnymi punktami istnieje zero nieparzystego rzędu. Jeśli więc liczba zmian znaków jest równa $\widetilde{N}(T)$, można stąd wysnuć wniosek, że wszystkie zera funkcji $\zeta(s)$ w $\mathcal{R}$ są nietrywialne i spełniają hipotezę Riemanna. W ten właśnie sposób matematycy van de Lune, te Riele i Wiener w 1986 r. pokazali, że pierwszych 1,5 miliarda nietrywialnych zer funkcji $\zeta(s)$ leży na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Najnowsze obliczenia z 2004 r. przeprowadzone przez X. Gourdona oraz P. Demichela wykazały, że pierwszych $10000000000000 = 10^{13}$ zer funkcji ζ znajduje się na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

2° Prawie wszystkie zera leżą bardzo blisko prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$. W rzeczywistości udowodniono, że ponad 99% zer $\rho = \beta + i\gamma$ spełnia $|\beta - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{8}{\log|\gamma|}$.

Dodatek A

Dalsze własności funkcji ζ

A.1 Wartości funkcji ζ

Dzeta jest funkcją stosunkowo tajemniczą. Trudną rzeczą jest nawet obliczanie jej wartości. W 1739 r. Euler znalazł wymierne współczynniki $\mathcal{C}$ dla wartości $\zeta(2n) = \mathcal{C}\pi^{2n}$. Dla parzystych $n \geqslant 2$ prawdziwa jest zależność:

$$\zeta(n) = \frac{2^{n-1}|B_n|\pi^n}{n!},$$

gdzie B_n są liczbami Bernulliego.

Zdecydowanie trudniejsza jest analiza wartości funkcji ζ dla argumentów nieparzystych. Wiadomo o nich bardzo niewiele (do niedawna właściwsze byłoby stwierdzenie: nie wiadomo o nich prawie nic). W 1979 r. francuski matematyk Apéry wykazał, że $\zeta(3)$ jest liczbą niewymierną. Zrobił to w sposób pomysłowy, niebywale zręczny i zasadniczo całkowicie niezrozumiały: prześledzenie kolejnych kroków dowodu nie pozwala zrozumieć, skąd wziął się cały jego pomysł i co trzeba byłoby w nim zmienić, żeby móc zastosować go do uzyskania jakichkolwiek informacji o liczbach $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)\ldots$.

Wiosną 2000 roku inny francuski matematyk, T. Rivoal z Caen, udowodnił, że wśród liczb $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)\ldots$ jest nieskończenie wiele liczb niewymiernych. Jego dowód nie pozwala jednak wskazać żadnej z tych liczb, gdyż swoje twierdzenie Rivoal uzyskał jako wniosek z innego, trudniejszego do wysłowienia i mającego „szufladkowy charakter”. Następnie w 2001 roku Rivoal wykazał, że przynajmniej jedna z liczb $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ jest niewymierna. Z kolei ten rezultat został w 2001 roku zawężony przez Zudilina, który udowodnił, że przynajmniej jedna z liczb $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ jest niewymierna.

A oto wartości funkcji ζ dla początkowych, naturalnych n:

$$\zeta(1) = \infty \qquad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668\ldots$$

$$\zeta(3) = 1.2020569032\ldots \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.0823232337\ldots$$

$$\zeta(5) = 1.0369277551\ldots \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.0173430619\ldots$$

$$\zeta(7) = 1.0083492774\ldots \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} = 1.004077356\ldots$$

$$\zeta(9) = 1.0020083928\ldots \qquad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1.0009945751\ldots$$

A.2 Podstawowe reprezentacje funkcji ζ

Istnieje bardzo wiele wzorów zawierających funkcję ζ i przynajmniej część z nich postaram się zaprezentować.

