

Przykładowy test predyspozycyjny z elementów algebry, geometrii i działów pokrewnych dla kandydatów na studia matematyczne w Instytucie Matematyki UJ

Część pierwsza

Do każdego z zadań od 1 do 20 podano pięć odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawdziwa. Literę, którą oznaczono prawdziwą odpowiedź, należy wpisać w arkuszu odpowiedzi obok liczby oznaczającej numer zadania.

1. W zbiorze liczb rzeczywistych wielomian $x^5 - 2x^3 + 2x$
 - A) nie ma pierwiastków
 - B) ma dokładnie 1 pierwiastek
 - C) ma dokładnie 2 pierwiastki
 - D) ma dokładnie 3 pierwiastki
 - E) ma dokładnie 4 pierwiastki.
2. Funkcja $f(x) = \sin x + |x| + x^2$
 - A) ma pochodną w każdym punkcie
 - B) jest określona tylko dla $x > 0$
 - C) przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste
 - D) jest funkcją ciągłą
 - E) jest funkcją okresową.
3. Wyrażenie $\log_x y$ ma sens
 - A) dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y
 - B) dla $x > 0, y > 0$
 - C) dla $x > 0, x \neq 1, y > 0$
 - D) dla $x > 0, y > 0, y \neq 1$
 - E) dla $x \neq 1, y \neq 1$.
4. Równanie $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = 30$ spełnia każda liczba ze zbioru
 - A) {5, 6, 15, 30}
 - B) {6, 15, 30}
 - C) {5, 15, 30}
 - D) {5}
 - E) {6}.
5. Po obrocie trójkąta równoramiennego wokół jego podstawy otrzymamy
 - A) kulę
 - B) stożek
 - C) walec
 - D) bryłę powstałą po sklejeniu dwóch stożków podstawami
 - E) żadną z powyższych brył.

6. Liczba $\sqrt[3]{15}$ należy do przedziału
- A) $(-\infty, 2)$
 - B) $[2, 3)$
 - C) $[3, 4)$
 - D) $[4, 5)$
 - E) $[5, \infty)$
7. Która z poniższych liczb jest liczbą pierwszą?
- A) 0
 - B) 89
 - C) 143
 - D) 2005
 - E) π
8. Zbiór punktów płaszczyzny $\{(x, y) : x^2 = y^2\}$ to
- A) prosta
 - B) okrąg
 - C) parabola
 - D) hiperbola
 - E) dwie proste.
9. Współrzędne wszystkich wierzchołków trójkąta T na płaszczyźnie są liczbami naturalnymi parzystymi. Wtedy
- A) T musi być równoboczny
 - B) pole powierzchni T jest liczbą parzystą
 - C) suma kątów T wynosi 120 stopni
 - D) obwód T jest liczbą parzystą
 - E) obie współrzędne środka ciężkości trójkąta T są liczbami parzystymi.
10. Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych, o wartościach rzeczywistych, okresowa o okresie π , na przedziale $[0, \pi]$ identyczna z funkcją sinus
- A) jest równa funkcji sinus na całym zbiorze liczb rzeczywistych
 - B) jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie
 - C) nie przyjmuje wartości mniejszych od 0
 - D) dla argumentu równego $\frac{7}{2}\pi$ przyjmuje wartość 0
 - E) jest nieograniczona.

11. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie, o różnych promieniach. Ile prostych na płaszczyźnie jest stycznych jednocześnie do obu okręgów?
- A) jedna
 - B) dwie
 - C) trzy
 - D) cztery
 - E) nieskończenie wiele.
12. Liczby 5, 10, 13
- A) mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, w którym najmniejszy kąt ma mniej niż 30 stopni
 - B) mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, w którym najmniejszy kąt ma więcej niż 30 stopni
 - C) mogą być długościami boków trójkąta ostrokątnego
 - D) mogą być długościami boków trójkąta rozwartokątnego
 - E) nie mogą być długościami boków trójkąta.
13. Dane są zdarzenia A i B takie, że $P(A) = 0,4$ i $P(B) = 0,8$. Wtedy
- A) prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń wynosi co najmniej 1,1
 - B) zdarzenia te wykluczają się
 - C) prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń A i B jest większe 0,1
 - D) prawdopodobieństwo różnicy zbiorów B i A jest mniejsze od 0,35
 - E) prawdopodobieństwo różnicy zbiorów A i B jest większe od 0,25.
14. Funkcja $f(x) = |1 + \sin x|$ w punkcie $x = 0$
- A) osiąga minimum lokalne
 - B) ma pochodną
 - C) nie jest określona
 - D) nie ma granicy
 - E) jest nieciągła.
15. Liczba 12345678 jest
- A) podzielna przez 3, podzielna przez 4 i podzielna przez 9
 - B) podzielna przez 3, podzielna przez 4 i niepodzielna przez 9
 - C) podzielna przez 3, niepodzielna przez 4 i podzielna przez 9
 - D) niepodzielna przez 3, podzielna przez 4 i niepodzielna przez 9
 - E) niepodzielna ani przez 3, ani przez 4, ani przez 9.