(a) Jedną z najważniejszych i mających najszersze zastosowanie jest iloczyn Eulera, 1737 r.:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad \Re(s) > 1$$

(b) Globalnie zbieżny szereg dla funkcji dzeta jest dany wzorem:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{-s}, \tag{A.1}$$

dla $s \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= 2 \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} \\ &= 2^{1-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\end{aligned}$$

A zapisując to wyrażenie przy użyciu ζ dostajemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} + \zeta(s) = 2^{1-s}\zeta(s).$$

Stąd natychmiast otrzymujemy, że:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \tag{A.2}$$

I chociaż wzór ten definiuje funkcję ζ tylko dla $\Re(s) > 0$, można go wykorzystać do analitycznego przedłużenia na całą płaszczyznę zespoloną. Równość (A.1), udowodnioną w 1930 r. przez niemieckiego matematyka H. Hasse, można uzyskać poprzez zastosowanie *transformaty Eulera** dla równania (A.2).

Aby obliczyć wartość funkcji $\zeta(0)$ kładziemy w powyższym równaniu $s = 0$ i liczymy sumę:

$$\zeta(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k},$$

a stąd otrzymujemy:

$$\zeta(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{0,n}}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{0+1}} = -\frac{1}{2},$$

*Dla zbieżnego szeregu $S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, definiujemy transformatę Eulera jako:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_{k+1}.$$

gdzie $\delta_{0,n}$ jest deltą Kroneckera. Podobnie obliczamy wartość $\zeta(-1)$:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(k+1)$$

otrzymując w wyniku:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Możemy się więc pokusić o odważny wniosek, że:

$$1+2+3+4+5+\ldots = -\frac{1}{12}.$$

(c) Odwrotność funkcji ζ możemy zapisać przy użyciu funkcji Möbiusa $\mu(n)$. Mamy następującą zależność:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

gdzie:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ dzieli się przez kwadrat jakiejś liczby pierwszej} \\ -1^k, & \text{gdy } n = p_1\ldots p_k,\ p_i \in \mathcal{P},\ p_i \neq p_j\ dla\ i \neq j \\ 1, & \text{gdy } n = 1 \end{cases}$$

Zauważmy bowiem, że

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_3^s}\right)\ldots \\
&= 1-\left(\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_2^s}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{p_1^sp_2^s}+\frac{1}{p_1^sp_3^s}+\ldots+\frac{1}{p_2^sp_3^s}+\frac{1}{p_2^sp_4^s}+\ldots\right)-\ldots \\
&= 1-\sum_{0<i}\frac{1}{p_i^s}+\sum_{0<i<j}\frac{1}{p_i^sp_j^s}-\sum_{0<i<j<k}\frac{1}{p_i^sp_j^sp_k^s}+\ldots \\
&= \frac{\mu(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

(d) Kolejny związek funkcji ζ z funkcją Möbiusa

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

(e) Związek funkcji ζ z funkcją Liouville'a:

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1,$$

gdzie

$$\lambda(n) := (-1)^{\omega(n)},$$

a $\omega(n)$ jest liczbą czynników pierwszych n liczonych z krotnościami.

(f) Dzetę można przedstawić przy użyciu funkcji Γ dla $s \in \mathbb{R}$ i $x > 0$. Przypomnijmy najpierw definicję tej funkcji specjalnej:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{A.3}$$

Związek funkcji ζ z Γ:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \sigma > 1 \tag{A.4}$$

Dokonując podstawienia $t \to nx$ w równaniu (A.3) możemy funkcję Γ zapisać w równoważnej postaci:

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx,$$

Następnie sumujemy powyższą równość po $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

zmieniamy kolejność całkowania i sumowania, a stąd już dostajemy równość (A.4).

(g) Funkcję ζ można zapisać przy pomocy całek:

$$\zeta(n) = \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n\text{-całek}} \frac{\prod_{i=1}^n dx_i}{1 - \prod_{i=1}^n x_i}.$$

(h) Funkcja ζ pojawia się również w następującej tożsamości:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{[-\log(x\,y)]^s}{1-x\,y} dx\,dy = \Gamma(s+2)\zeta(s+2)$$

prawdziwej dla $\Re(s) > 1$. W szczególności, z powyższego wzoru możemy wyprowadzić następujące dwie równości:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} &= \zeta(2) \\ \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy} dxdy &= 2\zeta(3). \end{aligned}$$

(i) Kolejną reprezentacją funkcji ζ prawdziwą dla całej płaszczyzny zespolonej jest:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(s+n)-1) \frac{s^{\overline{n}}}{(n+1)!}$$

gdzie:

$$s^{\overline{n}} = s(s+1)\ldots(s+n-1).$$

(j) Całka dla n dodatnich, całkowitych i parzystych jest dana wzorem:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-3} \pi^{2n}}{(2^{2n}-1)(2n-2)!} \int_0^1 E_{2(n-1)}(x) dx$$

natomiast dla nieparzystych, dodatnich n, dana jest wzorami

$$\begin{aligned} \zeta(2n+1) &= \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \pi^{2n+1}}{(2^{2n+1}-1)(2n)!} \int_0^1 E_{2n}(x) \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2}) dx \\ &= \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \pi^{2n+1}}{(2^{2n+1}-1)(2n)!} \int_0^1 E_{2n}(x) \operatorname{ctg}(\frac{\pi x}{2}) dx \\ &= \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 B_{2n+1}(x) \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2}) dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 B_{2n+1}(x) \operatorname{ctg}(\frac{\pi x}{2}) dx, \end{aligned}$$

gdzie $E_n(x)$ jest wielomianem Eulera, a $B_n(x)$ jest wielomianem Bernulliego.

(k) Rozwijając $\zeta(s)$ w szereg Laurenta o środku w $s = 1$ otrzymujemy:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n (s-1)^n,$$

gdzie γ_n oznacza n-tą stałą Stjeltiesa i jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log m)^{n+1}}{n+1} \right).$$

(l) Interesujące wyniki otrzymano próbując zapisać wartości ζ, przy użyciu dwumianu Newtona:

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\binom{2k}{k}} \\ \zeta(3) &= \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}} \\ \zeta(4) &= \frac{36}{17} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4\binom{2k}{k}}. \end{aligned}$$

Właśnie przy pomocy powyższego wzoru na $\zeta(3)$ Apéry uzyskał swoje wnioski. W podobny sposób próbowano zapisać $\zeta(n)$ dla $n \geqslant 5$. Dla $n = 5$:

$$\zeta(5) = Z_5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}.$$

Poszukiwania wartości Z_5 wśród liczb wymiernych lub algebraicznych zakończyły się fiaskiem. Gdyby bowiem Z_5 było pierwiastkiem wielomianu stopnia mniejszego lub równego 25, to wówczas norma euklidesowa współczynników tego wielomianu byłaby większa niż $1,24 \times 10^{383}$, a jeśli $\zeta(5)$ byłaby liczbą algebraiczną stopnia mniejszego lub równego 25, to norma współczynników wielomianu przekroczyłaby $1,98 \times 10^{380}$. Tak więc nie znaleziono analogicznych wzorów na $\zeta(n)$ dla $n \geqslant 5$.

(m) Wartości funkcji $\zeta(s)$ dla parzystych liczb naturalnych wyrażają się wzorem:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}|B_{2n}|\pi^{2n}}{(2n)!},$$

gdzie B_n jest n-tą liczbą Bernoulli'ego.

(n) Innym przykładem bliskich związków miedzy liczbami Bernoulli'ego a funkcją ζ jest równość:

$$B_n = (-1)^{n+1} n\zeta(1-n), \quad \textit{dla } n \geqslant 1$$

którą możemy uprościć do postaci:

$$B_n = -n\zeta(1-n)$$

ponieważ dla nieparzystych n równość się zeruje. Stąd też otrzymujemy, że:

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad \textit{dla } n = 1,\ 3,\ 5, \ldots$$

A oto kilka pierwszych wartości: $-\frac{1}{12},\ \frac{1}{120},\ -\frac{1}{252},\ \frac{1}{240}$.

(o) Pomimo iż nie znamy analitycznej postaci $\zeta(n)$ dla n nieparzystych, możemy ją wyrazić jako granicę szeregu:

$$\zeta(n) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(2x+1)^n} \sum_{k=1}^{x} \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{k}{2x+1}\right)\right]^n, \quad \textit{dla } n = 3,\ 5, \ldots$$

(p) „Wzór biegunowy”:

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$$

gdzie γ oznacza stałą Eulera-Mascheroni.