16. Ile prostych jest stycznych równocześnie do dwóch okręgów, jeśli odległość środków tych okręgów jest większa od sumy ich promieni?
- A) ani jedna
 - B) tylko jedna
 - C) co najwyżej dwie proste
 - D) co najwyżej trzy proste
 - E) dokładnie cztery różne proste.
17. Jeżeli a oraz b są dwiema niezerowymi liczbami przeciwnych znaków, to prawdziwa jest nierówność
- A) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$
 - B) $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$
 - C) $(a - b)^2 \leq a^2 + b^2$
 - D) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 0$
 - E) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \geq 0$.
18. Środek okręgu wpisanego w trójkąt
- A) zawsze leży w punkcie przecięcia wysokości trójkąta
 - B) zawsze leży w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta
 - C) zawsze leży w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta
 - D) zawsze leży w punkcie przecięcia środkowych trójkąta
 - E) zawsze pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie.
19. Zbiór liczb, które spełniają nierówność $(x - 2004)(x^2 - 16) \geq 0$
- A) jest ograniczony
 - B) zawiera nieskończenie wiele liczb całkowitych ujemnych
 - C) zawiera element największy
 - D) zawiera element najmniejszy
 - E) jest przedziałem.
20. Wszystkie przekątne w siedmiokącie wypukłym przecinają się w jednym punkcie:
- A) zawsze
 - B) tylko w siedmiokącie foremnym
 - C) może się to zdarzyć, ale nie w siedmiokącie foremnym
 - D) nie zawsze, ale w niektórych siedmiokątach – w tym w siedmiokącie foremnym i w pewnych siedmiokątach nieforemnych
 - E) nigdy.

Część druga

Odpowiedź na każde z poniższych zadań należy wpisać w odpowiednim polu arkusza odpowiedzi przy liczbie odpowiadającej numerowi zadania. Odpowiedź należy podać w najprostszej postaci, bez zaokrągleń.

21. Ile wynosi cyfra jedności liczby 2004^{13} ?
22. Podać (w stopniach) miarę kąta, który tworzą półproste zawierające dwie przekątne pięciokąta foremnego o wspólnym początku.
23. W nieskończonym ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 6, drugi wyraz jest równy 2. Ile wynosi suma tego nieskończonego ciągu geometrycznego?
24. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że na dokładnie jednej z nich wypadnie szóstka?
25. Wysokość trójkąta równobocznego ma długość $\sqrt{3}$. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta?
26. Ile wynosi promień okręgu zadanego równaniem $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$?
27. Ile różnych liczb naturalnych dzieli liczbę $2004 = 12 \cdot 167$?
28. Podać zbiór rozwiązań nierówności $\log_{2-x}(x - 1) < 1$.
29. Liczba x spełnia równanie $\log_{2x-3} x = 1$. Ile wynosi x ?
30. Ile wynosi suma wszystkich liczb naturalnych nieparzystych od 1 do 99?
31. Ile pierwiastków ma równanie $x^3 - 3x^2 + 9x = 27$?
32. Ile liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
33. Ile zer ma na końcu liczba $17!$?
34. Ile wynosi największa wartość funkcji danej wzorem $f(x) = 1 + 2 \cos x$?
35. Dana jest kula o promieniu $r = \sqrt[3]{3\pi}$. Ile wynosi objętość tej kuli?

36. Na ile sposobów można połączyć dwa dane przeciwległe wierzchołki sześciangu łamaną złożoną z jego trzech krawędzi?
37. Ile stopni ma kąt utworzony przez małą i dużą wskazówkę zegara o punktualnie o godzinie dwudziestej?
38. W wyścigu bierze udział 6 osób. Na ile sposobów można im przyporządkować numery startowe od 1 do 6?
39. Funkcja $f(x) = x^2 - 2006x + 2006$ jest malejąca dla $x < x_0$ i jest rosnąca dla $x > x_0$. Ile wynosi x_0 ?
40. Dla jakich wartości parametru m prosta $3x + 4y + m = 0$ jest styczna do okręgu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$?
41. Ile wynosi $\log_{a^2} b$, jeśli $\log_b a^3 = 2$?
42. Który wielościan foremny ma 20 wierzchołków i 30 krawędzi?
43. Jednym z pierwiastków równania $x^2 - 2004x - 2005 = 0$ jest liczba 2005. Ile wynosi drugi pierwiastek?
44. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $(20012002200320042005)^2$ przez 4.
45. Szachownica o wymiarach 8 na 8 ma 64 pola. Spośród tych 64 pól wybieramy losowo jedno. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowaliśmy pole czarne leżące przy brzegu szachownicy?
46. Talię 52 kart potasowano i podzielono na dwie części. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że w jednej będzie parzysta, a w drugiej nieparzysta liczba kart?
47. Ile osi symetrii ma prostokąt, który nie jest kwadratem?
48. Z wierzchołka A sześciangu poprowadzono dwie przekątne ścian bocznych, do których należy wierzchołek A . Ile wynosi kąt między tymi przekątnymi?
49. Wyznaczyć wszystkie liczby x z przedziału $(0, \pi)$, które spełniają nierówność
- $$\frac{\sin 2x}{\sin x} < 1.$$
50. Mnożymy przez siebie 2005 kolejnych liczby nieparzystych. Jaka będzie cyfra jedności otrzymanej liczby?