Dodatek B

Zastosowania funkcji ζ w fizyce

B.1 Efekt Casimira

Istnieją eksperymenty fizyczne, które dowodzą, że jeśli umieścimy dwie idealnie przewodzące płaskie, równoległe do siebie płytki w pustej przestrzeni, w odległości a od siebie, to będą się one wzajemnie przyciągać. Efekt ten nazywa się *efektem Casimira*[*] i tłumaczymy go na gruncie *elektrodynamiki kwantowej* przypisując próżni pewną energię, która w obecności płytek wynosi:

$$\mathcal{E}_{plates} = \frac{E}{L^2} = \frac{\hbar c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \left[|\mathbf{k}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \right] dk_x dk_y, \quad \text{(B.1)}$$

gdzie $\hbar$ oznacza stałą Plancka, c jest prędkością światła w próżni, zaś $\mathbf{k}$ oznacza *wektor falowy*, którego moduł $|\mathbf{k}| = k$ wiąże się z długością fali elektromagnetycznej λ wzorem $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. W powyższym opisie zarówno płytki jak i wektor falowy są równoległe do płaszczyzny XY. Zakładamy również, że płytki są nieograniczone, aby uniknąć komplikacji związanych z efektami brzegowymi, które dla badanego zjawiska nie są istotne.

Wyrazy niezależne od a nie wpływają na wartość siły, która jest proporcjonalna do pochodnej energii po a.

[*]Hendrik Casimir, 1909 – 2000, holenderski fizyk teoretyk

Skupimy się więc teraz na części wzoru (B.1), która zależy od a. Przechodzimy także ze współrzędnych kartezjańskich (k_x, k_y) na biegunowe (k, ϕ). Całka po ϕ jest trywialna i wynosi 2π. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathcal{E}_{plates} = \hbar c \int_0^\infty \frac{k}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} dk.$$

Niestety powyższe wyrażenie jest jawnie rozbieżne. W takich sytuacjach fizycy stosują procedurę zwaną *regularyzacją*. Polega ona na zamianie kolejności całkowania i sumowania oraz uogólnienia wykładnika wyrazu $k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, w następujący sposób:

$$\mathcal{E}_{reg}(s) = \hbar c \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)^{-s/2}$$

Interesująca nas wartość s to $s = -1$, ale każdy z wyrazów powyższej sumy istnieje dla $\Re(s) > 2$. Wtedy całkowanie po k jest elementarne i daje:

$$\mathcal{E}_{reg}(s) = \frac{\hbar c}{2s-4} \cdot \frac{\pi^{1-s}}{a^{2-s}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{s-2}} = \frac{\hbar c}{2s-4} \cdot \frac{\pi^{1-s}}{a^{2-s}} \zeta(s-2)$$

Otrzymany wzór jest dobrze określony dla $s = -1$:

$$\mathcal{E}_{reg}(s=-1) = -\frac{\hbar c}{a^3} \cdot \frac{\pi^2}{6} \zeta(-3) = \pi^2 \frac{B_4}{4!} \cdot \frac{\hbar c}{a^3}$$

ponieważ $\zeta(1-2n) = -B_{2n}/2n$.

Otrzymany wynik jest identyczny z wynikami otrzymywanymi alternatywnymi metodami, a także pozostaje w dobrej zgodności z eksperymentami.

Bibliografia

[1] Bombieri E., *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis*, http://claymath.org/prizeproblems/ riemann.htm.

[2] Borwein P., Choi S., Rooney B., Weirathmueller A. *The Riemann Hypothesis.*

[3] Conrey J.B., *The Riemann Hypothesis*, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), no. 3, 341–353.

[4] Czyż W., *Lectures on quantum mechanics.*

[5] Greene, R. E.; Krantz, S. G.: *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 2006.

[6] Newman, D. J., *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87, 1980, no. 9, 693–696.

[7] Rudin W., *Analiza Funkcjonalna*, PWN, Warszawa 2001.

[8] Titchmarsh E. C., *The Zeta function of Riemann*, Cambridge University Press, London 1930.

[9] Sondow, Jonathan, Weisstein, Eric W., *Riemann Zeta Function*, http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html.

[10] Zagier D, *Newman's short proof of the Prime Number Theorem.*